Modèles statistiques de front d'onde aléatoirement fluctuants

Statistical Models of Randomly Fluctuating Wavefonts

par Jean-Pierre LE CADRE
IRISA/CNRS
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.

Résumé

L'objet de cet article est l'étude des propriétés statistiques des signaux reçus sur une antenne lorsque le front d'onde est aléatoirement distordu. Des modèles statistiques de ces distorsions sont considérés; on en déduit les covariances des signaux reçus (pour des cas simples) et les conséquences de ces modélisations.

Mots clés : distorsions, front d'onde, processus aléatoire, covariances.

Abstract

This paper deals with the study of the statistical properties of the multidimensional signals received on a sensor array in the presence of randomly distorted wavefronts. Statistical modellings of theses distortions are considered in a first time. Then, the spatial covariances of the received signals are calculated under simple hypotheses. The consequences for array processing are then briefly considered.

***Key words :** distorsions, wavefront, random processes, covariances.*

1. Introduction

On se propose ici d'étudier les propriétés statistiques du signal multidimensionnel reçu sur une antenne lorsque le front d'onde (i.e. l'ensemble des points atteints par l'onde acoustique à un retard donné) est aléatoirement distordu. Les causes de ces distorsions sont très variées mais on peut en distinguer deux grandes familles.

L'une est liée aux déformations mécaniques de l'antenne. Evidemment la nature (statistique) et l'amplitude de ces mouvements dépendent des paramètres mécaniques de l'antenne et du navire la remorquant (longueur de l'antenne, constitution physique de l'antenne, longueur de cable filée, vitesse du navire, état de la mer,...). Un modèle réaliste de ces déformations est nécessairement très complexe, il est cependant possible de considérer une modélisation de la forme d'antenne par une équation différentielle du deuxième ordre [1], [2]. L'autre est liée au milieu de transmission qui, dans la réalité, n'est pas un milieu homogène, isotrope et infini.

Les traitements classiques supposent que l'ensemble milieu plus antenne est un filtre déterministe linéaire, dont on connaît la fonction de transfert. L'objet de cette section est de définir une modélisation plus fine, adaptée à un milieu aléatoirement fluctuant et dont on ne connaît que les propriétés statistiques.

On note $X_i(t)$ la sortie du capteur i, X_i est la somme de la contribution des sources et du bruit, soit :

$$X_i(t) = s_i(t) + b_i(t)$$

Le signal $s_i(t)$ pourra être considéré comme l'image du signal émis $e(t)$ par une certaine transformation (H_i) caractérisant le trajet source- $i^{\text{ème}}$ capteur et le $i^{\text{ème}}$ capteur lui-même.

L'hypothèse habituelle consiste à dire que H_i est un filtre linéaire, de fonction de transfert $h_i(f)$. De plus, on admet généralement que $h_i(f)$ est le produit d'une première fonction de transfert $P_i(f)$ caractérisant le trajet source- $i^{\text{ème}}$ capteur (P_i est liée aux caractéristiques de propagation) et d'une seconde fonction de transfert $\delta_i(f)$ appelée fonction de directivité du capteur, ainsi :

$$h_i(f) = P_i(f) \cdot \delta_i(f)$$

Lorsque le milieu est homogène, et que la source est assez éloignée de l'antenne, on considère que les filtres $P_i(f)$ se réduisent à des retards $\tau_i(s)$ (s = source) et à un affaiblissement a indépendant de i, soit :

$$P_i(f,s) = a \, \exp\left[-2i\pi f \tau_i(s)\right] \quad (i^2 = -1)$$

Si de plus, les capteurs sont omnidirectionnels, identiques et de réponse plate en fréquence, on obtient dans le domaine temporel :

$$s_i(t) = be\left(t - \tau_i(s)\right)$$

avec :

$$b = a\delta$$

(δ : symbole de Kronecker).

