SYNTHÈSE DE SIGNAUX CERTAINS DONT ON CONNAIT LA FONCTION D'AMBIGUÏTÉ DE TYPE WOODWARD OU DE TYPE EN COMPRESSION

par

Geneviève JOURDAIN

Docteur ès sciences *

ANALYSE. — *Après avoir rappelé la définition de la fonction d'ambiguïté (f. amb.) de type Woodward, d'un signal complexe, au moyen de la distance entre ce signal et le même altéré par l'action d'un opérateur de translation en temps et en fréquence, l'auteur définit la fonction d'ambiguïté en compression du signal, en utilisant l'action d'un nouvel opérateur appelé opérateur de compression, introduit et caractérisé ici. Il montre que, lorsqu'on connaît la f. amb. du signal de l'un ou l'autre type, celle-ci définit entièrement le signal (ou son inverse), pourvu qu'il existe une date* t_0 *connue, à laquelle la phase du signal est connue (par exemple le signal est réel à cette date). On généralise ensuite en montrant que retrouver le signal (ou son inverse) à partir d'une distance quadratique entre S et S altéré par action d'un opérateur linéaire, permet de retrouver la densité d'énergie dans le plan-fréquence, au sens de Rihaczek.*

ABSTRACT. — *The definition of the Woodward ambiguity function of a complex signal is recalled by means of the distance between the signal and a time-and-frequency shifted version of this signal. The compression ambiguity function is then defined by means of the introduction of a new operator : the time compression operator which is characterized here. It is shown that, when whether the Woodward ambiguity function or the compression one is known, the signal — or its inverse — is quite definite, as long as a known date, for which the signal phasis is known, exists (for ex. the signal is real). A generalization shows that finding the signal S — or its inverse — from a quadratic distance between S and a version of S garbled by a linear operator, leads to the Rihaczeck signal energy distribution in time and frequency.*

1. INTRODUCTION

La notion de *fonction d'ambiguïté d'un signal* a été introduite par Woodward [13] à l'occasion de problèmes de type détection-radar, pour mesurer le pouvoir de résolution conjoint en temps et en fréquence d'un signal certain. Divers auteurs se sont parallèlement intéressés à une *représentation en temps et en fréquence* d'un signal certain, et plusieurs *représentations conjointes* d'un signal ont été introduites et caractérisées [8, 9, 12]. Des liens ont été mis en évidence entre telle ou telle représentation conjointe du signal : la fonction d'ambiguïté de type Woodward est reliée à la densité d'énergie au sens de Rihaczeck [3].

Dans ce sens-là, la fonction d'ambiguïté, type Woodward, est liée directement à une *façon de représenter le signal* (en utilisant les variables conjuguées temps et fréquence).

Une note récente [4] montre que ces diverses fonctionnelles s'obtiennent à partir d'une même formulation plus générale.

Lorsqu'il s'agit, comme c'était le cas pour Woodward, plus spécialement d'applications de type radar ou sonar, et lorsque la formulation analytique et à *bande étroite* du signal n'est plus possible, le pouvoir de résolution du signal en temps et en fréquence est alors chiffré par la *fonction d'ambiguïté en compression* du signal [11].

De nombreuses études ont été faites sur l'*analyse* de ces fonctions d'ambiguïté ; en particulier on connaît fort bien les fonctions d'ambiguïtés relatives aux types de signaux les plus employés dans les problèmes de détection active [9, 11, 6, 3].

Par contre, le problème de la synthèse du signal ayant une fonction d'ambiguïté donnée n'a pas encore été à notre connaissance résolu de façon générale. Quelques études ont été faites en limitant la classe de signaux que l'on recherche [10] ; le problème de synthèse également a été abordé en généralisant la notion de fonction d'ambiguïté au cas de signaux aléatoires, en factorisant d'une certaine façon le pouvoir de résolution moyen du signal [6].

