Recherche

Expression de la dérivée d'un polynôme en fonction des translatés de ce dernier et application à la distribution de Wigner-Ville Polynomiale

Expression of the Derivative of a Polynomial in Terms of its Shifted Versions and Application to the Polynomial Wigner-Ville Distribution

par Messaoud BENIDIR
Univ. Paris-Sud, Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supelec
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France
tel : (1) 69 85 17 17 fax : (1) 69 41 30 60
e-mail : benidir@lss.supelec.fr

Résumé

On propose une représentation d'un polynôme $\phi(t)$ comme une combinaison linéaire des N polynômes $\phi(t-t_k)$ où $t_0, ..., t_N$ sont des paramètres arbitraires. On montre que les coefficients de cette combinaison linéaire sont les mêmes pour tous les polynômes de degré $\leq N$. Ceci permet d'exprimer $\phi(t)$ en fonction de $t, t_0, \ldots, t_N$ et $\phi(t_0), \ldots, \phi(t_N)$. Une représentation similaire de la dérivée ϕ' comme combinaison linéaire des N polynômes $\phi(t-t_k)$, $k = 0, \ldots, N$ est discutée. On démontre en particulier que la dérivée d'un polynôme ϕ de degré $\leq 2q$ est égale à une combinaison linéaire de q taux d'accroissement de ϕ calculés autour de q points arbitraires $\tau_0, \ldots, \tau_q$. Comme applications, on donne quelques extensions des propriétés de la distribution de Wigner-Ville polynomiale proposée dans [2] [3].

Mots clés : Polynôme, Dérivée, Distribution de Wigner-Ville.

Abstract

A representation of a polynomial ϕ is proposed as a linear combination of N polynomials $\phi(t-t_k)$ where $t_0, ..., t_N$ are arbitrary parameters. One establishes that the coefficients appearing in this representation are the same for all the polynomials of degree $\leq N$. This representation allows to express $\phi(t)$ in terms of $t, t_0, \ldots, t_N$ and $\phi(t_0), \ldots, \phi(t_N)$. A similar representation of the derivative $\phi'(t)$ as a linear combination of N polynomials $\phi(t-t_k)$ is discussed. It is shown that the derivative of any polynomial of degree $\leq 2q$ equals a linear combination of q arbitrary increment rates of $\phi(t)$ calculated around q arbitrary points $\tau_0, \ldots, \tau_q$. As applications, one gives some extentions of the properties of the polynomial Wigner-Ville distribution proposed in [2], [3].

Key words : *Polynomial, Derivative, Wigner-Ville distribution.*

1. Introduction

On rencontre souvent des problèmes de traitement du signal où l'on doit calculer la valeur d'un polynôme en un point connaissant seulement les valeurs de ce dernier sur un certains ensemble de points. De même, le calcul de la dérivée d'un polynôme est un problème assez courant dans beaucoup de situations pratiques. Par exemple, les signaux du type $z(t) = e^{j\phi(t)}$ où $\phi(t)$ désigne une phase polynomiale se rencontrent dans le traitement des signaux radar. L'analyse et la détection de tels signaux fait intervenir la notion de la fréquence instantanée (FI) définie par la dérivée du polynôme $\phi(t)$. Signalons que cette définition est utilisée par abus de langage. Ainsi des techniques récentes ont été introduites pour traiter ces signaux. Parmi ces techniques, on peut citer les transformations intégrales [1] et les distributions temps-fréquence de Wigner-Ville polynomiales (WVP) [2], [3]. La définition de la distribution de WVP est fondée sur l'estimation de la dérivée $\phi'(t)$ par une combinaison linéaire des translatés $\phi(t-t_k)$ où les t_k sont des instants fixés. Ce papier a été motivé par la recherche d'une expression exacte de la dérivée d'un polynôme comme combinaison linéaire des translatés $\phi(t-t_k)$. L'expression obtenue pour la dérivée permet d'étendre certaines propriétés de la distribution de WVP proposée dans [2], [3].

2. Représentation des polynômes de degré $\leq N$

Nous commençons par énoncer les résultats préliminaires suivants qui seront utilisés dans la suite de ce papier et dont une démonstration est donnée dans l'Annexe A0

Lemme 1 : *Soient $\mathcal{V}_n(t_0, ..., t_n)$ et $\mathcal{P}_n(t_0, ..., t_n)$ les déterminants définis par :*

$$\mathcal{P}_n(t_0, ..., t_n) \triangleq \det \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ t_0^2 & ... & t_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ t_0^n & ... & t_n^n \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V}_n(t_0, ..., t_n) \triangleq \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ t_0 & t_1 & ... & t_n \\ t_0^2 & t_1^2 & ... & t_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ t_0^{n-1} & t_1^{n-1} & ... & t_n^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Alors, on a :

$$\mathcal{V}_n(t_0, ..., t_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i) \quad (2)$$

et, pour $n \geq 2$,

$$\mathcal{P}_n(t_0, ..., t_n) = \mathcal{V}_n(t_0, ..., t_n)\sigma_n^{n-1}(t_0, ..., t_n) \quad (3)$$

où

$$\sigma_n^{n-1}(t_0, ..., t_n) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \prod_{l \neq k}^{n} t_l, \quad \sigma_0^0 = 1. \quad (4)$$

Nous allons maintenant discuter la décomposition d'un polynôme comme combinaison linéaire de ses translatés sous la forme :

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{Q} \alpha_k \phi(t - t_k), \quad \forall t \quad (5)$$

où $t_0, ..., t_Q$ sont des réels arbitraires fixés.

Comme l'ensemble $\mathcal{R}_N[t]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à N est un espace vectoriel de dimension $N + 1$, la décomposition (5) existe toujours pourvu que l'ensemble $\phi(t - t_k)$, $0 \leq k \leq Q$ engendre l'espace $\mathcal{R}_N[t]$. Mais a priori les coefficients α_k dépendent du polynôme considéré. Il faut noter que la relation (5) est une décomposition particulière dont nous allons démontrer, dans cette section, l'existence et pour laquelle nous allons montrer que les coefficients α_k sont les mêmes pour tous les polynômes de degré $\leq Q$. Pour simplifier la présentation du principal résultat de cette section, nous allons commencer par établir les lemmes 2 et 3 suivants (pour la démonstration du lemme 3 voir l'Annexe A1).

