La calibration d'antenne

Etude des effets des incertitudes des positions des capteurs sur les bornes d'estimation de position des sources

The Effects of the Sensor Position Uncertainties on the Lower Bounds of Source Localization

par J.-P. LE CADRE
IRISA/CNRS
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.

Résumé

L'objet de cet article est l'étude des effets des incertitudes relatives à la position des capteurs de l'antenne sur la précision d'estimation de la position des capteurs de l'antenne sur la précision d'estimation de la position d'une source. Il reprend essentiellement les résultats de P.M. Schulteiss et J.P. Ianiello [1]. Les calculs de ces auteurs permettent d'obtenir une expression explicite de Δ cov $(\hat{\alpha}, \hat{r})$ en fonction de α et r (resp. gisement et distance de la source) et de la statistique des perturbations des capteurs.

Mots clés : perturbations, positions des capteurs, paramètres de nuisance, matrice de Fisher.

Abstract

This paper deals with the study of the effects of the uncertainties about sensor positions for source localization. Its content is based on the results of P.M. Schultheiss and J.P. Ianiello [1] relative to the study of some factors influencing localization accuracy. Using the calculations of these authors, an explicit expression of Δ cov $(\hat{\alpha}, \hat{r})$ *as a function of* α *and* r *(source bearing and range) and of the statistical properties of the perturbations has been obtained.*

Key words : *perturbations, sensor positions, nuisance parameters, Fisher matrix.*

1. Introduction

L'objet de cette contribution est l'étude des effets des incertitudes relatives à la position des capteurs de l'antenne sur la précision d'estimation de la position d'une source. Dans cette étude, on considère que les déplacements transversaux de l'antenne sont relativement faibles (devant l'espacement intercapteurs) et sont aléatoires (de statistique connue). Ceci conduit à les considérer comme des paramètres de nuisance.

Par « paramètres de nuisance » on entend ici des paramètres inconnus dont dépend l'observation (les sorties des capteurs). L'incertitude relative à ces paramètres perturbe l'estimation des paramètres que l'on cherche à estimer. Il est à noter qu'on suppose connue la statistique des paramètres de nuisance. Cette approche a été développée par P.M. Schultheiss et J.P. Ianiello [1] ainsi que par d'autres auteurs [2], [3]. Les calculs présentés dans la suite, constituent, pour l'essentiel, un résumé de [1].

L'approche considérée ici est celle de P.M. Schultheiss et de J.P. Ianiello [1], celle-ci consiste à étudier la matrice de Fisher relative aux paramètres gisement-distance (α, r) de la source en présence d'incertitudes aléatoires sur la position des capteurs [2]. On s'intéresse donc ici à l'effet des incertitudes non-mesurables (« la rugosité du front d'onde » par exemple) sur la précision d'estimation de la source. Le fait de considérer ces incertitudes comme des paramètres de nuisance conduit directement à étudier l'accroissement de la covariance relative à (α, r) (notée Δ cov $(\hat{\alpha}, \hat{r})$) induit par ces incertitudes. Le partitionnement par blocs de la matrice de Fisher (cf. chapitre II) et le lemme d'inversion matricielle d'une matrice partitionnée par blocs fournissent une expression générale de Δ cov $(\hat{\alpha}, \hat{r})$. Au prix d'une approximation des dérivées partielles des retards géométriques τ par rapport à α et à r, le calcul explicite des termes de la matrice de Fisher devient possible. L'aspect le plus intéressant des calculs de P.M. Schultheiss et de J.P. Ianiello nous semble être l'interprétation matricielle de Δ cov $(\hat{\alpha}, \hat{r})$ présentée dans les sections 3 et 4, qui permet d'obtenir une expression explicite de Δ cov $(\hat{\alpha}, \hat{r})$ en fonction de α et r et de la statistique des perturbations des capteurs.