Nous montrons ici que la connaissance de la fonction d'ambiguïté de type Woodward, ou celle du type en compression suffit, à une contrainte près si le

* Centre d'Etudes et Phénomènes et Géophysiques (CEPHAG), I.N.P.G., Grenoble, 38400 Saint-Martin-d'Hères.

signal est complexe, pour connaître entièrement la forme du signal correspondant, pourvu, naturellement, que la fonctionnelle dont on dispose ait bien les propriétés d'une fonction d'ambiguïté. Nous donnons la procédure qui permet de *remonter* au signal (ou à son inverse), connaissant l'une ou l'autre de ces fonctionnelles.

Nous essayons ensuite de généraliser le problème en cherchant à quelles conditions on peut retrouver une forme de signal lorsqu'on en connaît une certaine fonctionnelle. Pour cela, nous replaçons tout d'abord la fonction d'ambiguïté — dont les définitions utilisées sont nombreuses — dans le cadre de la distance entre le signal et un signal altéré par action d'un opérateur linéaire conjoint temps-fréquence. Cette approche conduit, pour définir la fonction d'ambiguïté en compression, à l'introduction d'un *opérateur compression* introduit par le même auteur pour des modèles de propagation [7], opérateur que l'on définit et caractérise ici dans un premier temps.

2. LES FONCTIONS D'AMBIGUITÉ (TYPE WOODWARD, ET COMPRESSION) EN TANT QUE DISTANCE-OPÉRATEUR COMPRESSION

Les espaces de signaux qui nous intéressent sont ceux qui, d'une part, rendent compte des propriétés des signaux physiques utiles dans les applications dont on vient de parler (espaces L^2, avec BL^2, L'), mais on élargira les espaces de fonctions aux distributions de façon à pouvoir utiliser un modèle idéalisé des signaux physiques.

Soit S le signal d'origine et X celui obtenu par action d'un opérateur $\mathcal{A}$ sur S.

$$X = \mathcal{A}(S)\,. \tag{1}$$

On ne s'intéressera dans toute la suite qu'aux opérateurs *linéaires*. En représentation temporelle, $\mathcal{A}$ est décrit à l'aide de sa réponse bitemporelle $R(t, u)$ et les signaux S et X sont décrits à l'aide des représentations temporelles $S(t)$ et $X(t)$.

$$R(t, u) = \mathcal{A}[\delta(t-u)]\,, \tag{2}$$

$$X(t) = \int_{\mathbf{R}} R(t, u)\, S(u)\, du. \tag{3}$$

Les espaces et les opérateurs considérés sont tels qu'on puisse définir entre X et S une distance sous forme de produit scalaire, soit en utilisant toujours les représentations temporelles :

$$\Delta(X, S) = \iint_{\mathbf{R}^2} S(t)\, R(t, u)\, S^*(u)\, du\, dt\,, \tag{4}$$

où S^* est le complexe conjugué de S.
La notation intégrale de $\Delta(X, S)$ sera conservée de façon impropre, même si les représentations temporelles des signaux ou des opérateurs n'appartiennent pas à L^2.

2.1. Opérateurs de translation en temps et en fréquence. Fonction d'ambiguïté en translation, type Woodward.

Intéressons-nous aux opérateurs suivants [5, 2].

L'*opérateur de translation en temps* est un filtre homogène $\mathcal{T}_\tau$, $\tau > 0$, décrit par :

$$R_\tau(t, u) \equiv R_\tau(t-u) = \delta(t-u-\tau)\,, \tag{5}$$

Alors $X(t) = S(t-\tau)$ et $\Delta(X, S)$ est la fonction de corrélation de $S(t)$:

$$C_S(\tau) = \Delta(S_\tau, S) = \int_{\mathbf{R}} S(t)\, S^*(t-\tau)\, dt. \tag{6}$$

L'opérateur de *translation en fréquence* est un opérateur non-homogène, $\mathcal{T}_f$, $f > 0$, décrit par :

$$R_f(t, u) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}2\pi ft}\, \delta(t-u)\,. \tag{7}$$

Alors $X(t) = S(t)\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}2\pi ft}$ et la distance (4) s'exprime comme :

$$P_S(f) = \Delta(S_f, S) = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\pi ft}\, |S(t)|^2\, dt\,. \tag{8}$$