Remarquons tout d'abord que si l'un des t_k est nul, la solution triviale $\alpha_k = 1$ et $\alpha_i = 0$ pour $i \neq k$ conduit à la décomposition triviale $\phi(t) = \phi(t - 0)$ qui n'a aucun intérêt. On écarte donc ce cas trivial en supposant dans cette section que tous les t_k sont non nuls.

Lemme 2 : *Soient $t_0, ..., t_Q$ des réels arbitraires, distincts deux à deux et non nuls. S'il existe un polynôme ϕ_0 de degré N qui vérifie une identité du type :*

$$\phi_0(t) = \sum_{k=0}^{Q} \alpha_k \phi_0(t - t_k), \quad \forall t \quad (6)$$

alors, tous les polynômes de degré $\leq N$ vérifient aussi cette même identité. Sa réciproque est triviale.

Preuve

L'identité (6) entraîne que :

$$\phi_0(t - \tau) = \sum_{k=0}^{Q} \alpha_k \phi_0(t - \tau - t_k), \forall t, \forall \tau. \quad (7)$$

Chacun des polynômes $\phi_j(t) \triangleq \phi_0(t - j)$, $j = 0, \ldots, N$ vérifie donc lui aussi l'identité :

$$\phi_j(t) = \sum_{k=0}^{Q} \alpha_k \phi_j(t - t_k), \forall t. \quad (8)$$

Comme les polynômes $\phi_j, j = 0, \ldots, N$ engendrent $\mathcal{R}_N[t]$, (Voir Annexe A0), tout polynôme ϕ de degré $\leq N$ s'écrit sous la forme :

$$\phi(t) = \sum_{j=0}^{N} c_j \phi_j(t). \quad (9)$$

Soit

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{j=0}^{N} c_j \left[\sum_{k=0}^{Q} \alpha_k \phi_j(t - t_k)\right] \quad (10) \\ &= \sum_{k=0}^{Q} \alpha_k \left[\sum_{j=0}^{N} c_j \phi_j(t - t_k)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{Q} \alpha_k \phi(t - t_k). \quad (11) \end{aligned}$$

Cqfd

Lemme 3 : *Considérons le système $S_{Q,N}$ de Van der Monde suivant associé aux réels $t_0, ..., t_Q$ supposés distincts deux à deux et non nuls*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_Q \\ t_0^2 & t_1^2 & \dots & t_Q^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ t_0^N & t_1^N & \dots & t_Q^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Alors, on a les résultats suivants.
1. Le système $S_{Q,N}$ admet une solution ssi $N \leq Q$.
2. Cette solution est unique ssi $Q = N$. Dans ce cas, elle sera notée α^N et ses composantes α_k^N sont toutes différentes de zéro et ont pour expression :

$$\alpha_k^N = \frac{1}{\prod_{i\neq k}^N (1 - \frac{t_k}{t_i})}, \quad k = 0, ..., N. \tag{13}$$

On peut noter que si l'un des t_k est nul, la colonne définie par ce t_k dans la matrice du système (12) est identique à celle du second membre. Dans ce cas, le système admet toujours comme solution $\alpha_k = 1$ et $\alpha_i = 0$ pour $i \neq k$. Ce point correspond au cas de la décomposition triviale que nous avons écartée.

Proposition 1 : *Soient $t_0, ..., t_Q$ des réels arbitraires, distincts deux à deux et non nuls et α^N la solution du système carré $S_{N,N}$ défini par (12) où $Q = N$. Alors, tous les polynômes de degré $\leq N$ vérifient l'identité (5) où $\alpha = \alpha^N$ et cette identité est minimale pour les polynômes de degré N, i.e., aucun polynôme de degré $> N$ ne vérifie une identité analogue à (5) et comportant au plus $N + 1$ termes.*

Preuve

D'après le Lemme 2, il suffit de chercher les conditions sur les α_k pour que le polynôme $\phi_0(t) \triangleq t^N$ vérifie l'identité (5). Ces conditions s'obtiennent en exprimant que les deux polynômes t^N et $\sum_{k=0}^Q \alpha_k (t - t_k)^N$ sont identiques. Ceci équivaut à écrire que les dérivées d'ordre $i = 0, \dots, N$ de ces deux polynômes sont égales en un point t fixé, par exemple $t = 0$. Un calcul simple montre que les α_k sont nécessairement solution du système $S_{Q,N}$ de Van der Moonde introduit par (12). La suite de la démonstration se déduit immédiatement du Lemme 3 qui donne une discussion de l'existence de la solution du système $S_{Q,N}$.

Cqfd

2.1. EXEMPLES ET APPLICATIONS

Symétrie

D'après la structure du système (13), si l'on remplace les t_k par τt_k, τ réel quelconque fixé, les α_k restent inchangés.

Calcul récursif

Partant de (13), il est facile d'établir que les composantes de α^N et α^{N+1} sont reliées par les relations de récurrence suivantes :

$$\alpha_k^{N+1} = \alpha_k^N \frac{1}{1 - \frac{t_k}{t_{N+1}}}, k = 0, ..., N \tag{14}$$

et

$$\alpha_{N+1}^{N+1} = \frac{1}{\prod_{i=0}^N (1 - \frac{t_{N+1}}{t_i})}. \tag{15}$$

Ces relations permettent de calculer, récursivement sur N, les composantes de α^{N+1} à partir de celles de α^N.

Exemple 1 : Si l'on prend $t_k = k + 1, k = 0, \dots, N$, les α_k^N sont données par :

$$\alpha_k^N = (-1)^k C_{N+1}^{k+1}, k = 0, \dots, N \tag{16}$$

où C_N^k désigne le nombre de combinaisons de N objets pris k à k.