2. Méthode de calcul des bornes d'estimation des paramètres géométriques des sources

Soit θ le vecteur des paramètres géométriques des sources (par exemple : $\theta^t = (\alpha, r, d)$ avec α gisement de la source, r sa distance, d sa profondeur). Alors, étant donné un vecteur d'observation $\mathbf{x}$ et un estimateur non biaisé de $\theta, \hat{\theta}$ on a :

$$\text{cov } \hat{\theta} = (\mathbf{F}(\theta))^{-1}$$

F étant la matrice de Fisher dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne (i.e. $F_{i,j}$) est défini par :

$$F_{ij} = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{x}/\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right) \tag{1}$$

(cette égalité n'est ,bien sûr, qu'asymptotique et pour un estimateur efficace)

Le vecteur $\mathbf{x}$ est ici constitué des sorties des T.F. des capteurs de l'antenne tandis que $p(\mathbf{x}|\theta)$ représente la densité de probabilité des données conditionnellement au vecteur θ. On suppose que l'antenne est nominalement linéaire (l'axe des abscisses étant constitué de la droite support de l'antenne) et que le $i^{\text{ème}}$ capteur est déplacé de sa position nominale d'une distance y_i. De plus les déplacements sont supposés être suffisamment petits pour que l'on suppose que la distance intercapteurs reste égale à sa valeur nominale d (i.e. $\left(1 - y_i^2/d^2\right)^{1/2} \simeq 1$). Dans ce qui suit, la connaissance des $\{y_i\}$ est uniquement statistique, on suppose connues leurs lois mais non leurs valeurs exactes et que les paramètres définissant la position de la source sont α et r.

Par une simple intégration, on obtient la densité de $\mathbf{x}$ conditionnellement à α et r, i.e. :

$$p(\mathbf{x}|\alpha, r) = \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}|\alpha, r, y_1, \cdots, y_n)\, p(y_1, \cdots, y_n)\, dy_1, \cdots, dy_n$$

Suivant les hypothèses usuelles [4], [5], [6], les densités $p(\mathbf{x}|\alpha, r, y_1, \cdots, y_n)$ et $p(y_1, \cdots, y_n)$ (n capteurs) sont gaussiennes, le calcul de $p(\mathbf{x}|\alpha, r)$ paraît donc aisé. Ceci est cependant contredit par la dépendance de $p(\mathbf{x}|\alpha, r, y_1, \cdots, y_n)$ vis à vis des $\{y_i\}$ qui est tout à fait non linéaire. Le calcul analytique direct de $p(\mathbf{x}/\alpha, r)$ devient généralement hors de portée.

Une autre approche consiste à considérer les v.a. $\{y_i\}_{i=1}^n$ comme des paramètres de nuisance [1], [3], [7], c'est-à-dire à considérer l'estimation du vecteur de paramètre θ incluant les positions des sources (i.e. $\theta^t = (\alpha, r, y_1, \cdots, y_n)$) et puis d'en déduire une borne sur l'estimation des paramètres α et r. On note que le vecteur θ ainsi défini possède $n+2$ composantes alors que l'antenne ne possède que n capteurs, la matrice de Fisher relative à l'estimation de θ à partir des seules données est donc singulière.

On dispose toutefois d'une information a priori constituée de la densité du vecteur $\mathbf{y}$ $\left(\mathbf{y} \triangleq (y_1, \cdots, y_n)^t\right)$. Les deux premières composantes du vecteur θ sont libres. On peut alors écrire [1], [3], [7], la matrice de Fisher $\mathbf{F}(\theta)$ comme étant la somme de deux matrices $\mathbf{F}_1(\theta)$ et $\mathbf{F}_2(\theta)$, soit :

$$\mathbf{F}(\theta) = \mathbf{F}_1(\theta) + \mathbf{F}_2(\theta) \tag{2}$$

Dans l'expression ci-dessus de $\mathbf{F}(\theta)$, la matrice $\mathbf{F}_1(\theta)$ est la matrice de Fisher usuelle obtenue en considérant tous les paramètres de θ libres, tandis que $\mathbf{F}_2(\theta)$ est obtenue à partir de la distribution a priori de θ et a pour expression :

$$(\mathbf{F}_2(\theta))_{i,j} = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \log p}{\partial\theta_i \partial\theta_j}(\theta_3, \cdots, \theta_{n+2})\right)_{i,j=1,\cdots,n+2} \tag{3}$$

(note : $(\theta_3, \cdots, \theta_{n+2}) = (y_1, \cdots, y_n)$).