L'opérateur de *translation en temps et en fréquence*, non homogène, $\mathcal{A}_{\tau,f} = \mathcal{T}_f[\mathcal{T}_\tau]$, est décrit par :

$$R_{\tau,f}(t, u) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}2\pi ft}\, \delta(t-u-\tau)\,. \tag{9}$$

Alors $X(t) = S(t-\tau)\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}2\pi ft}$, et la distance (6) est ce que nous appelons, par définition, la *fonction d'ambiguïté en translation de* $S(t)$:

(10)

$$\bullet\ \chi_S(\tau, f) = \Delta(S_{\tau,f}, S) = \int_{\mathbf{R}} S(t)\, S^*(t-\tau)\, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}2\pi ft}\, dt.$$

On a évidemment $C_S(\tau) = \chi_S(\tau, 0)$ et $P_S(f) = \chi_S(0, f)$.

La *fonction d'ambiguïté de Woodward* du signal réel $S(t)$ est la fonction d'ambiguïté en translation de l'amplitude complexe $A(t)$ du signal analytique $Z(t)$ associée à $S(t)$ et relative à une fréquence ν_0 :

$$\text{si } Z(t) = S(t) + \mathbf{i}\, \hat{S}(t)\,,$$

où $\hat{S}(t)$ est la transformée de Hilbert de $S(t)$,

$$Z(t) = A(t)\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}2\pi\nu_0 t} \text{ et } S(t) = \operatorname{Re}\{Z(t)\}\,,$$

la fonction d'ambiguïté de Woodward de $S(t)$ est :

$$\chi_A(\tau, f) = \int_{\mathbf{R}} A(t)\, A^*(t-\tau)\, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}2\pi ft}\, dt. \tag{11}$$

χ est la fonction d'ambiguïté en translation.

2.2. Opérateur de compression ; fonction d'ambiguïté en compression.

2.2.1. Opérateur compression $\mathcal{C}_\lambda$.

C'est un opérateur non homogène défini par sa

● Ce signe typographique indique les équations encadrées sur le manuscrit.

réponse bitemporelle fonction d'un paramètre $\lambda > 0$:

(12) • $R_\lambda(t, u) = \mathcal{C}_\lambda[\delta(t-u)] = \sqrt{\lambda}\,\delta(\lambda t - u)$,
$$= \delta(t - u/\lambda)/\sqrt{\lambda},$$

de sorte que le signal obtenu par action de $\mathcal{C}_\lambda$ sur $S(t)$ est :

(13) $$S_\lambda(t) = \mathcal{C}_\lambda[S(t)] = \sqrt{\lambda}\,S(\lambda t)\,.$$

L'introduction du coefficient $\sqrt{\lambda}$ dans (12) laisse inchangée dans (13) l'énergie du signal avant et après compression.

On donne en annexe l'opérateur inverse et les signaux propres de $\mathcal{C}_\lambda$.

2.2.2. Fonction d'ambiguïté en compression.

Dans les problèmes de détection active où on s'intéresse au pouvoir de résolution du signal, les altérations fréquentielles subies par le signal ne peuvent pas toujours s'assimiler à de simples décalages, comme ceux produits par $\mathcal{T}_f$, et doivent tenir compte de la forme comprimée ou dilatée du signal. En suivant la même succession d'altérations que $S_{\tau,f}$, l'écho devient :

(14) $$S_{\tau,\lambda} = \mathcal{C}_\lambda[\mathcal{T}_\tau(S)]\,,$$

(15) $$S_{\tau,\lambda}(t) = \int R_{\tau,\lambda}(t, u)\,S(u)\,du\,,$$
$$\text{où } R_{\tau,\lambda}(t, u) = \sqrt{\lambda}\,\delta(\lambda t - \tau - u),$$

et $$X(t) = S_{\tau,\lambda}(t) = \sqrt{\lambda}\,S(\lambda t - \tau)\,.$$

La *fonction d'ambiguïté en compression* est :

(16) • $$\Psi_S(\tau, \lambda) = \Delta(S_{\tau,\lambda}, S) = \sqrt{\lambda}\int_{\mathbf{R}} S(t)\,S(\lambda t - \tau)\,dt.$$

