Une classe de processus pour modéliser les niveaux de bruit de l'environnement

A Class of Time Processes for Environmental Noise Levels Modelling

Michel MAURIN

INRETS-LEN, Institut de Recherche sur les Transports et leur Sécurité, Laboratoire Énergie-Nuisances, 109 avenue S. Allende case 24 69675 Bron Cedex

Ingénieur Civil de l'ENPC, Docteur Ingénieur en Statistique de l'Université de Grenoble, enseignant de Probabilités et Statistique à l'ENTPE et à l'ECL. Mène des recherches à l'INRETS-LEN sur les effets nuisances et énergie des moyens de transports, et notamment sur l'impact des niveaux de bruit des véhicules et de la circulation routière.

RÉSUMÉ

L'acoustique de l'environnement utilise le niveau de bruit équivalent Leq. Sa définition conduit à envisager des modèles pour l'énergie acoustique $E_t = \int p_u^2 \, du$ qui sont définis à partir de leurs accroissements ΔE sur toute durée Δt. Par ailleurs les niveaux de bruit mesurés manifestent une tendance à la normalité quand la durée augmente, et sont plus ou moins implicitement supposés comme tels en acoustique.

Une première série de modèles est offerte avec les PAIS (processus à accroissement indépendants et stationnaires) positifs du second ordre. Nous examinons ici une autre classe de processus qui abandonne l'indépendance mais qui conserve les aspects gaussiens et l'ergodicité. En dernier, logarithme oblige, nous établissons une classe de tels processus à accroissements positifs.

MOTS CLÉS

Acoustique et environnement, niveau équivalent, processus à accroissements stationnaires, ergodicité, shot effect généralisé ou processus de Poisson filtré.

ABSTRACT

Equivalent noise levels Leq are very used in environmental acoustics, their true definition shows how levels are coming from acoustic energy $E_t = \int p_u^2 \, du$ *and related increments* ΔE *on time intervals* Δt. *So signals defined in terms of increments* ΔE *are very suitable models for acoustic pressure* p_u, *knowing that ordinary noise measurements show gaussian variations (or are commonly supposed like that).*

A first class of processes are second order PIpSI *(processes with independent positive and stationary increments, paragraph 2) ; then we investigate a broader class of such processes* $X_t = \int V_u \, du$ without independancy (V_u *stationary signal). A special sufficient condition on centered covariance function* C_V *checks again gaussian properties as* Δt *increases and in the same time yields associated ergodic ones (§ 3).*

As increments have to be positive (because logarithm in acoustic) we explicit a large sub-class of ad hoc models with positive V_u *involving Rice « generalised shot effect processes » (§ 4).*

KEY WORDS

Environmental acoustic, equivalent noise levels, processes with stationary increments, ergodicity, generalised shot effect processes.

Sigles et notations utilisés

PAIS	: processus à accroissements indépendants et stationnaires
PAOS	: processus à accroissements orthogonaux et stationnaires
PAS	: processus à accroissements stationnaires
PASE	: processus à accroissements stationnaires ergodiques
PASEAN	: processus à accroissements stationnaires ergodiques asymptotiquement normaux.

Introduction

p_t	pression acoustique
p_0	constante $= 2\ 10^{-5}$ Pa
$\mathrm{Leq}_{\Delta t}$	niveau de bruit équivalent
$V_t = (p_t/p_0)^2$	puissance réduite de la pression
$\int_{\Delta t} V_u\, du$ ou $\Delta \int V$	accroissement de $\int V_u$ du pendant une durée Δt

Partie 1

X_t	un processus
Φ_{X_t}	fonction caractéristique de X_t
$d\Pi(u)$	mesure de Lévy
ΔX_t	accroissement sur Δt
$\Delta X_t/\Delta t$	accroissement moyen sur Δt