Si on suppose (hypothèse raisonnable) que :

$$p(\mathbf{y}) = c_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}^t \wedge^{-1} \mathbf{y}\right)$$

alors :

$$\mathbf{F}_2(\theta) = \begin{pmatrix} O & O^T \\ O & \wedge^{-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

De même $\mathbf{F}_1(\theta)$ est partitionnée, soit :

$$\mathbf{F}_1(\theta) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$$

et donc, finalement :

$$\mathbf{F}(\theta) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & \wedge^{-1} + C \end{pmatrix} \tag{5}$$

En utilisant la classique formule d'inversion d'une matrice partitionnée en blocs, on obtient [1], [8] :

$$\text{cov } (\hat{\alpha}, \hat{r}) = A^{-1} + A^{-1}B\left(\wedge^{-1} + C - B^t A^{-1} B\right)^{-1} B^t A^{-1} \tag{6}$$

Ainsi le second terme de cov $(\hat{\alpha}, \hat{r})$ (noté Δ cov) correspond à l'accroissement de variance dû à l'incertitude relative à la position des capteurs, soit :

$$\Delta \text{ cov } (\hat{\alpha}, \hat{r}) = A^{-1}B\left(\wedge^{-1} + C - B^t A^{-1} B\right)^{-1} B^t A^{-1} \tag{7}$$

Le problème de l'estimation des retards différentiels est classique [1] et conduit au calcul des éléments de la matrice de Fisher $\mathbf{F}(\theta)$, soit :

$$(\mathbf{F}(\theta))_{i,j} = K \cdot \sum_{m=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{\partial\tau_m}{\partial\theta_i} - \frac{\partial\tau_p}{\partial\theta_i}\right)\left(\frac{\partial\tau_m}{\partial\theta_j} - \frac{\partial\tau_p}{\partial\theta_j}\right)$$

avec :

$$K = \frac{T}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\omega^2 S^2(\omega)/N^2(\omega)}{1+nS(\omega/N(\omega))}d\omega \tag{8}$$

où :

- τ_m représente le retard entre la source et le $m^{\text{ième}}$ capteur
- $S(\omega)$ et $N(\omega)$ sont (respectivement) les densités spectrales du signal (source) et du bruit.

Par ailleurs, des calculs élémentaires fournissent les résultats suivants :

(x_m représente la position longitudinale du capteur m, tandis que y_m représente sa position transversale)

$$\begin{aligned} r_m &= \left[(r\sin\alpha - y_m)^2 + (r\cos\alpha - x_m)^2\right]^{1/2} \\ &= r[1 - 2(x_m/r)\cos\alpha - 2(y_m/r)\sin\alpha \\ &\quad + x_m^2/r^2 + y_m^2/r^2]^{1/2} \end{aligned} \tag{9}$$

Pour des sources relativement lointaines (de l'antenne), on a $x_m << r$ et $y_m <<< r$. Par conséquent, il est légitime de considérer un développement de Taylor au deuxième ordre de l'expression ci-dessus et de ne retenir dans ce développement que les termes linéaires en x_m/r ou y_m/r et quadratiques en x_m^2/r^2. On considère donc l'approximation suivante de r_m.

$$r_m \overset{2}{=} r\left[1 - \frac{x_m}{r}\cos\alpha - \frac{y_m}{r}\sin\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{x_m}{r}\right)^2\sin^2\alpha\right]$$

d'où l'on déduit les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau_m}{\partial\alpha} &= \frac{1}{c}\frac{\partial r_m}{\partial\alpha} \\ &\simeq \frac{1}{c}\left(x_m\sin\alpha - y_m\cos\alpha + \frac{x_m^2}{r}\sin\alpha\cos\alpha\right) \\ \frac{\partial\tau_m}{\partial r} &\simeq \frac{1}{c}\left(1 - \frac{x_m^2}{2r^2}\sin^2\alpha\right) \end{aligned}$$

et enfin :

$$\frac{\partial\tau_m}{\partial y_k} = -\frac{1}{c}\sin\alpha\cdot\delta_{m,k} \qquad (\delta : \text{ symbole de Kronecker}) \tag{10}$$

On peut, de plus, considérer l'approximation suivante :

$$\frac{\partial\tau_m}{\partial\alpha} \simeq \frac{1}{c}x_m\sin\alpha \tag{11}$$

Puisque les déplacements longitudinaux sont supposés faibles devant les déplacements transversaux, on approxime x_m par sa valeur nominale, soit en prenant pour référence le centre de l'antenne :

$$x_m = [m - (n+1)/2]\,d$$

On remarque que le calcul de $\mathbf{F}_1$ par les expressions (10) et (11) ne fait plus intervenir y_m, ce qui est heureux. Une expression analytique des termes de $\mathbf{F}_1$ est déduite directement de (10) et (11) et est donnée en annexe A [1].