3. SYNTHÈSE DE SIGNAUX DONT ON CONNAIT LA FONCTION D'AMBIGUITÉ (DE TYPE TRANSLATION OU COMPRESSION)

Montrons que *connaissant* $\chi_S(\tau, f)$, ou $\Psi_S(\tau, \lambda)$, $S(t)$ *est connu*, $\forall t$ (à un signe près [$S(t)$ et $-S(t)$ ont forcément même fonction d'ambiguïté), *pourvu qu'il existe une date* t_0 *connue, pour laquelle* $S(t_0) \neq 0$ *et la phase* $\Phi(t_0)$ *de* $S(t)$ *est connue* (un exemple simple est $S(t_0)$ réel). Soit $S(t) = \rho(t)\,e^{i\Phi(t)}$.

3.1. Synthèse de $S(t)$ à partir de $\chi_S(\tau, f)$.

On dispose de $\chi_S(\tau, f)$ définie par (10), donc de $|\chi_S(\tau, f)|$ et de $\operatorname{Arg}\chi_S(\tau, f)$.

Par transformation de Fourier inverse de $\chi_S(\tau, f)$ vis-à-vis de f, on dispose donc de :

(17) $$P(t, \tau) = \int_{\mathbf{R}} e^{i2\pi f t}\,\chi_S(\tau, f)\,df \equiv S(t)\,S^*(t-\tau)\,,$$

$|P(t, \tau)|$ donne $\rho(t)\,\rho(t-\tau)$, soit :

(18) $$\begin{cases} |P(t_0, \tau)| = \rho(t_0)\,\rho(t_0 - \tau)\,, \\ |P(t_0, 0)| = \rho^2(t_0)\,. \end{cases}$$

A l'aide de (18), on connait $\rho(t)$, $\forall t$, à un signe près évidemment :

(19) • $$\rho(t) = \pm\frac{|P(t_0, t_0 - t)|}{(|P(t_0, 0)|)^{1/2}},$$

$\operatorname{Arg} P(t, \tau) = \Phi(t) - \Phi(t - \tau)$,

$\operatorname{Arg} P(t_0, t_0 - t) = \Phi(t_0) - \Phi(t)$,

(20) • et $\Phi(t) = \Phi(t_0) - \operatorname{Arg} P(t_0, t_0 - t)$.

En pratique, la date t_0 sera choisie telle que :
$$|\rho(t_0)| \neq 0$$
($\rho(t)$ est donné à l'aide de (19)) ; et si l'on n'a pas de connaissance *a priori* sur $\Phi(t_0)$, on conviendra de prendre $\Phi(t_0) = 0$ par exemple.

3.2. Synthèse de $S(t)$ à partir de $\Psi_S(\tau, \lambda)$.

On dispose de $\Psi_S(\tau, f)$ définie par (16), que l'on écrit encore, en utilisant $s(\nu) \rightleftharpoons S(t)$:

(21) $$\Psi_S(\tau, \lambda) = \sqrt{\lambda}\iint_{\mathbf{R}^2} S(t)\,s^*(\nu)\,e^{-2i\pi\nu(\lambda t - \tau)}\,d\nu\,dt.$$

Désignons par $\mu(k, f)$ la transformation de Fourier bidimensionnelle de $\Psi_S(\tau, \lambda)\,\sqrt{\lambda}$ supposée exister :

(22) $$\frac{\Psi_S(\tau, \lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \iint_{\mathbf{R}^2} \mu(k, f)\,e^{i2\pi f\tau}\,e^{-i2\pi\lambda k}\,dk\,df.$$

La comparaison de (21) et (22) donne :

(23) $$\mu(\nu t, \nu) \equiv S(t)\,s^*(\nu)\,.$$

Connaissant $\Psi_S(\tau, \lambda)$, on connaît $\mu(k, f)$; on construit alors, la date t_0 étant connue, la quantité :

(24) $$\mu(\nu t_0, \nu) \equiv S(t_0)\,s^*(\nu)\,,$$

et on calcule la pseudo-transformée de Fourier :

$$\int_{\mathbf{R}} \mu(\nu t_0, \nu)\,e^{-i2\pi\nu t_0}\,d\nu = S(t_0)\int_{\mathbf{R}} s^*(\nu)\,e^{-i2\pi\nu t_0}\,d\nu = |S(t_0)|^2.$$

On en déduit $\pm|S(t_0)|$ et, supposant connue $\Phi(t_0)$, on connaît $\pm S(t_0)$, et donc $S^*(t_0)$ au signe près.