Partie 2

$X_t = \int_0^t V_u\, du$	
$E(\,.\,)$	espérance mathématique
$\mathrm{var}(\,.\,)$	variance
E_V	espérance $E(V_t)$
C	fonction de covariance centrée de V_t
C^0	fonction de covariance centrée continue
C_V, C_X, ...	fonctions de covariance centrée de V_t, X_t ...
C^0_V...	fonctions de covariance centrée continues de V_t, ...
${}_aC$	fonction de covariance paramétrée par a
$Y_{h,t,n}$	accroissement $\int_{h+(n-1)t}^{h+nt} V_u\, du$
$Z_h = Y_{h,1,1}$	
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	loi normale et ses deux premiers moments
$\mathrm{Si}(u) = \int_0^u \sin z\, dz/z$	sinus intégral
$si(u) = \mathrm{Si}(u) - \pi/2$	
$\mathrm{Ci}(u) = -\int_u^{+\infty} \cos z\, dz/z$	cosinus intégral
K_0	fonction de Bessel modifiée de 2ᵉ espèce d'ordre zéro
δ_0, δ_{ti}...	distribution de Dirac, à l'origine, en t_i...
$\mathbb{1}_{[a\ b]}$	indicatrice de l'intervalle $[a\ b]$
Λ_t	fonction « lambda » sur $[-t\ t]$
$*$	produit de convolution

Partie 3

t_n	instants poissonniens
Y, Y_k	variables aléatoires
φ	fonction de propagation ou d'effet
S_t	processus de « shot effect » généralisé de Rice, processus de Poisson filtré
R_{nm}	somme partielle de la série de S_t
$\gamma(\alpha, \beta)$	loi Gamma de paramètres α, β
Γ	fonction Gamma d'Euler
$E(.\|.)$	espérance conditionnelle
$\mathring{\varphi}$	symétrisée de φ
L_w	niveau de puissance acoustique
g_t	processus de Poisson
G_t	processus des accroissements de g_t
H_{ti}	distribution de Heaviside en t_i

1. Introduction

Nous considérons la pression acoustique p_t en un point et le niveau de bruit équivalent Leq qui en résulte $\mathrm{Leq}_{\Delta t} = 10 \log \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (p_u/p_0)^2\, du \right\}$. Cet indice est très largement utilisé dans les questions d'environnement, il est défini sur toute durée $[t\ t + \Delta t]$ et les sonomètres actuels le donnent couramment, p_0 est une pression de référence égale à $2\ 10^{-5}$ Pa [7], [11]. Pour simplifier nous posons $V_t = (p_t/p_0)^2$ la puissance réduite adimensionnelle de la pression acoustique p_t.

La définition du Leq montre que la pression intervient par l'intermédiaire des accroissements $\int_{\Delta t} V_u \, du$ ou $\Delta \int V$ de l'intégrale de la puissance réduite au cours de la durée d'enregistrement du bruit. Ceci ne constitue pas la vision la plus répandue sur le sujet, mais puisque l'acousticien est confronté à la recherche de bons outils pour décrire les niveaux de bruit, on voit combien il est naturel de modéliser la pression acoustique à l'aide de processus qui font jouer un rôle particulier aux accroissements $\Delta \int V$ [14], [15]. C'est dans cette optique que nous examinons des classes de processus en termes d'accroissements positifs, logarithme oblige. Cette incursion parmi des classes de signaux aléatoires doit aussi se faire en gardant à l'esprit une préoccupation traditionnelle en acoustique routière (et quelque fois implicite), à savoir qu'il est couramment supposé que les niveaux de bruit présentent « une nature gaussienne » dans les ambiances de bruits relativement stables [16]. Nous avons déjà observé que cet a priori est souvent inutile [14], et montré que dans une première classe de processus pour V_t la normalité des niveaux équivalents est une conclusion du modèle [15], [16]. Nous examinons à présent une classe plus large de signaux qui possèdent les mêmes conséquences gaussiennes (§ 3), puis nous en construisons un sous-ensemble dont les accroissements sont positifs (§ 4).

2. Les processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS)

Les processus à accroissements indépendants sont évidemment des processus définis en termes de leurs accroissements, ils sont relativement troublants au premier abord, mais aux dires de Guikhman et Skorokhod [8] ils ont été à l'origine de l'étude des processus stochastiques en général.