2. Modélisation dans le cas d'un front d'onde aléatoirement distordu et conséquences élémentaires

Nous admettrons, pour la suite, qu'un signal provenant d'une source ponctuelle est reçu sur le $i^{\text{ème}}$ capteur de l'antenne sous la forme suivante :

$$X_i(t) = s\left(t - \tau_i(t)\right) + b_i(t)$$

où :

1. $s(t)$ est le signal émis par la source, il peut être considéré comme un signal déterministe connu (sonar actif), un signal déterministe inconnu ou un processus aléatoire (sonar passif).
2. $\tau_i(t)$ est un retard aléatoire (processus aléatoire), comprenant une partie géométrique déterministe τ_{i0} liée à la position de la source par rapport à l'antenne et dont l'écart par rapport à celle-ci, i.e. $\tilde{\tau}_i(t) = \tau_i(t) - \tau_{i0}$ décrit la déformation aléatoire du front d'onde par rapport à la situation idéale.

Par exemple, pour une antenne linéaire (écartement intercapteurs = d), on a :

$$\tau_{i0} = \frac{id \, \sin\theta}{c}$$

(par référence au premier capteur de l'antenne)

Ce modèle est un cas particulier du modèle filtre aléatoire à paramètres variables (FAPV [3]), qui définit la réponse du milieu à un signal s, par :

$$X(t) = \int H(t,\xi) s(t-\xi) d\xi$$

($H(t,\xi)$ processus aléatoire à deux variables)

ici, on a :

$$H(t,\xi) = \delta(\xi - \tau(t)) \quad (\delta \; : \; \text{Dirac})$$

Considérons tout d'abord le cas d'un signal **scalaire** $s(t)$ affecté de retards aléatoires. On suppose le signal s stationnaire au deuxième ordre et τ stationnaire au sens strict sur la loi des couples, i.e. la loi conjointe du couple $(\tau(t), \tau(t+\theta))$ ne doit dépendre que de θ.

Maintenant, soit $s'(t) = s(t - \tau(t))$:

alors :

$$\begin{aligned} \Gamma_{s'}(t+\theta, t) &\triangleq \mathbb{E}\left[s(t - \tau(t+\theta)) s(t - \tau(t))\right] \\ &= \int \Gamma_s(\theta - u) d_{\hat{P}\theta}(u) = \Gamma_{s'}(\theta) \end{aligned} \tag{1}$$

où :

$d_{\hat{P}\theta}$ désigne la densité de la variable aléatoire $\tau(t+\theta) - \tau(t)$ qui est aussi celle de la variable aléatoire $\hat{\tau}(\theta) \triangleq \tau(\theta) - \tau(0)$.

On voit donc que sous ces hypothèses $\Gamma_{s'}(t+\theta, t)$ ne dépend que de θ. Par ailleurs, on montre directement que si on note $\Psi_{\hat{\tau}}$ la fonction caractéristique de $\hat{\tau}$ (i.e. $\Psi_{\hat{\tau}}(f,\theta) \triangleq \mathbb{E}\left[\exp\left(-2i\pi f \hat{\tau}(\theta)\right)\right]$), on a :

$$\Gamma_{s'}(\theta) = \int \gamma_s(f) \Psi_{\hat{\tau}}(f,\theta) \exp(2i\pi f\theta) df \tag{2}$$

où :

$\gamma_s(f)$ est la densité spectrale de s.

Une façon de quantifier l'élargissement spectral induit par les retards aléatoires consiste à utiliser la notion de rayon spectral définie ci-dessous :

$$\rho_s^2 = \frac{\int f^2 \gamma_s(f) df}{\int \gamma_s(f) df}$$

On montre alors aisément [4], [5] que si τ est dérivable en moyenne quadratique et que l'on note τ' le processus dérivé, on a :

$$\rho_{s'}^2 = \rho_s^2 \left(1 + \mathbb{E}\left[(\tau'(0))^2\right]\right) \tag{3}$$

Il est intéressant d'étudier les implications de la formule (2) pour quelques cas simples.