Changement d'un paramètre t_k

Il est intéressant de voir comment se transforment les α_k^N lorsqu'on modifie l'un des paramètres t_k. Comme l'ordre des paramètres ne joue aucun rôle dans la décomposition (5), sans perte de généralité, il suffit de considérer le cas suivant. Appelons $\alpha_0^N, ..., \alpha_N^N$ les coefficients associés à $t_0, ..., t_N$ et $a_0^N, ..., a_N^N$ ceux associés à $t_1, ..., t_{N+1}$. Tenant compte des expressions (13), un calcul simple montre que les a_k^N se déduisent des α_k^N et de t_{N+1} à l'aide des relations suivantes :

$$a_k^N = \alpha_{k+1}^N \frac{1 - \frac{t_{k+1}}{t_0}}{1 - \frac{t_{k+1}}{t_{N+1}}}, k = 0, ..., N-1 \tag{17}$$

$$a_N^N = \frac{1}{\prod_{i=0}^N (1 - \frac{t_{N+1}}{t_i})}. \tag{18}$$

Valeur d'un polynôme en un point

La valeur du polynôme ϕ de degré $\leq N$ en un point arbitraire t_{N+1} est donnée explicitement en fonction des $\phi(t_k)$, $k = 0, ..., N-1$, par :

$$\phi(t_{N+1}) = \frac{1}{\alpha_{N+1}^{N+1}} \sum_{k=0}^N \frac{\alpha_k^N}{1 - \frac{t_{N+1}}{t_k}} \phi(t_k). \tag{19}$$

En effet, pour établir (19), on va décomposer $\phi(t)$ de deux manières différentes en faisant intervenir les α_k^N et les a_k^N introduits ci-dessus. On obtient :

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_{k=0}^{N} \alpha_k^N \phi(t-t_k) \qquad (20)\\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k^N \phi(t-t_{k+1})\\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k^N \phi(t-t_{k+1}) + a_N^N \phi(t-t_{N+1})\\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1}^N \frac{1-\frac{t_{k+1}}{t_0}}{1-\frac{t_{k+1}}{t_{N+1}}} \phi(t-t_{1+k}) + a_N^N \phi(t-t_{N+1}).\end{aligned}$$

Faisant la différence entre la première et la dernière égalité apparaissant ci-dessus et tenant compte de (17), on obtient :

$$\alpha_0^N \phi(t-t_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1}^N [1 - \frac{1-\frac{t_{k+1}}{t_0}}{1-\frac{t_{k+1}}{t_{N+1}}}] \phi(t-t_{k+1}) = a_N^N \phi(t-t_{N+1}). \qquad (21)$$

Tenant compte de (18), il vient :

$$\phi(t-t_{N+1}) = \frac{1}{\alpha_{N+1}^{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha_k^N}{1-\frac{t_{N+1}}{t_k}} \phi(t-t_k). \qquad (22)$$

Finalement, prenant $t = 0$ et remplaçant tous les t_i par leurs opposés $-t_i$, on obtient (19) puisque α_{N+1}^{N+1} et les α_k^N restent inchangés dans cette transformation.

2.2. LIENS AVEC QUELQUES RÉSULATS CLASSIQUES

Polynomes d'interpolation de Lagrange

Si l'on remplace dans (19) α_{N+1}^{N+1} par son expression, t_{N+1} par τ et si l'on pose :

$$L_k^N(\tau) \triangleq \alpha_k^N \prod_{0 \le i \ne k < N} (1 - \frac{\tau}{t_i}), \quad k = 0, \ldots, Q \qquad (23)$$

on obtient :

$$\phi(\tau) = \sum_{k=0}^{N} \phi(t_k) L_k^N(\tau). \qquad (24)$$

Les polynômes L_k^N définis par la relation (23) sont connus sous la dénomination de polynômes d'interpolation de Lagrange [4] et les paramètres α_k^N intervenant dans ces polynômes sont des fonctions explicites des réels $t_k, k = 0, \ldots, N$ et sont évidemment indépendants de τ.

Exemple 2 : Si l'on prend $t_k = k+1$, $k = 0, \ldots, N$ et l'on tient compte des valeurs des α_k^N calculées dans l'Exemple 1, la relation (19) donne :

$$\phi(t_{N+1}) = \frac{1}{\alpha_{N+1}^{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{1-\frac{t_{N+1}}{t_k}} C_{N+1}^{k+1} \phi(t_k). \qquad (25)$$

Se plaçant, par exemple, dans le cas particulier $\phi(t) = t^n$ avec $n \le N$, on obtient :

$$t_{N+1}^n = \frac{1}{\alpha_{N+1}^{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{1-\frac{t_{N+1}}{t_k}} C_{N+1}^{k+1} (k+1)^n. \qquad (26)$$

Opérateur différence

On peut aussi établir des liens entre les résultats de cette section et la propriété suivante sur les opérateurs différence n-ième. On appelle différence première d'une fonction φ de pas h fixé une fonction

$$\Delta\varphi(t) \triangleq \varphi(t+h) - \varphi(t).$$

On définit ensuite la différence n-ième par $\Delta^{(n)}\varphi = \Delta(\Delta^{(n-1)}\varphi)$.

On peut alors établir le résultat suivant classique en mathématique :

On a $\Delta^{(N)}\varphi = 0$ si, et seulement si, $\varphi(t+hk)$ est un polynôme de degré N en la variable entière k.

On peut développer l'expression $\Delta^{(N)}\varphi$ et comparer avec les résultats de cette section.

3. Décomposition de la dérivée d'un polynôme

3.1. UNE DÉCOMPOSITION GÉNÉRALE

Dans la section précédente, on a établi une identité vérifiée par tout polynôme de degré $\le N$. Dans cette section, nous allons suivre la même démarche que dans la section précédente pour établir et discuter la décomposition de la dérivée d'un polynôme $\phi(t)$ sous la forme

$$\phi'(t) = \sum_{k=0}^{Q} \beta_k \phi(t-t_k). \qquad (27)$$

Cette décomposition est analogue à (5) et avant de l'étudier, nous commençons par établir les deux lemmes suivants.

Lemme 4 : *Soient $t_0, \ldots, t_Q$ des réels arbitraires, distincts deux à deux. S'il existe un polynôme ϕ_0 de degré N qui vérifie une identité du type :*

$$\phi_0'(t) = \sum_{k=0}^{Q} \beta_k \phi_0(t - t_k), \quad \forall t \tag{28}$$

alors, tous les polynômes de degré $\leq N$ vérifient aussi cette même identité. La réciproque est triviale.