A l'issue des travaux de Lévy et de Khintchine les PAIS sont entièrement connus par l'intermédiaire de leur fonction caractéristique Φ_{X_t} ; pour les PAIS positifs, quand on suppose que X_t est presque sûrement nul pour $t = 0$, l'expression de $\Phi_{X_t}(z)$ est $\exp\left\{t \int_0^{+\infty} (e^{iuz} - 1) \, d\Pi(u)\right\}$ avec $d\Pi(u)$ une mesure (dite de Lévy) sur R^+ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \inf(u, 1) \, d\Pi(u)$ est définie [5]. Les PAIS positifs du deuxième ordre sont également des processus à accroissements orthogonaux et stationnaires (PAOS), le processus des accroissements $X_{h+t} - X_h$ suit la même loi que X_t, avec une espérance, une variance (et tous les cumulants définis) proportionnels en t. En outre :

i) quand on fait tendre t vers zéro la variable aléatoire X_t/t n'a pas de limite en moyenne quadratique ni même en loi [5], le processus X_t n'est donc pas dérivable au sens classique [3] ;

ii) à l'inverse quand la durée t tend vers plus l'infini, la loi des accroissements moyens X_t/t ou $\Delta X_t/\Delta t$ converge vers une loi normale [15], [16].

Quand elle est appliquée au processus $X_t = \int V_u \, du$ cette dernière propriété clarifie le statut de la soi-disant hypothèse de normalité des niveaux de bruit.

3. Une classe plus large de processus définis en termes d'accroissements

3.1. Dans la pratique les niveaux de bruit routiers suivent à peu près les modèles précédents, mais il leur est cependant difficile de respecter l'indépendance des accroissements de l'intégrale de la puissance sur des durées de l'ordre de la seconde [17] ; pour cette raison nous envisageons une classe plus étendue de processus avec des accroissements stationnaires (PAS) sans plus se soucier de l'indépendance. Les premiers d'entre eux ont été introduits par Kolmogorov, et par von Neumann et Schoenberg [24]. Plus généralement les PAS appartiennent à la classe des processus à accroissements d'ordre $q \geqslant 1$ stationnaires [9], [24], et à leur propos il est nécessaire d'introduire les processus généralisés, PSG, qui sont aux processus stochastiques l'analogue de ce que sont les distributions ou fonctions généralisées aux fonctions de variables. Les PSG permettent de définir la dérivée d'un processus, dérivable ou non au sens classique, de sorte que la dérivée d'un PAS est un processus stationnaire, et qu'un PAS est l'intégrale d'un processus stationnaire ; par exemple le bruit blanc est un PSG, « idéal et non physique mais qui intervient comme facteur intégrant » [5]. Par conséquent avec tout processus stationnaire V_t nous envisageons le PAS associé $X_t = \int_0^t V_u \, du$ [4], pour lequel par construction les lois de X_t et de tout accroissement $X_{t+h} - X_h$ sont identiques.

Comme avec les PAIS nous devons introduire quelques conditions de régularité, nous supposons que V_t est un processus du second ordre avec $E(V_t)$ une constante notée E_V, et C_V la fonction de covariance centrée de V_t définie par $C_V(u - v) = E\{(V_u - E_V)(V_v - E_V)\}$. Il en résulte que X_t est également un processus du second ordre avec les résultats classiques $E(X_t) = tE_V$ et

$$\operatorname{var}(X_t) = \int_0^t \int_0^t C_V(u - v) \, du \, dv \quad [2] ;$$

la variance de X_t est une application paire en t qui se met également sous la forme classique $\int_{-t}^{t} (t - |x|) \, C_V(x) \, dx$, ($t$ positif).

3.2. QUELQUES EXEMPLES DE VARIANCES DANS LES PAS

L'espérance $E(X_t)$ ne dépend pas de C_V, contrairement à la variance $\operatorname{var}(X_t)$. Nous en rappelons quelques unes avec des fonctions de covariances centrées classiques de la littérature, (t positif) :

1) $C_V(x) = K e^{-\alpha|x|}$, elle dépend de deux paramètres positifs, elle est intégrable sur R avec $\int_R C_V(x)\,dx = 2\,K/\alpha$ et conduit à $\operatorname{var}(X_t) = 2\,K/\alpha \left[\dfrac{e^{-\alpha t}-1}{\alpha} + t\right]$. La variance est une application positive croissante convexe en t, de la forme $Kt^2 + O(t^3)$ près de l'origine et de la forme $2\,K/\alpha\,(t - 1/\alpha) + O(e^{-\alpha t})$ au voisinage de plus l'infini, avec la droite asymptote d'équation $2\,K/\alpha\,(t - 1/\alpha)$;