De (23) on tire :

(25) • $$s(\nu) = \pm\,\mu^*(\nu t_0, \nu)/S^*(t_0)\,,$$

où $\mu(\nu t_0, \nu)$ est disponible ainsi qu'on l'a vu précédemment.

4. GÉNÉRALISATION

Dans ces deux cas, la connaissance de la fonctionnelle quadratique Δ a permis de définir la forme du signal S. On a d'abord retrouvé une autre fonctionnelle à deux variables du signal ($P(t, \tau)$ dans le cas 3.1 et $S(t)\, s^*(\nu)$ dans le cas 3.2)) et à partir de cette autre fonctionnelle, la condition t_0 connue et $\Phi(t_0)$ connue permet de connaître $S(t)$.

La fonctionnelle $S(t)\, s^*(\nu)$ apparaît d'ailleurs chez d'autres auteurs [9, 3], où la quantité (26)

$$S(t)\, s^*(\nu)\, e^{-i2\pi\nu t} = d(t, \nu)\,, \tag{26}$$

est appelée *densité d'énergie dans le plan temps-fréquence*. La connaissance de $S(t)\, s^*(\nu)$ entraîne bien évidemment celle de $d(t, \nu)$ et donc $d(t, \nu)$ permet également, compte tenu toujours de la restriction indiquée sur t_0 et $\Phi(t_0)$, la synthèse de $S(t)$ (ou de son inverse). On sait d'autre part que :

$$d(t, \nu) \underset{2\,\dim}{\rightleftharpoons} \chi_S(\tau, f)\,. \tag{27}$$

Cela signifie encore que la connaissance de $\chi_S(\tau, f)$, est équivalente à celle de $d(t, \nu)$, et que l'on peut, connaissant $\chi_S(\tau, f)$, faire la synthèse de $S(t)$ en passant également par $d(t, \nu)$.

On peut donc penser généraliser ce que l'on a vu pour effectuer la synthèse de S à partir de $\Delta(X, S)$: on propose pour cela la solution générale de passage par l'intermédiaire de $S(t)s^*(\nu)$, ou de $d(t, \nu)$.

Voyons quelles conditions doit satisfaire l'opérateur $\mathcal{A}$ pour qu'un tel schéma de synthèse soit possible. $\Delta(X, S)$ donnée par (4) s'écrit en faisant apparaître $p(t, \nu) = S(t)s^*(\nu)$:

$$\Delta(X, S) = \int_{\mathbf{R}^3} R(t, u)\, S(t)s^*(\nu)\, e^{-2i\pi\nu u}\, du\, dt\, d\nu, \tag{28}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^2} r(t, \nu)\, p(t, \nu)\, dt\, d\nu, \tag{29}$$

$$\text{où} \qquad r(t, \nu) \underset{\nu}{\overset{u}{\rightleftharpoons}} R(t, u)\,. \tag{30}$$

4.1. $R(t, u)$ ne dépend que d'un paramètre θ_1 : soit $R_{\theta_1}(t, u)$.

C'est par exemple $R_\tau(t, u)$ ou $R_f(t, u)$.