cas 1 : on fait l'hypothèse que $\tau(t+\theta)$ et $\tau(t)$ sont deux v.a. indépendantes (et de même loi) quelque soit θ, alors d'après (2) :

$$\gamma_{s'}(f) = \gamma_s(f) \left|\mathbb{E}\left(\exp(2i\pi f\tau)\right)\right|^2 \tag{4}$$
(par prolongement à l'origine)

cas 2 : on fait l'hypothèse que la v.a. $\hat{\tau}(\theta) = \tau(\theta) - \tau(0)$ est gaussienne $\left(\mathcal{N}\left(m_\theta, \sigma^2\right)\right)$, alors :

$$\Psi_{\hat{\tau}}(f,\theta) = \exp\left(2i\pi m_\theta f - 2\pi^2\sigma^2 f^2\right)$$

et si on suppose que $m(\theta) = a\theta$ et $\sigma_\theta^2 = b^2\theta^2$, ce qui correspond au cas des processus à accroissements indépendants, on a :

$$\Gamma_{s'}(\theta) = \int \gamma_s(f) \exp\left(-2i\pi f\theta a - 2\pi^2 f^2\theta^2 b^2\right) \exp\left(2i\pi f\theta\right) df \tag{5}$$

On voit qu'il est difficile d'obtenir une formule explicite pour le cas 2 à moins de supposer que $\gamma_s(f)$ a une forme particulièrement simple.

3. Extension au cas multidimensionnel

Comme précédemment, on appelle $s'_i(t)$ le signal reçu sur le $i^{\text{ème}}$ capteur :

$$s'_i(t) = s\left(t - \tau_i(t)\right) \tag{6}$$

On suppose s stationnaire (au deuxième ordre), centré et les $\tau_i(t)$ stationnaires stricts dans leur ensemble, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(s'_i(t)\right) &= 0 \\ &\text{et} \\ \left(\Gamma_{s'}\right)_{i,j}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_s(\theta - u) dp_{i,j}(u,\theta) \\ &= \int \gamma_s(f) \Psi_{\tilde{\tau}_{i,j}}(f,\theta) \exp(2j\pi f\theta) df \end{aligned} \tag{7}$$

La formule (7) n'est pas explicite, on fait donc quelques hypothèses simplificatrices comme celle qui va suivre.

H_1 le signal reçu sur les capteurs est une somme de fréquences pures :

Alors, pour une fréquence f_0, le signal reçu sur le $i^{\text{ème}}$ capteur est donc :

$$s'_i(t) = a \exp\left[2j\pi f_0 \left(t - \tau_{i0} - \tilde{\tau}_i(t)\right)\right]$$

Le calcul de $\left(\Gamma_{s'}\right)_{i,j}(\theta)$ requiert celui de la fonction caractéristique $\Psi_{\tilde{\tau}_{i,j}}(f,\theta)$. On considère alors la modélisation de $\tilde{\tau}_i(t)$ par un processus à accroissements indépendants tel que l'accroissement $\tilde{\tau}_i(t+\theta) - \tilde{\tau}_i(t)$ ait pour densité :

$$\tilde{P}_{i,\theta}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_i^2\theta}\right)$$

(processus de Wiener)

d'où :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-2i\pi f\left(\tilde{\tau}_i(t+\theta) - \tilde{\tau}_i(t)\right)\right)\right] = \exp\left(-2\sigma_i^2\pi^2 f^2|\theta|\right)$$

de même, on a :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-2i\pi f\left(\tilde{\tau}_i(t+\theta) - \tilde{\tau}_j(t)\right)\right)\right] = \exp\left(-2\rho_{ij}\pi^2 f^2|\theta|\right) \tag{8}$$

On déduit alors directement de (8) par transformation de Fourier, l'expression de la matrice interspectrale de s' (notée $\gamma_{s'}$), soit :

$$\gamma_{s'}(f) = |a|^2 \Delta \gamma_D \Delta^*$$

avec :

$$(\gamma_D)_{i,j}(f) = \frac{4\rho_{ij}\pi^2 f_0^2}{\left(2\rho_{ij}\pi^2 f_0^2\right)^2 + 4\pi^2(f-f_0)^2}$$

et

$$\Delta = \text{ diag } \left(\exp\left(2j\pi f \tau_{i0}\right)\right) \tag{9}$$

On voit que l'introduction des retards aléatoires $\tilde{\tau}_i(t)$ induit d'une part un élargissement spectral (cf. (3)) et d'autre part (et c'est le plus important) un élargissement spatial. Ainsi la matrice γ_D n'est plus de rang 1, contrairement au cas "onde plane" où γ_D est donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma_D &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^t \\ \boldsymbol{D}^t &\triangleq (1, \cdots, 1) \end{aligned}$$

Le modèle de la matrice interspectrale des signaux reçus défini en (9) ($\gamma_{s'} = \Delta\gamma_D\Delta^*$) semble assez réaliste. Ceci sera confirmé par les propriétés des matrices interspectrales correspondant à des diffusions angulaires.