2) $C_V(x) = e^{-\alpha|x|}(K\cos\beta x + S\sin\beta|x|)$ dépend des paramètres α, β, K positifs et $|S| < K\alpha/\beta$ [24], et contient l'exemple précédent ($\beta = 0$). On a

$$\int_R C_V(x)\,dx = 2(\alpha K + \beta S)/(\alpha^2 + \beta^2),$$

l'application $\operatorname{var}(X_t)$ est égale à

$$\frac{2\,e^{-\alpha t}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\left[(\alpha^2-\beta^2)(K\cos\beta t + S\sin\beta t) + 2\,\alpha\beta(S\cos\beta t - K\sin\beta t)\right] + \frac{2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \times \left[(\alpha^2+\beta^2)(\alpha K + \beta S)\,t - (\alpha^2-\beta^2)K - 2\,\alpha\beta S\right],$$

elle est de la forme $Kt^2 + O(t^3)$ près de l'origine et possède une droite asymptote quand t tend vers plus l'infini ;

3) $C_V(x) = K\sin(2\pi Bx)/2\pi Bx$ dépend de 2 paramètres, K positif, $\int_{-t}^{t} C_V(x)\,dx = K/\pi B\,\operatorname{Si}(2\pi Bt)$ où $\operatorname{Si}(u) = \int_0^u \sin z\,dz/z$ est la fonction sinus intégral qui tend vers $\pi/2$ quand u tend vers plus l'infini [1], et donc $\int_R C_V(x)\,dx = K/2B$. Nous avons encore

$$\operatorname{var}(X_t) = Kt/2B - Kt/\pi B \int_{2\pi Bt}^{\infty} \sin u\,du/u - K/2(\pi B)^2\,(1 - \cos 2\pi Bt),$$

le second terme donne

$$-K/2(\pi B)^2\cos 2\pi Bt + Kt/\pi B \int_{2\pi Bt}^{\infty} \cos u\,du/u^2$$

(intégration par parties) avec l'intégrale majorée en valeur absolue par un terme en $1/t^2$ (un résultat d'Abel), par conséquent

$$\operatorname{var}(X_t) = Kt/2B - K/2(\pi B)^2 + \varepsilon(t)$$

possède une droite asymptote quand t tend vers plus l'infini ;

4) $C_V(x) = K\sin(\pi Bx)/\pi Bx\,\cos(2\pi\mu x)$ dépend de 2 paramètres, K positif ; on se ramène au cas précédent avec

$$C_V(x) = \frac{K(2\mu+B)}{2B}\,\frac{\sin\pi(2\mu+B)x}{\pi(2\mu+B)x} - \frac{K(2\mu-B)}{2B}\,\frac{\sin\pi(2\mu-B)x}{\pi(2\mu-B)x};$$

5) $C_V(x) = Ka/(a^2+x^2)$, avec 2 paramètres a et K positifs,

$$\int_R C_V(x)\,dx = K\pi\ ; \quad \operatorname{var}(K_t) = 2\,Kt\,\operatorname{Arctg}(t/a) - Ka\,\operatorname{Log}(1 + t^2/a^2).$$

C'est une application convexe de la forme $K/a\,t^2 + O(t^3)$ près de l'origine et qui tend vers la courbe asymptote $K\pi t - 2\,Ka\,\operatorname{Log} t/a$ quand t tend vers plus l'infini ;

6) $C_V(x) = 2\,D\,\delta_0$ avec δ_0 la distribution de Dirac à l'origine et le paramètre D positif ; c'est le cas extrême des bruits blancs, $\operatorname{var}(X_t) = 2\,Dt$ est linéaire en t ;

7) $C_V(x) = K\cos 2\,\pi\mu x$ avec 2 paramètres, K positif, l'intégrale

$$\int_{-t}^{t} C_V(x)\,dx = K/\pi\mu\ \ \sin 2\pi\mu t$$

n'a pas de limite quand t tend vers l'infini, $\operatorname{var}(X_t) = K\left(\dfrac{\sin\pi\mu t}{\pi\mu}\right)^2$;

8) $C_V(x) = K$, K positif est un autre cas extrême, $\int_{-t}^{t} C_V(x)\,dx = 2\,Kt$ n'a pas de limite quand t tend vers l'infini, $\operatorname{var}(X_t) = Kt^2$.