La démonstration de ce résultat s'obtient en suivant la même démarche que celle utilisée dans la preuve du Lemme 2.

Corollaire 1 : *Un polynôme ϕ vérifie l'identité (28) si, et seulement si, il vérifie l'identité suivante :*

$$\tau\phi'(t) = \sum_{k=0}^{Q} \beta_k \phi(t - \tau t_k), \quad \forall\tau, \forall t \tag{29}$$

Preuve

Faisant $\tau = 1$ dans (29), on obtient (28). Réciproquement, supposons qu'il existe un polynôme ϕ_0 vérifiant (28). Alors, l'identification des termes de plus haut degré dans (28) conduit à $\sum_{k=0}^{Q} \beta_k = 0$ et donc (29) est vérifiée pour $\tau = 0$. Supposons alors $\tau \neq 0$ et introduisons le polynôme $\psi(x) = \phi(\tau x)$. D'après le Lemme 4, le polynôme ψ vérifie (28). Comme $\psi'(x) = \tau\phi'(\tau x)$, on obtient :

$$\tau\phi'(\tau x) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k \phi[\tau(x - t_k)] \quad \forall\tau, \forall t. \tag{30}$$

Finalement, posant $t = \tau x$, on voit que ϕ vérifie (29).

Cqfd

Le lemme suivant, dont une démonstration est donnée dans l'Annexe A2, va nous permettre de discuter l'existence et l'unicité de la décomposition (27) ainsi que le calcul des coefficients apparaissant dans cette décomposition.

Lemme 5 : *Considérons le système $S'_{Q,N}$ de Van der Monde suivant associé aux réels $t_0, ..., t_Q$ supposés distincts deux à deux.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_Q \\ t_0^2 & t_1^2 & \dots & t_Q^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ t_0^N & t_1^N & \dots & t_Q^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Alors on a les 4 situations suivantes pour la solution de ce système.

1. Si $N < Q$, le système est indéterminé et admet une infinité de solutions.

2. Si $N = Q$, le système est carré et admet une solution unique donnée par :

$$\beta_k^N = (-1)^N \frac{\sum_{j\neq k}^{N} \prod_{i\neq j,k} t_i}{\prod_{i\neq k}(t_k - t_i)}, \quad k = 0, ..., N. \tag{32}$$

3. Si $N = Q + 1$, le système admet une solution si, et seulement si, les réels $t_0, ..., t_Q$ sont tous non nuls et vérifient la condition

$$\sum_{k=0}^{Q} \frac{1}{t_k} = 0. \tag{33}$$

La solution est alors unique et elle est donnée par :

$$\beta_k^{N-1} = \frac{-1}{t_k \prod_{i\neq k}^{N-1}(1 - \frac{t_k}{t_i})}, \quad k = 0, ..., N - 1. \tag{34}$$

4. Si $N > Q + 1$, quel que soit le choix des t_k non nuls, le système est impossible.

Corollaire 2 : *Considérons les deux cas $N = Q$ et $N = Q + 1$ où le système ci-dessus admet une solution unique et supposons que $t_0, ..., t_{N-1}$ vérifient la condition (33) et que t_N est quelconque. Alors, les solutions β_k^N et β^{N-1} sont reliée par :*

$$\beta_k^N = \beta_k^{N-1}, \quad k = 1, ..., N - 1, \quad \text{et} \quad \beta_N^N = 0. \tag{35}$$

Preuve

Dans le cas $N = Q + 1$, les β_k^{N-1} sont tous non nuls et s'expriment de manière unique par (34). Dans le cas $N = Q$, comme par hypothèse $t_0, ..., t_{N-1}$ vérifient la condition (33), on peut simplifier l'expression (32). Pour cela, on va distinguer les deux situations $t_N = 0$ et $t_N \neq 0$ et utiliser les expressions détaillées données dans la remarque de l'Annexe A2. On obtient :

1. Pour $t_N = 0$

$$\beta_k^N = \beta_k^{N-1}, \quad k = 1, ..., N - 1, \quad \text{et} \quad \beta_N^N = 0. \tag{36}$$

2. Pour $t_N \neq 0$

$$\beta_k^N = \frac{-t_k^{-1} + \sum_{i=0}^{N} t_i^{-1}}{\prod_{0\neq k}^{N}(1 - \frac{t_k}{t_i})} = \frac{-t_k^{-1} + t_N^{-1}}{\prod_{0\neq k}^{N}(1 - \frac{t_k}{t_i})}, \quad k = 1, ..., N \tag{37}$$

On a donc $\beta_N^N = 0$ et un calcul simple montre que $\beta_k^N = \beta_k^{N-1}$, $k = 1, ..., N - 1$. Donc les β_k^N sont indépendants de t_N.

Cqfd

Le lemme et le corollaire ci-dessus vont nous permettre d'établir la proposition suivante qui constitue le deuxième résultat de ce papier.

Proposition 2 : *Soient $t_0, ..., t_{N-1}$ des réels arbitraires non nuls, distincts deux à deux et vérifiant la condition (33), et soient β_k^{N-1}, $k = 0, ..., N - 1$, les coefficients donnés par (34). Alors, tous les polynômes de degré $\leq N$ vérifient l'identité suivante :*

$$\tau\phi'(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k^{N-1} \phi(t - t_k\tau), \quad \forall t, \quad \forall\tau \tag{38}$$

et aucun polynôme de degré $>N$ ne peut vérifier une identité analogue à (38) et comportant au plus N termes.

La démonstration est similaire à celle utilisée pour établir la Proposition 1. Il suffit de remplacer les Lemmes 2 et 3 par les Lemmes 4 et 5 et d'utiliser le Corollaire 2.

Remarque 1
Les coefficients β_k^{N-1} apparaissant dans (38) sont solution du système (31). D'après la structure de ce système, il est clair que si l'on remplace les t_k par τt_k, alors les β_k^{N-1} sont remplacés par $\frac{\beta_k^{N-1}}{\tau}$. Ceci permet de retrouver, d'une autre manière, le résultat du Corollaire 1.