La synthèse de $p(t, \nu)$, et donc de $S(t)$ dans les conditions vues, est possible à partir de :

$$\Delta_{\theta_1} = \Delta_{\theta_1}(X, S) = \int_{\mathbf{R}^2} r_{\theta_1}(t, \nu)\, p(t, \nu)\, dt\, d\nu, \tag{31}$$

s'il existe $g_{\theta_1}(t, \nu)$ *tel que l'inversion* de Δ_{θ_1} par g_{θ_1} redonne $p(t, \nu)$:

$$\int_{\theta_1} \Delta_{\theta_1}\, g_{\theta_1}(t, \nu)\, d\theta_1 \equiv p(t, \nu)\,. \tag{32}$$

En portant (31) dans (32), on a :

$$\int_{\mathbf{R}^3} r_{\theta_1}(t', \nu')\, p(t', \nu')\, g_{\theta_1}(t, \nu)\, d\theta_1\, dt' d\nu' \equiv p(t, \nu)\,,$$

soit :

$$\bullet \quad \int_{\mathbf{R}} r_{\theta_1}(t', \nu')\, g_{\theta_1}(t, \nu)\, d\theta_1 = \delta(t - t', \nu - \nu')\,. \tag{33}$$

Pour $R_\tau(t, u)$ donné par (5) :

$$r_\tau(t, \nu) = e^{-2i\pi\nu(t-\tau)}$$

et on ne peut trouver de $g_\tau(t, \nu)$ qui satisfasse à (33).

Il est bien évident qu'on ne peut pas faire la synthèse de la forme du signal à partir de sa fonction de corrélation.

Pour $R_f(t, \nu)$ donné par (6), $r_f(t, \nu) = e^{i2\pi(f-\nu)t}$; on ne peut pas non plus trouver de $g_f(t, \nu)$ qui satisfasse (33).

4.2. $R(t, u)$ dépend de 2 paramètres θ_1 et θ_2 : $R_{\theta_1\theta_2}(t, u)$.

C'est par exemple $R_{\tau,f}(t, u)$, ou $R_{\tau,\lambda}(t, u)$.

$$\Delta_{\theta_1\theta_2} = \Delta_{\theta_1\theta_2}(X, S) = \iint r_{\theta_1\theta_2}(t, \nu)\, p(t, \nu)\, dt\, d\nu, \tag{34}$$

avec les mêmes notations que précédemment :

$$r_{\theta_1\theta_2}(t, \nu) \underset{\nu}{\overset{u}{\rightleftharpoons}} R_{\theta_1\theta_2}(t, u).$$

La synthèse de $p(t, \nu)$ à partir de $\Delta_{\theta_1\theta_2}$ est possible s'il existe encore $g_{\theta_1\theta_2}(t, \nu)$ tel que :

$$\iint g_{\theta_1\theta_2}(t, \nu)\, \Delta_{\theta_1\theta_2}\, d\theta_1 d\theta_2 \equiv p(t, \nu)\,;$$

soit, avec (34),

$$\int_{\mathbf{R}^4} g_{\theta_1\theta_2}(t, \nu)\, r_{\theta_1\theta_2}(t', \nu')\, p(t', \nu')\, dt'\, d\nu'\, d\theta_1\, d\theta_2 \equiv p(t, \nu),$$

soit encore :

$$\bullet \quad \iint g_{\theta_1\theta_2}(t, \nu)\, r_{\theta_1\theta_2}(t', \nu')\, d\theta_1 d\theta_2 = \delta(t - t', \nu - \nu'). \tag{35}$$

● Pour $Re_{\tau,f}(t, u)$ donné par (9), la transformation de Fourier vis-à-vis de u donne :

$$r_{\tau,f}(t, \nu) = e^{i2\pi ft}\, e^{-i2\pi\nu t}\, e^{+i2\pi\nu\tau}\,. \tag{36}$$

La solution $g_{\tau f}(t, \nu)$ qui satisfait (34) étant donné (35) est évidente :

$$g_{\tau,f}(t, \nu) = e^{-i2\pi ft}\, e^{+2i\pi\nu\tau}\, e^{2i\pi\nu t}\,. \tag{37}$$

● Pour $R_{\tau,\lambda}(t, u)$ donné par (15), la transformation de Fourier vis-à-vis de u donne :

$$r_{\tau,\lambda}(t, \nu) = \sqrt{\lambda}\, e^{-i2\pi\nu\lambda t}\, e^{+2i\pi\nu\tau}\,. \tag{38}$$