3. Interprétation matricielle

Il est spécialement instructif de revenir à l'expression matricielle de cov $(\hat\alpha, \hat r)$ donnée par (6). Pour obtenir une expression plus aisément interprétable on écrit :

$$B^t \triangleq (\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2)$$

($\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ sont deux vecteurs de dimension n).

Les expressions explicites des vecteurs $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ sont directement déduits des calculs précédents, ainsi que la matrice $(C - B^tA^{-1}B)$, soit :

$$\begin{aligned} C - B^tA^{-1}B &= \left(2n\frac{K}{c^2}\sin^2\alpha\right)Id - \left(\frac{2K}{c^2}\sin^2\alpha\right)\mathbf{1}\mathbf{1}^t \\ &\quad - A_{11}^{-1}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^t - A_{22}^{-1}\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^t \end{aligned} \tag{12}$$

On prouve directement que les vecteurs $\mathbf{1}, \mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ sont orthogonaux deux à deux, i.e. :

$$\mathbf{1}^t\cdot\mathbf{b}_1 = \mathbf{1}^t\cdot\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1^t\cdot\mathbf{b}_2 = 0$$

et de plus, on a :

$$(A_{11})^{-1}\|\mathbf{b}_1\|^2 = (A_{22})^{-1}\|\mathbf{b}_2\|^2 = 2n\frac{K}{c^2}\sin^2\alpha \tag{13}$$

Ainsi, la matrice $C - B^tA^{-1}B$ peut s'écrire sous une forme beaucoup plus simple :

$$C - B^tA^{-1}B = 2n\frac{K}{c^2}\sin^2\alpha\left(Id - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^t}{\|\mathbf{1}\|^2} - \frac{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^t}{\|\mathbf{b}_1\|^2} - \frac{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^t}{\|\mathbf{b}_2\|^2}\right) \tag{14}$$

L'interprétation géométrique de cette matrice est maintenant aisée puisque l'on voit immédiatement en utilisant (13) qu'elle possède les propriétés suivantes :

P_1 : Les vecteurs $\mathbf{1}, \mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ sont des vecteurs propres de $C - B^tA^{-1}B$ associées à la valeur propre nulle ($C - B^tA^{-1}B$ est donc de rang $\leq n-3$).

P_2 : Tout vecteur orthogonal aux vecteurs $\mathbf{1}, \mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ est vecteur propre associé à la valeur propre (de multiplicité $n-3$) $2n\frac{K}{c^2}\sin^2\alpha$.

On déduit immédiatement de P_1 et P_2 la décomposition en éléments propres de $C - B^tA^{-1}B$, soit :

$$C - B^tA^{-1}B = U\Gamma U^t$$

les $(n-3)$ premières colonnes de U sont formées de vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_{n-3}$ orthogonaux deux à deux et à $(\mathbf{1}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, on les suppose, de plus, orthornormés, les trois colonnes restantes sont constituées des vecteurs $\mathbf{1}/\|1\|, \mathbf{b}_1/\|\mathbf{b}_1\|, \mathbf{b}_2/\|\mathbf{b}_2\|$.

Cette interprétation matricielle va prouver son utilité lorsque l'on fait quelques hypothèses supplémentaires sur les déplacements des capteurs.

4. Hypothèse d'indépendance des déplacements des capteurs

On suppose maintenant que les déplacements transversaux des capteurs sont statistiquement indépendants, de variance σ^2, on a :

$$\wedge^{-1} = \left(1/\sigma^2\right) Id$$

d'où :

$$\wedge^{-1} + C - B^t A^{-1} B = U \cdot \Gamma' U^t$$
$$\left(\Gamma' = \Gamma + \frac{1}{\sigma^2} Id\right)$$

et

$$\Delta \text{ cov } (\hat{\alpha}, \hat{r}) = A^{-1} B U \Gamma'^{-1} U^t B^t A^{-1} \tag{15}$$

On déduit immédiatement des définitions de U et B l'expression très simple que prend Δ cov $(\hat{\alpha}, \hat{r})$:

$$\Delta \text{ cov } (\hat{\alpha}, \hat{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2 \|\mathbf{b}_1\|^2}{A_{11}^2} & O \\ O & \frac{\sigma^2 \|\mathbf{b}_2\|^2}{A_{22}^2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