3.2. UNE DÉCOMPOSITION PARTICULIÈRE

Afin de particulariser la relation (38) pour obtenir une décomposition de la dérivée sous forme d'une somme de taux d'accroissement de $\phi(t)$ du type :

$$\Delta\phi(t) \triangleq \frac{\phi(t+t_k\tau)-\phi(t-t_k\tau)}{\tau} \qquad (39)$$

on doit choisir un nombre de paramètres t_k pair $Q+1=2q$. Les q premiers paramètres $t_0,\ldots,t_{q-1}$ sont choisis distincts et non nuls et les q autres $t_q,\ldots,t_{2q-1}$ sont déterminés par les relations de symétrie suivantes :

$$t_{q+k}=-t_k, k=0,\ldots,q-1. \qquad (40)$$

Pour que ces $2q$ paramètres soient deux à deux distincts, on doit imposer la condition $t_i^2\neq t_j^2$ pour $i\neq j$. Il est clair que les $2q$ paramètres t_k ainsi choisis vérifient la conditions (33). On va donc pouvoir énoncer la proposition suivante, analogue à la Proposition 2, et qui constitue le troisième résultat de ce papier. L'énoncé ne fera intervenir que les q paramètres $t_0,\ldots,t_{q-1}$ puisque les q autres sont obtenus par changement de signe.

Proposition 3 : *Soient $t_0,\ldots,t_{q-1}$ des réels non nuls vérifiant $t_i^2\neq t_j^2$ pour $i\neq j$. Alors tout polynôme de degré $\leq 2q$ est égal à la combinaison linéaire de q taux d'accroissement arbitraires définie par :*

$$\phi'(t)=\sum_{k=0}^{q-1}\gamma_k\,\frac{\phi(t+t_k\tau)-\phi(t-t_k\tau)}{\tau}, \quad \forall t, \quad \forall\tau \qquad (41)$$

où les γ_k sont donnés par :

$$\gamma_k=\frac{1}{2t_k\prod_{0\leq i\neq k}^{q}(1-\frac{t_k^2}{t_i^2})} \quad k=0,...,q-1. \qquad (42)$$

Aucun polynôme de degré $>2q$ ne peut vérifier une identité analogue à (41) et contenant au plus q termes.

Preuve
On utilise les résultats de la Proposition 2. Si N est impair, on prend $Q=N$ et si N est pair, on prend $Q=N-1$. On pose dans les deux cas $Q+1=2q$ et le nombre q est donc égal à la partie entière de $\frac{N+1}{2}$. Les paramètres γ_k sont donnés par les expressions (32) ou (34) suivant le cas où l'on se trouve. Tenant compte de l'hypothèse (40) sur la symétrie des t_k, un calcul simple conduit aux expressions (42) des γ_k.

Cqfd

3.3. EXEMPLES

Relation de récurrence
Soient γ_k^{q-1}, $k=0,\ldots,q-1$ les coefficients déduits de $t_0,\ldots,t_{q-1}$ à l'aide de (42) et γ_k^q, $k=0,\ldots,q$ ceux associés à $t_0,\ldots,t_q$. Comme pour la décomposition d'un polynôme, partant des expressions (42), on établit facilement les récurrences suivantes sur q :

$$\gamma_q^q=\frac{1}{2t_q\prod_{i=0}^{q-1}(1-\frac{t_q^2}{t_i^2})} \qquad (43)$$

et

$$\gamma_k^q=\gamma_k^{q-1}\frac{1}{(1-\frac{t_k^2}{t_q^2})} \quad k=0,...,q-1. \qquad (44)$$

Pour le calcul des coefficients γ_k de la décomposition (41), on peut donc, soit utiliser la relation (42), soit utiliser les relations de récurrence (43) et (44).

Exemple 3 : Prenons $\phi(t)=t^2$. On a $N=2$ et donc $q=1$. Si l'on prend $t_0=a$, on obtient :

$$\phi'(t)=\frac{1}{2a}[\phi(t+a)-\phi(t-a)]. \qquad (45)$$

Exemple 4 : Prenons $\phi(t)=t^3$. On a $N=3$ et donc $q=2$. Si l'on prend $t_0=a$ et $t_1=b$, on obtient :

$$\begin{aligned}\phi'(t)=&\frac{b^2}{2a(b^2-a^2)}[\phi(t+a)-\phi(t-a)]\\&+\frac{a^2}{2b(a^2-b^2)}[\phi(t+b)-\phi(t-b)].\end{aligned} \qquad (46)$$

On peut vérifier que pour $N=4$, on obtient la même décomposition qui est valable pour tous les polynômes de degré ≤ 4. D'une manière générale, on détermine la décomposition pour N pair et elle est valable pour tous les degrés $\leq N$ et non valable pour tout polynôme de degré $>N$.

Exemple 5 : Prenons $N=6$. Dans ce cas, on choisit $q=3$ et si l'on prend $t_k=\frac{k+1}{3}$, on obtient :

$$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (\frac{9}{4}, \frac{-9}{20}, \frac{1}{20}). \tag{47}$$

La dérivée de tout polynôme de degré ≤ 6 se décompose alors comme suit :

$$\phi'(t) = \frac{-9}{4}[\phi(t - \frac{1}{3}) - \phi(t + \frac{1}{3})] + \frac{9}{20}[\phi(t - \frac{2}{3}) - \phi(t + \frac{2}{3})] - \frac{1}{20}[\phi(t-1) - \phi(t+1)] \tag{48}$$

Si l'on remplace les t_k par $\frac{t_k}{20}$, on obtient :

$$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (45, -9, 1). \tag{49}$$

Il est intéressant de savoir comment se modifient les γ_k lorsqu'on modifie l'un des paramètres t_k. On peut établir facilement des relations analogues aux relations (17) et (18) données dans le cas de la décomposition d'un polynôme.

4. Applications : Distribution de Wigner-Ville polynomiale

L'identité (41) permet de justifier la définition suivante de la distribution de Wigner-Ville polynomiale qui est une variante de celles proposées dans [2], [3].