Puisque les covariances appartiennent à un cône positif, toute combinaison linéaire positive de covariances est un autre exemple. Dans tous les cas l'espérance $E(\Delta X_t)$ est proportionnelle en Δt comme avec les PAIS du deuxième ordre, tandis que la variance est une application qui prend des formes diverses et diffère ainsi de la forme qu'elle possède avec les PAIS.

3.3. La question qui intéresse l'acousticien concerne la distribution des accroissements moyens $\Delta X_t/\Delta t$ (ou X_t/t) et sa limite éventuelle lorsque Δt augmente et tend vers plus l'infini. Pour cela nous envisageons dans un premier temps des processus stationnaires du second ordre V_t de signe quelconque et tels que la covariance centrée C_V est la somme d'une covariance centrée C_V^0 continue et d'une distribution de Dirac à l'origine $2\,D\,\delta_0$, D positif ou nul. La question de la normalité est résolue par le Lemme suivant.

Lemme 1 : Si la fonction de covariance centrée C_V de V_t est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ la distribution de X_t/t converge en lois vers la loi normale d'espérance E_V et de variance $1/t \int_R C_V(x)\,dx$ *lorsque* t tend vers plus l'infini.

i) En effet pour t positif $\operatorname{var}(X_t)$ est égale à $2\,Dt + 2\int_0^t (t-x)\,C_V^0(x)\,dx$, le second terme est égal à

$2 \int_0^t \int_0^x C_V^0(u)\, du\, dx$, et par hypothèse

$$\int_0^x C_V^0(u)\, du = \int_0^\infty C_V^0(u)\, du + \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x)$ une application continue bornée qui tend vers zéro quand x tend vers l'infini ; il en résulte que

$$\operatorname{var}(X_t) = t \int_R C_V(u)\, du + 2 \int_0^t \varepsilon(x)\, dx .$$

ii) de manière générale la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Y qui suit une loi du second ordre est de la forme

$$\Phi_Y(z) = 1 + izE(Y) - z^2/2\, E(Y^2) + z^2\, O(z)$$

au voisinage de l'origine [21], et donc

$$\operatorname{Log} \Phi_Y(z) = iz E(Y) - z^2/2 \operatorname{var}(Y) + z^2\, O(z) .$$

iii) si on applique ce résultat à la variable X_t on a

$$\operatorname{Log} \Phi_{X_t}(z) = izt E_V - z^2/2\, t \int_R C_V(x)\, dx + {} + z^2\, O(z) - z^2 \int_0^t \varepsilon(x)\, dx ,$$

et donc

$$\operatorname{Log} \Phi_{X_t/t}(z) = \operatorname{Log} \Phi_{X_t}(z/t) = {} = iz E_V - z^2/2t \int_R C_V(x)\, dx - z^2/t\, \eta(t) + z^2/t^2\, O(z/t)$$

avec $\eta(t) = 1/t \int_0^t \varepsilon(x)\, dx$ et $\lim \eta(t) = 0$ quand t vers plus l'infini.

Il en résulte que pour tout z le logarithme de la fonction caractéristique de X_t/t converge vers l'application $iz E_V - z^2/2t \int_R C_V(x)\, dx$ quand t tend vers plus l'infini ; elle est continue à l'origine et on reconnaît le logarithme de la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}\left(E_V, 1/t \int_R C_V(x)\, dx\right)$. ■

Remarques :

i) la démonstration montre également que quand elle est définie l'intégrale $\int_R C_V(x)\, dx$ est nécessairement positive, sans passer par les propriétés spectrales des signaux et de leurs covariances ;

ii) au voisinage de l'origine $\operatorname{var}(X_t)$ a un développement de la forme $2\, Dt + t^2\, C_V^0(0) + O(t^3)$.