On remarque que cette matrice est diagonale, les erreurs induites par le déplacement des capteurs pour l'estimation du gisement et de la distance de la source sont (approximativement) indépendantes. On déduit de (16) une expression de l'accroissement de l'erreur quadratique moyenne relative à l'estimation de la distance et du gisement de la source, soit [1] :

$$\begin{aligned} \Delta D^2(\hat{\alpha}) &= 12 \frac{\sigma^2}{d^2} \cdot \frac{1}{n\left(n^2-1\right)} \\ \Delta D^2(\hat{r}) &= \frac{720 \sigma^2 r^4}{n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right) d^4 \sin^2 \alpha} \end{aligned} \tag{17}$$

Notons que ces accroissements de la variance de α et r ne dépendent que de facteurs géométriques (le nombre de capteurs, la variance des déplacements, l'espacement inter-capteurs et la distance r de la source); lorsque le nombre de capteurs est grand alors $\Delta D^2(\hat{\alpha})$ et $\Delta D^2(\hat{r})$ sont approximés par :

$$\begin{aligned} \Delta D^2(\hat{\alpha}) &\simeq 12 \frac{\sigma^2}{L^2} \times \frac{1}{n} \\ \Delta D^2(\hat{r}) &\simeq 720 \sigma^2 \left(\frac{r}{L \sin \alpha}\right)^4 \times \frac{\sin^2 \alpha}{n} \end{aligned} \tag{18}$$

On remarque alors que $\Delta D^2(\hat{\alpha})$ et $\Delta D^2(\hat{r})$ dépendent toutes deux de n (le nombre de capteurs de l'antenne) par un même facteur $\left(\frac{1}{n}\right)$ et que l'accroissement $\Delta D^2(\hat{r})$ dépend du facteur géométrique $\left(\frac{r}{L \sin \alpha}\right)^4$. Ce facteur est classique et se retrouve dans la variance de la localisation par courbure du front d'onde ou par triangulation [4]. L'équation (18) permet de déterminer la valeur de σ^2 tolérable pour la localisation d'une source.

5. Conclusion

Le but de cette courte présentation est d'expliciter l'intérêt des calculs faits par divers auteurs. Les approches utilisées peuvent différer notablement suivant les auteurs et la nature des problèmes considérés. Un point important de ces calculs nous semble être le positionnement optimal des capteurs.

Annexe A

Cette annexe présente les expressions analytiques des éléments de F_1 déduits de (10) et (11). Elle reprend exactement les formules de [1].

$$\begin{aligned} A_{11} &= (K/6)\left(\frac{d}{c} \sin \alpha\right)^2 n^2\left(n^2-1\right) \\ A_{12} &= A_{21} = 0 \\ A_{22} &= (K/360)\left(\frac{d}{cr} \sin \alpha\right)^4 c^2 n^2\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right) \\ B_{1s} &= K\left(\frac{d}{c} \sin \alpha\right)^2 n(n+1-2s) \\ B_{2s} &= (K/6)\left(\frac{d}{cr} \sin \alpha\right)^2 (\sin \alpha) n\left[(n-1)(n-2)-6(n-1)(s-1)+6(s-1)^2\right] \\ & 1 \leq s \leq n \\ C_{qs} &= 2K\left(n \delta_{qs}-1\right)\left(\frac{\sin \alpha}{c}\right)^2 \end{aligned}$$

avec :

$$K = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 s^2(\omega)/N^2(\omega)}{1 + n s(\omega)/N(\omega)} d\omega$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.M. SCHULTHEISS and J.P. IANIELLO, Optimum range and bearing estimation with randomly perturbed arrays, *Journal Acoust. Soc. Am.*, vol. 68 n^o 1, p. 167–173, july 1980.

[2] P.M. SCHULTHEISS, A. ASHOK and J.P. IANIELLO, Optimum and suboptimum source localization with sensors subject to random motion. *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 74, n^o 1, p. 131–142, july 1983.

[3] N. CHANDRA and C. KNAPP, Optimal hydrophone placement under random perturbations. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, n^o 5, p. 860–864, may 1990.

[4] M.J. HINICH, Bearing estimation using a perturbed linear array, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 61, june 1977, p. 1540–1544, 1977.

[5] W.S. BURDIC, *Underwater acoustic system analysis*, Prentice Hall, Signal Processing Series, 2^{nd} edition, 1991.

[6] P.M. SCHULTEISS, Locating a passive source with array measurements, a summary of results, *Proc. IEEE Internat. Conf. Acoustic., Speech and Signal Processing*, 1979, p. 967–970, 1979.

[7] H.L. VAN TREES, *Detection and Estimation Theory*, Part I, Wiley, 1968.

[8] R.A. HORN and C.R. JOHNSON, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.