Définition 1 : La distribution de Wigner-Ville polynomiale d'ordre q d'un signal $z(t)$ est la transformée de Fourier par rapport à τ du noyau défini par :

$$K_{q,z}(t,\tau) = \prod_{k=0}^{q-1} [z(t + t_k\tau) z^*(t - t_k\tau)]^{\gamma_k} \tag{50}$$

soit

$$W_{q,z}(t,\nu) \triangleq \int K_{q,z}(t,\tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau \tag{51}$$

où les γ_k sont donnés par les relations (42)

La distribution ainsi définie est donc égale au produit de convolution suivant :

$$W_{q,z}(t,\tau) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{q-1} t_k} W_z^{(\gamma_k)}(t, \frac{\nu}{t_0}) * \ldots * W_z^{(\gamma_q)}(t, \frac{\nu}{t_k}) \tag{52}$$

où

$$W_z^{(\gamma_k)}(t,\nu) \triangleq \int [z(t+\tau) z^*(t-\tau)]^{\gamma_k} e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau. \tag{53}$$

La version discrète de la distribution polynômiale $W_{q,z}(t,\nu)$ pour les signaux à temps discret est obtenue en prenant la transformée de Fourier à temps discret du noyau discret $K_z(n,m)$ défini par :

$$K_z(n,m) \triangleq \prod_{k=0}^{q-1} [z(n + t_k m) z^*(n - t_k m)]^{\gamma_k}. \tag{54}$$

On obtient donc

$$W_{q,z}(n,\nu) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_z(n,m) e^{-j2\pi\nu m}. \tag{55}$$

Cette version discrète conduit à l'implantation numérique de la distribution polynômiale $W_{q,z}(t,\nu)$ qui ne sera pas discutée dans ce papier.

La distribution $W_{q,z}(t,\nu)$ possède des propriétés pratiques intéressantes qui sont proposées dans [2], [3]. Dans ce papier, on se limite à appliquer les résultats de la section précédente pour établir la propriété fondamentale suivante déjà énoncée, en partie, dans [3].

Proposition 4 : *Considérons le signal déterministe défini par :*

$$z(t) = e^{j2\pi\phi(t)}. \tag{56}$$

où $\phi(t)$ est une phase polynomiale. Alors si $\phi(t)$ est de degré $\leq 2q$, on a :

$$W_{q,z}(t,\nu) = \delta[\nu - \phi'(t)]. \tag{57}$$

Preuve

Pour un signal $z(t)$ donné par (56), la Proposition 3 montre que le noyau $K_{q,z}(t,\tau)$ prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} K_{q,z}(t,\tau) &= \exp\left\{ j2\pi \sum_{k=0}^{q-1} \gamma_k [\phi(t + t_k\tau) - \phi(t - t_k\tau)] \right\} \\ &= \exp\{j2\pi\tau\phi'(t)\}. \end{aligned} \tag{58}$$

La distribution $W_{q,z}(t,\nu)$ est la tansformée de Fourier par rapport à τ de ce noyau. Elle est donc donnée par (57).

Cqfd

La distribution de Wigner-Ville polynomiale $W_{q,z}(t,\nu)$ des signaux de la forme (56) assure donc une concentration optimale de l'énergie du signal $z(t)$ autour du graphe de la fréquence instantanée $\phi'(t)$ lorsque le degré du polynôme $\phi(t)$ est $\leq 2q$. La distribution polynômiale ainsi définie généralise la distribution classique de Wigner-Ville dans le sens où cette dernière est aussi concentrée sur le graphe de la fréquence instantanée pour les polynômes de degré ≤ 2. Rappelons que le terme fréquence instantané est utilisé par abus de tangage.

Les coefficients γ_k sont des fractions rationnelles des t_k. Théoriquement, les γ_k ne sont donc pas des entiers et cela pose un problème lorsqu'on doit calculer numériquement la distribution. On peut, cependant, choisir des t_k rationnels et utiliser la Remarque 1 pour obtenir des γ_k entiers. Mais l'Exemple 5 montre que cette technique peut conduire à des γ_k à valeurs entières mais assez importantes. Il serait plus intéressant d'envisager la résolution du problème inverse qui consiste à se donner des γ_k entiers et à déterminer les t_k tels que les relations (42) soient vérifiées. Ce point n'est pas considéré dans ce travail. Signalons aussi que le choix d'exposants entiers dans le noyau $K_{q,z}(t,\nu)$ permet d'établir un lien entre la distibution polynomiale définie ci-dessus et les distributions temps-fréquence d'ordre supérieur à 2 introduites dans [2].

5. Conclusion

On a proposé une représentation de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à N à l'aide de $N+1$ paramètres arbitraires $t_k, k=0,\ldots,N$. Une représentation analogue pour la dérivée est largement discutée et les résultats obtenus ont permi, en particulier, de discuter certains points concernant la distribution de Wigner-Ville polynomiale introduite dans [2], [3]. Comme perspectives, on s'intéresse, en particulier, à la détermination du degré de la phase polynomiale ϕ à partir de la distribution polynômiale associée au signal bruité $z(t) = e^{j\phi(t)} + b(t)$.

6. Annexe

ANNEXE A.0

Nous donnons ici une démonstration du Lemme 1 et une démonstration du résultat classique suivant.

Propriété 0 : Si ϕ est un polynôme de degré N, alors les N polynômes $\phi(t-t_k), k=0,\ldots,N$ engendrent l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq N$ pourvu que les t_k soient distincts deux à deux.

Preuve de la Propriété 0

Considérons l'identité

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \phi(t-t_k) = 0. \tag{59}$$

Cette identité, qui signifie que le polynôme introduit par le membre de gauche est identiquement nul équivaut à dire que les dérivées d'ordre $j=0,\ldots,N$ sont nulles en un point fixé par exemple $t=0$. Intoduisons les coefficients du polynôme ϕ. On obtient

$$\phi(t) \triangleq \sum_{i=0}^{N} a_i t^i \tag{60}$$

$$\phi^{(j)}(t) \triangleq \sum_{i=j}^{N} a_i t^{i-j} \tag{61}$$

$$\phi^{(j)}(t-t_k) \triangleq \sum_{i=j}^{N} a_i (t-t_k)^{i-j} \tag{62}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \left[\sum_{i=j}^{N} a_i (t-t_k)^{i-j} \right] = 0. \tag{63}$$

Soit

$$\sum_{i=j}^{N} a_i \left[\sum_{k=0}^{N} \alpha_k (-t_k)^{i-j} \right] = 0, \quad \text{Pour } j=0,\ldots,N. \tag{64}$$

Cas $j = N$: L'équation se ramène à la condition :

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k = 0. \tag{65}$$

Cas $j = N-1$: Tenant compte de la condition ci-dessus, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k t_k = 0. \tag{66}$$

Raisonnons de proche en proche ou par récurrence sur j, on démontre que les α_k doivent vérifier nécessairement le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_0 & t_1 & \ldots & t_Q \\ t_0^2 & t_1^2 & \ldots & t_Q^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ t_0^N & t_1^N & \ldots & t_Q^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

On a donc un système homogène dont le déterminant est non nul. Il admet donc une solution unique et par suite les polynômes forment un système libre.