Compléments :

L'hypothèse que C_V est intégrable est une condition de régularité ; avec des hypothèses plus fortes on a naturellement des propriétés supplémentaires :

Lemme 2 : Si C_V^0 est $O(1/t^{a+2})$, $a > 0$, ou si $t\,|C_V^0|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ la variance $\operatorname{var}(X_t)$ a une droite asymptote lorsque la durée t tend vers plus l'infini.

i) En effet dans le premier cas $\operatorname{var}(X_t) = 2\, Dt + 2 \int_0^t (t - x)\, C_V^0(x)\, dx$; par hypothèse les intégrales

$$\int_0^\infty C_V^0(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x\, C_V^0(x)\, dx$$

sont définies, il en résulte que

$$\int_0^t x\, C_V^0(x)\, dx - \int_0^\infty x\, C_V^0(x)\, dx$$

et

$$t \left\{ \int_0^t C_V^0(x)\, dx - \int_0^\infty C_V^0(x)\, dx \right\}$$

sont $O(1/t^a)$, et donc que

$$\operatorname{var}(X_t) = t \int_R C_V(x)\, dx - {} - 2 \int_0^\infty x\, C_V^0(x)\, dx + O(1/t^a) , \quad a > 0 ;$$

ii) dans le second cas $\int_0^t x\, C_V^0(x)\, dx = \int_0^\infty x\, C_V^0(x) + \varepsilon_2(t)$ avec $\lim \varepsilon_2(t) = 0$ quand t tend vers l'infini, et

$$t \int_0^t C_V^0\, (x)\, dx = t \int_0^\infty C_V^0(x)\, dx - t \int_t^\infty C_V^0(x)\, dx$$

avec

$$t \left| \int_t^\infty C_V^0(x)\, dx \right| \leq t \int_t^\infty |C_V^0(x)|\, dx \leq \int_t^\infty x\, |C_V^0(x)|\, dx .$$

Par conséquent

$$t \int_0^t C_V^0(x)\, dx = t \int_0^\infty C_V^0(x)\, dx + \varepsilon_1(t)$$

avec $\lim \varepsilon_1(t) = 0$ quand x tend vers l'infini, et

$$\operatorname{var}(X_t) = t \int_R C_V(x)\, dx - 2 \int_0^\infty x\, C_V^0(x)\, dx + {} + 2\, \varepsilon_1(t) - 2\, \varepsilon_2(t) . \quad ■$$

Cela montre que dans les conditions du Lemme 2 le comportement de $\operatorname{var}(X_t)$ se rapproche un peu du comportement qui se produit avec les PAIS.

Les exemples 1 à 6 vérifient la condition du Lemme 1, par conséquent les accroissements moyens $\Delta X_t/\Delta t$ présentent un comportement asymptotiquement normal quand Δt augmente ; les exemples 1, 2 et 6 vérifient les conditions supplémentaires du Lemme 2 et pour eux $\mathrm{var}(X_t)$ possède une droite asymptote ; dans les exemples 3 et 4 $\mathrm{var}(X_t)$ possède aussi une droite asymptote sans toutefois que les conditions supplémentaires soient vérifiées.

3.4. Les hypothèses du Lemme 1 sur la covariance centrée de V_t ont une conséquence immédiate au niveau des accroissements $\Delta \int V$.

Lemme 3 : Si la fonction de covariance centrée C_V de V_t est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, toute suite d'accroissements $Y_{h,t,n} = \int_{h+(n-1)t}^{h+nt} V_u\, du$, t positif, est ergodique en moyenne quadratique pour l'espérance.

i) En effet l'hypothèse entraîne que $\mathrm{var}(X_t/t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers plus l'infini, et donc que X_t/t converge en moyenne quadratique vers la constante E_V. Par conséquent le processus stationnaire V_t est ergodique en moyenne quadratique pour l'espérance ;

ii) par ailleurs $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{h,t,j} = t\,\frac{1}{nt}\int_h^{h+nt} V_u\, du$, donc la suite des accroissements stationnaires $Y_{h,t,n}$ est également ergodique pour l'espérance puisque la somme du premier membre converge en moyenne quadratique vers $tE_V = E(Y_{h,t,j})$ quand n augmente. ■

Remarques :

i) plus généralement la seconde partie du Lemme 3 est établie pour tous les processus V_t qui sont stationnaires ergodiques, auquel cas $X_t = \int_0^t V_u\, du$ est un processus à accroissements stationnaires et ergodiques (PASE) du second ordre ; nous retrouvons pour les ΔX_t une propriété triviale mais cependant importante des PAIS du 2^e ordre qui provient simplement de l'application du théorème de la loi des grands nombres ;

ii) la condition que $1/t \int_0^t C_V(x)\, dx$ tend vers zéro quand t tend vers plus l'infini est une condition suffisante pour qu'un processus stationnaire soit ergodique pour l'espérance [2]. Dans les Lemmes 1 et 3 l'hypothèse sur C_V est une condition plus forte qui entraîne donc l'ergodicité et le Lemme 3 ; le Lemme 1 ne concerne donc qu'un sous-ensemble de PASE que nous appelons des PASEAN (PASE asymptotiquement normaux).