La solution $g_{\tau,\lambda}(t, \nu)$ qui satisfait (34) étant donné (37) est alors :

$$g_{\tau,\lambda}(t, \nu) = \frac{|\nu|}{\sqrt{\lambda}}\, e^{-2i\pi\nu\tau}\, e^{+2i\pi\nu\lambda t}\,. \tag{39}$$

On vérifie que :

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-2i\pi\tau(\nu-\nu')}\, |\nu|\, e^{2i\pi\lambda(\nu t - \nu' t')}\, d\lambda\, d\tau,$$

$$= \delta(\nu - \nu') \int |\nu|\, e^{i2\pi\nu\lambda(t-t')}\, d\lambda$$

$$= \delta(\nu - \nu')\, \delta(\nu(t - t'))/|\nu|\,,$$

$$= \delta(\nu - \nu', t - t')\,.$$

5. CONCLUSION

On a montré que la connaissance de la fonction d'ambiguïté en translation ou en compression d'un signal certain complexe $S(t)$ permet de synthétiser la forme du signal, pourvu qu'il existe une date t_0 connue à laquelle la phase du signal est connue. Si l'on sait que le signal $S(t)$ est réel, par exemple, la synthèse est encore plus simple : la relation (17) s'écrit $P(t, \tau) = S(t)\, S(t-\tau)$ et les relations (18) et (19) donnent directement $S(t)$, en remplaçant $|P(t, \tau)|$ par $P(t, \tau)$, et $\rho(t)$ par $S(t)$.

Dans le cas de la synthèse à partir de la fonction d'ambiguïté en compression, celle-ci est elle-même réelle, et là encore on remplace $|S(t_0)|^2$ par $S^2(t_0)$.

On peut donc penser à chercher la *forme du signal (ou son inverse) qui possède une fonction d'ambiguïté d'allure donnée* a priori (cette allure devant être donnée, dans le cas général, sous forme de partie réelle et partie imaginaire, ou module et phase). N'oublions pas que ces fonctions dont on se donne l'allure, doivent évidemment posséder toutes les propriétés de fonction d'ambiguïté (que l'on trouvera par exemple dans [9, 6]). Il est *a priori* plus facile d'imaginer une allure pour une fonction *réelle seulement*, comme dans le cas de la synthèse à partir de la fonction d'ambiguïté en compression : le signal $S(t)$ cherché sera alors évidemment réel.

Dans le cas de la synthèse à partir de la fonction d'ambiguïté en translation, en se donnant une forme adéquate de $|\chi|$ et Arg χ, on synthétisera dans le cas général un signal complexe, $V(t)$ par exemple. Pour utiliser la forme obtenue pour $V(t)$ dans un problème de détection active, on considérera que c'est, comme dans le cas de Woodward, l'amplitude complexe d'un signal analytique associé au signal à émettre. On associera donc une *porteuse* ν_0, quelconque, à $V(t)$ pour obtenir $V(t)\, e^{i2\pi\nu_0 t}$, et le signal réel à émettre est $\mathrm{Re}\{V(t)\, e^{i2\pi\nu_0 t}\}$.

Des applications sont en cours sur ces types de synthèse. Enfin, dans un dernier temps, on a généralisé le problème de la synthèse de la forme d'un signal complexe $S(t)$ à partir d'une fonctionnelle quadratique de celui-ci ; on a donné des conditions suffisantes pour que la synthèse soit possible en passant par l'intermédiaire de la densité spectrale du signal dans le plan temps-fréquence. Dans ce sens-là, il reste par exemple à trouver les opérateurs — autres que ceux étudiés ici — qui satisfont à ces conditions.

Annexe

Compléments sur l'opérateur compression

A-I.1. Opérateur inverse.

C'est le filtre linéaire et non homogène, $\mathcal{C}_\lambda^{-1}$ de réponse impulsionnelle $R_\lambda^{-1}(t, u)$, telle que :

(A-1) $$\int_{\mathbf{R}} R_\lambda^{-1}(t, \theta)\, R_\lambda(\theta, u)\, d\theta = \delta(t-u)\,,$$

(A-2) $$R_\lambda^{-1}(t, u) = \sqrt{\lambda}\, \delta[t - \lambda u]\,.$$

Signaux propres de $\mathcal{C}_\lambda$.