Preuve du Lemme 1

On peut montrer facilement par récurrence la relation (78). Pour démontrer la relation (42), on va considérer les déterminants $\mathcal{P}_n(t_0,...,t_n)$ et $\mathcal{V}_n$ comme polynômes en t_0 de degrés respectifs n et $n-1$ et on utilisera aussi la relation de récurrence suivante qui découle directement de la définition (4) :

$$\sigma_n^{n-1}(t_0,...,t_n) = t_0\sigma_{n-1}^{n-2}(t_1,...,t_n) + \prod_{k=1}^{n} t_k \qquad (68)$$

Nous allons démontrer (3) en procédant par récurrence sur n. Pour $n = 2$, la propriété est vérifiée. En effet, nous avons $\mathcal{P}_1(a,b) = b^2 - a^2$, $\mathcal{V}_1(a,b) = b - a$ et $\sigma_1^1(a,b) = a + b$. Supposons, par hypothèse de récurrence, que la propriété (3) est vérifiée pour $n - 1$ et calculons $\mathcal{P}_n(t_0,...,t_n)$. Le déterminant $\mathcal{P}_n(t_0,...,t_n)$ est un polynôme de degré n en t_0 pour lequel on connait :

1. $n-1$ racines $t_1,...,t_n$
2. le coefficient constant :

$$a_0 \triangleq \left(\prod_{i=0}^{n} t_i\right)^2 \mathcal{V}_{n-1}(t_1,...,t_n) \qquad (69)$$

3. le coefficient du monôme de degré n :

$$a_n \triangleq (-1)^{n-1}\mathcal{P}_{n-1}(t_1,...,t_n). \qquad (70)$$

Comme le produit des n racines est donné par :

$$\pi_n \triangleq \frac{(-1)^n a_0}{a_n} \qquad (71)$$

la racine inconnue vaut :

$$\rho_n = \frac{\pi_n}{\prod_{i=0}^n t_i} = \frac{(-1)^n a_0}{a_n \prod_{i=0}^n t_i} = -\frac{\left(\prod_{i=0}^n t_i\right)\mathcal{V}_{n-1}(t_1,...,t_n)}{\mathcal{P}_{n-1}(t_1,...,t_n)}. \qquad (72)$$

Le polynôme $\mathcal{P}_n$ peut donc s'écrire sous la forme factorisée suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(t_0,...,t_n) &= a_n(t_0-t_1)...(t_0-t_n)(t_0-\rho_n)\\ &= (-1)^{n-1}(t_0-t_1)...(t_0-t_n)\\ &\left[t_0\mathcal{P}_{n-1}(t_1,...,t_n) + \mathcal{V}_{n-1}(t_1,...,t_n)\prod_{i=0}^{n} t_i\right].\end{aligned}$$

Si l'on remplace dans cette relation $\mathcal{P}_{n-1}(t_1,...,t_n)$ par son expression donnée par l'hypothèse de récurrence (3) où l'on sibstitue $n-1$ à n, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(t_0,...,t_n) &= (-1)^{n-1}(t_0-t_1)...(t_0-t_n)\mathcal{V}_{n-1}(t_1,...,t_n)\\ &\cdot\left[\sigma_{n-1}^{n-2}(t_1,...,t_n)t_0 + \prod_{k=1}^{n} t_k\right]\\ &= (t_0-t_1)...(t_0-t_n)\mathcal{V}_{n-1}(t_1,...,t_n)\\ &\sigma_n^{n-1}(t_0,...,t_n). \qquad (73)\end{aligned}$$

Or le polynôme $\mathcal{V}_n$ admet $t_1,...,t_n$ comme racines et son cœfficient du terme de plus haut degré est $(-1)^{n-1}$, soit :

$$\mathcal{V}_n(t_0,...,t_n) = (t_0-t_1)...(t_0-t_n)\mathcal{V}_{n-1}(t_1,...,t_n). \qquad (74)$$

Tenant compte de ce résultat, la relation (64) donne (3). On peut donner une démonstration plus courte en développant $\mathcal{V}_n$ par rapport à sa deuxième lignes et en faisant intervenir les polynômes symétriques élémentaires.

ANNEXE A.1 : PREUVE DU LEMME 3

Le système (12) admet une solution *ssi* la colonne du second membre appartient à l'espace engendré par les colonnes de la matrice du système. Comme les colonnes construites par les puissances des paramètres $t_0,\ldots,t_Q$ forment une matrice de Van der Monde et que tous ces paramètres sont deux à deux distincts, il est facile de voir que la solution existe si, et seulement si, $Q \geq N$. Dans le cas $Q = N$, le système est carré et son déterminant est non nul. Il admet donc une solution unique. Pour montrer que chacun des α_i^N est non nul, raisonnons par l'absurde en supposant $\alpha_k^N = 0$ pour un certain k. La suppression de la colonne formée par les puissances de t_k conduit à un système pour lequel on a $Q = N - 1$ et qui admet une solution. Ceci contredit le résultat précédent et donc toutes les composantes de la solution unique sont différentes de zéro. Les expressions des α_k^N s'obtiennent en appliquant la formule des déterminants de Cramer. On obtient :

$$\begin{aligned}\alpha_k^N &= \frac{\mathcal{V}_Q(t_0,...,t_{k-1},1,t_{k+1},...,t_Q)}{\mathcal{V}_Q(t_0,...,t_Q)} \qquad (75)\\ &= (-1)^{k+1}\frac{\mathcal{V}_{Q-1}(t_0,...,t_{k-1},t_{k+1},...,t_Q)}{\mathcal{V}_Q(t_0,...,t_Q)}\prod_{i\neq k}^{N} t_i.\end{aligned}$$

Un calcul simple conduit aux expressions des α_k^N et les relations (13) se déduisent immédiatement de ces expressions.