4. Hypothèse de diffusion angulaire

Les essais de modélisations précédents avaient pour but de traduire l'incertitude de l'instant d'arrivée du signal. On considère, maintenant, que les déformations du front d'onde induisent une incertitude (ou diffusion) spatiale [6].

On admet que le champ lointain élémentaire est une onde plane d'équation :

$$s(t) = a \exp\left[i\left(kr - 2\pi f_0 t\right)\right]$$

k : fréquence spatiale [6]

r : distance de la source au récepteur.

et que le signal recu $s'(t)$ est une "diffusion" de signaux élémentaires, soit :

$$s'(t) = \int_{\theta_0-\alpha_0}^{\theta_0+\alpha_0} a(\alpha) \exp\left[i\left(kr - 2\pi f_0 t\right)\right] d\alpha \tag{10}$$

Dans la formule (10), θ_0 représente le gisement du bruiteur, α_0 l'amplitude de la diffusion. Pour deux capteurs séparés d'une distance d, on a :

$$\Gamma_{s'}(d,\tau) = \frac{|a|^2}{\alpha_0} \exp\left(2i\pi f_0 \tau\right) \cdot \left[\int_{\theta_0-\alpha_0}^{\theta_0+\alpha_0} \exp\left(-ikd\sin\beta\right) d\beta\right]$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(a(\alpha)a^*(\beta)\right) &= 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \\ &= \frac{|a|^2}{\alpha_0} \text{ si } \alpha = \beta \end{aligned} \tag{11}$$

si on suppose α_0 petit, l'intégrale entre crochets s'approxime aisément $\left(\sin\beta \simeq \sin\theta_0 + \cos\theta_0 \cdot \tilde{\beta}\right)$, conduisant à :

$$\gamma_{s'}(d, f_0) = \frac{2|a|^2 \sin(kd\alpha_0 \cos\theta_0)}{kd\alpha_0 \cos\theta_0} \exp(-ikd\sin\theta_0)$$

l'élément $\gamma_D(i)$ s'écrit donc :

$$\gamma_D(i) = 2|a|^2 \frac{\sin(kd\alpha_0 \cos\theta_0)}{kd\alpha_0 \cos\theta_0} \qquad (12)$$

5. Conclusion

Cette étude a pour but d'étudier les conséquences d'un front d'onde aléatoirement fluctuant sur les propriétés statistiques des signaux reçus. On a pu constater que de nombreuses hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour obtenir des formules explicites. Le modèle de la matrice interspectrale des signaux reçus donné en (9) semble cependant assez général. Il est alors possible d'étendre les méthodes usuelles de traitement d'antenne à ce modèle. La difficulté majeure provient, sans doute, de l'estimation d'un modèle réaliste de la matrice γ_D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.M. KENNEDY, *Crosstrack Dynamics of a Long Cable Towed in the Ocean*, Oceans, 1981, p. 966–970.

[2] M.P. PAIDOUSSIS, Dynamics of flexible slender cylinder in axial flow, Part I, Theory, *Journal of Fluid Mechanics*, 26, 1966, p. 717–736.

[3] G. JOURDAIN, *Filtres linéaires aléatoires et non-stationnaires, modèles, simulations et applications*, thèse de doctorat d'Etat, USMG, Grenoble 1976.

[4] W.M. BROWN and C.J. PALERMO, *System performance in the presence of stochastic delays*, IRE 1962.

[5] J.P. LE CADRE, *Traitements d'antenne en présence de fronts d'onde aléatoirement fluctuants*, thèse de doctorat de 3-ème cycle, INPG, Grenoble , Juil. 1982.

[6] P. RAVAZZOLA et R. LAVAL, Dégradation du gain d'une antenne linéaire due à des déformations du type à accroissements constants, ce numéro.