Les *signaux propres* de $\mathcal{C}_\lambda$ sont les $X_p(t)$ tels que :

$\mathcal{C}_\lambda[X_p(t)] = \alpha X_p(t)$, où α est une constante complexe, valeur propre associée à $X_p(t)$.

1. On en déduit de (12) que :

(A-3) $X_p(t) = k\delta(t)$ avec la valeur propre associée $1/\sqrt{\lambda}$.

2. $X_p(t) = k$, constante, est également fonction propre de $\mathcal{C}_\lambda$, avec comme valeur propre associée $1/\sqrt{\lambda}$ (A-4).

On en déduit de (A-3) et (A-4) que :

(A-5) $$\mathcal{C}_\lambda[\mathrm{TF}(\delta)] = [\mathrm{TF}\,(\mathcal{C}_\lambda(\delta))]^{-1},$$

où TF désigne la transformée de Fourier.

On peut encore exprimer (A-5) à l'aide de (A-2) par :

$$\mathcal{C}_\lambda^{-1}[\mathrm{TF}(\delta)] = \mathrm{TF}[\mathcal{C}_\lambda(\delta)]\,.$$

3. Les signaux $S(t) = kt$ sont également fonctions propres, avec la valeur propre associée $\lambda^{3/2}$.

Manuscrit reçu le 17 décembre 1976.

Bibliographie

[1] Bonnet (G.), Garampon (G.), Extension de la notion de fonction d'ambiguité à des signaux aléatoires *Ann. Télécommunic.* Fr., (mai-juin 1968), **23**, n° 5-6, pp. 141-154.

[2] Bonnet (G.). Filtres aléatoires et stationnarisation de signaux périodiques mêlés de bruits. *Ann. Télécommunic.* Fr., (sep-oct. 1968), **23**, n° 9-10, pp. 271-292.

[3] Escudie (B.). Représentation temps fréquence dans l'analyse et la synthèse des signaux. VI[e] *Congrès International de Cybernétique* (1972).

[4] Escudie (B.), Grea (J.). Sur une formulation générale de la représentation en temps et fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie. *C.R. Acad. Sci.* Fr. (8 oct. 1976) **283**, n° 15, pp. 1 049-1 051.

[5] Franks (L. E). Signal theory (Théorie du signal) *Prentice Hall*, London (1969), 317 p.

[6] Jourdain Garampon (G.). Considération sur la fonction d'ambiguïté dans le cas de signaux aléatoires *Thèse de Docteur Ingénieur*, Grenoble (mai 1970).

[7] Jourdain (G.). Filtres linéaires aléatoires et à paramètres variables. *Thèse de Doctorat d'Etat*, Grenoble (sep. 1976).

[8] Page (C. H.). Instantaneous power spectra (Spectre de puissance instantanée). *Appl. Phys.* U.S.A. (1952), **23**, n° 1, pp. 103-106.

[9] Rihaczeck. Principles of high resolution radar (Principes de la radio détection à grande résolution) *McGraw Hill*, New-York (1970), 498 p.

[10] Sussman (S. M.). Lest square synthesis of radar ambiguity functions (Synthèse par les moindres carrés de fonctions d'ambiguïté en radiodétection). The J. H. University (1961), These D. Ingénieur.

[11] Swick (D. A). An ambiguity function independant of assumption, about bandwidth and carrier frequency (Fonction d'ambiguïté indépendante de toute supposition concernant la largeur de bande et la fréquence porteuse). *NRL Report 6471*, U. S. A. (déc. 1969).

[12] Ville (J.). Théorie et application de la notion du signal analytique. *Câble et transmission* Fr. (1948), **2**, n° 1, pp. 61-74.

[13] Woodward (P. W.). Probability and information theory with applications to radar (Théorie des probabilités et théories de l'information). *Pergamon*, G. B. (1953), 128 p.