ANNEXE A.2 : PREUVE DU LEMME 5

Cas 1 : $N < Q$. Le système (31) admet une infinité de solutions. Considèrons le cas $Q = N + 1$, on peut fixer arbitrairement une des inconnues β_k. Si l'on choisit par exemple $\beta_{k_0} = 0$, on se ramène au cas $Q = N$ d'un système carré.

Cas 2 : $N = Q$
Le système (31) est carrée et sa solution est donnée par la méthode des déterminants de Cramer. On obtient :

$$\beta_k = (-1)^{k+1}\frac{\mathcal{P}_{N-1}(t_{l\neq k})}{\mathcal{V}_N(t_0,...,t_N)}, \quad k = 0,...,N \qquad (76)$$

où $\mathcal{P}_{N-1}(t_{l\neq k}) \triangleq \mathcal{P}_{N-1}(t_0,...,t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_N)$ désigne le déterminant d'ordre N formé à partir de $t_0,...,t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_N$. Tenant compte de (3), on obtient :

$$\begin{aligned}\beta_k &= (-1)^{k+1}\frac{\mathcal{V}_{N-1}(t_{l\neq k})(\sum_{j=1}^N \prod_{i\neq j} t_i)}{\mathcal{V}_Q(t_0,...,t_Q)} \qquad (77)\\ &= (-1)^N \frac{\sum_{j\neq k}^N \prod_{i\neq(j,k)} t_i}{\prod_{i\neq k}(t_k - t_i)}, \quad k = 0,...,Q\end{aligned}$$

qui n'est autre chose que (32).

Cas 3 : $N = Q+1$

Le système (31) contient N inconnues et $N+1$ équations. Il admet donc une solution si, et seulement si, le vecteur du second membre appartient à l'espace engendré par les colonnes de la matrice du système. Cette condition se traduit par :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ t_0 & \dots & t_Q & -1 \\ t_0^2 & \dots & t_Q^2 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ t_0^Q & \dots & t_N^Q & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{P}_Q(t_0, ..., t_Q) = 0. \qquad (78)$$

D'après la relation (3) du Lemme 1, cette condition se traduit par :

$$\mathcal{V}_Q(t_0, ..., t_Q) \sum_{k=0}^{Q} \prod_{l \neq k}^{Q} t_l = 0. \qquad (79)$$

Comme $\mathcal{V}_Q(t_0, ..., t_Q) \neq 0$, la condition équivaut à :

$$\sum_{k=0}^{Q} \prod_{l \neq k}^{Q} t_l = 0. \qquad (80)$$

Les t_k étant distincts deux à deux, la condition ci-dessus équivaut à dire que tous les t_k sont différents de zéro et vérifient la relation (33).

Cas 4 : $N > Q+1$

On considère le système homogène carré S' formé par les Q dernières équations du système de départ. Le déterminant de S' est donné par :

$$\det(S') = \mathcal{V}_Q(t_0, ..., t_Q) \prod_{i=0}^{N} t_i^{N-Q+1}. \qquad (81)$$

Comme aucun des t_i n'est nul, S' admet la solution triviale nulle et donc le système global est impossible à cause de sa deuxième équation.

Remarque 2 : On peut simplifier l'expression (77) qui correspond au cas $Q = N$. Pour cela, on doit distinguer le cas où tous les t_k sont non nuls et celui où l'un des t_k est nul.

(i)–Tous les t_k sont différents de zéro. Un calcul simple conduit à :

$$\beta_k^N = \frac{-t_k^{-1} + \sum_{i=0}^{N} t_i^{-1}}{\prod_{i \neq k}^{N} (1 - \frac{t_k}{t_i})}, \quad k = 1, ..., N. \qquad (82)$$

(ii)–L'un des t_k est nul. Sans perte de généralité, on peut supposer $t_N = 0$. Alors pour $k \neq N$, l'expression générale (77) de α_k se simplifie et ne comportera plus qu'un seul terme. On obtient immédiatement les expressions :

$$\beta_k^N = \frac{-1}{t_k \prod_{i \neq k}^{N-1} (1 - \frac{t_k}{t_i})}, \quad k = 1, ..., N-1. \qquad (83)$$

et

$$\beta_N^N = (-1)^N \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \prod_{i \neq j}^{N-1} t_i}{\prod_{i=0}^{N-1} (-t_i)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} t_i}{\prod_{i=0}^{N-1} t_i} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{t_k}. \qquad (84)$$

Remerciements

L'auteur est reconnaissant au Professeur B. BOASHASH de Queensland University of Technology-Australie pour les multiples discussions qui ont inspiré ce travail.

L'auteur remercie également les experts anonymes et le Professeur P.J. LAURENT du LMC-IMAG pour toutes ses remarques qui ont permi une amélioration des démonstrations proposées dans cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. PELEG and B. PORAT, "Estimation and classification of polynomial phase signals", *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 37, pp. 422-429, March 1991.

[2] B.BOASHASH and P.J.O'SHEA,"Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra", IEEE Trans. Signal processing, Vol.42, pp.216-220, Jan.1994.

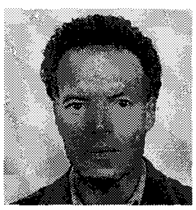
[3] M. J. ARNOLD and B. BOASHASH, "The generalised theory of phase difference estimators", *IEEE Tran. Signal Processing*, Submitted,1993.

[4] G. HACQUES, Mathématiques pour l'informatique, Tome 3, Algorithmique numérique, Collection U, ARMAND COLIN, Paris, 1971.

Manuscrit reçu le 16 janvier 1995.

L'AUTEUR

Messaoud BENIDIR



Ingénieur de l'Ecole Centrale de Paris, Docteur ès-sciences physiques, Maître de conférences à l'Université Paris-Sud (Orsay). Poursuit ses travaux de recherche au laboratoire des signaux et systèmes (Supelec) sur les thèmes suivants : algorithmes récursifs et adaptifs pour le traitement du signal, traitement de signaux multidimentionnels, analyse temps-fréquence polynomiale.