iii) une grande partie des Lemmes 2 et 3 sont des résultats qui figurent plus ou moins dans la littérature [2], mais ici ils sont directement orientés sur les accroissements moyens de PASE et sur leur loi limite ;

iv) avec les PASEAN le terme $z^2/t\, \eta(t)$ dans $\mathrm{var}(X_t/t)$ peut tendre vers zéro plus lentement que le terme $z^2/t^2\, O(z/t)$ dans les PAIS du 2e ordre, et donc ralentir la convergence vers la loi normale de $\Delta X_t/\Delta t$ dans les PASEAN par rapport à celle des PAIS ;

v) l'origine des points communs entre l'ergodicité physique et le « théorème ergodique » issu de la loi des grands nombres est notamment évoquée par Yaglom et par Renyi, le premier attribue le théorème ergodique à Slutsky [24], le second fait remarquer que « l'idée revient pour le fond à Bernstein » [21] ; l'idée consiste à exprimer que la loi des grands nombres subsiste malgré la perte d'indépendance, mais à condition que les corrélations « ne soient pas trop fortes » entre les termes que l'on somme (ou que l'on intègre).

3.5. La condition sur la covariance C du Lemme 1 est plus forte que la condition suffisante pour l'ergodicité ; nous indiquons ci-dessous des exemples de covariances centrées qui vérifient l'une (la condition ergodique) sans vérifier l'autre (la condition du Lemme 1).

i) soit la covariance $C(t) = \cos 2\pi\mu t$ de l'exemple 7, la condition nécessaire et suffisante d'ergodicité pour l'espérance est vérifiée alors que C n'est pas intégrable sur R.

Dans cet exemple C n'a pas de limite quand t tend vers l'infini ; dans les 2 suivants la covariance tend vers zéro quand t tend vers l'infini, avec une rapidité suffisante pour que $1/t \int_0^t C(x)\, dx$ tende vers zéro mais pas assez pour que C soit intégrable.

ii) soit ${}_aC(t) = 1/(a^2 + t^2)^{1/2}$, a positif, une application définie paire continue et dérivable sur R, maximale en 0 et décroissante sur R^+ avec une limite nulle quand t tend vers $+\infty$. Pour cette application $\int_0^t {}_aC(x)\, dx$ est croissante en $\mathrm{Log}\, t$, ${}_aC$ n'est pas intégrable sur R mais $1/t \int_0^t {}_aC(x)\, dx$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini (condition nécessaire et suffisante d'ergodicité pour l'espérance). En outre

$$ {}_aC(t) = 2/\pi \int_0^\infty K_0(ax) \cos tx\, dx \quad [6]\,, $$

c'est la transformée de Fourier de la fonction de Bessel modifiée de 2^e espèce d'ordre zéro K_0, positive définie pour u positif, (décroissant de $+\infty$ à 0 sur R^+ et intégrable $\int_0^\infty K_0(u)\, du = \pi/2$), c'est donc une fonction de type positif c'est-à-dire une covariance ;

iii) soit ${}_aC(t) = 1/(a + |t|)$, a positif, une application définie paire continue sur R^+, maximale en 0 et décroissante sur R^+ avec une limite nulle quand t tend vers $+\infty$; $\int_0^t {}_aC(x)\, dx$ est croissante en $\mathrm{Log}\, t$, ${}_aC$ n'est pas intégrable sur R alors que la condition nécessaire et suffisante d'ergodicité pour l'espérance est vérifiée.

En outre

$$ {}_aC(t) = 2/\pi \int_0^\infty - $$
$$ - \{\mathrm{si}(ax) \sin ax + \mathrm{Ci}(ax) \cos ax\} \cos tx\, dx \quad [6] $$

avec $\mathrm{Ci}(u)$ le cosinus intégral et $\mathrm{si}(u) = \mathrm{Si}(u) - \pi/2$, c'est la transformée de Fourier d'une application qui s'écrit encore

$$\int_0^\infty v\, e^{-uv}/(1+v^2)\, dv \quad [1],$$

définie positive pour u positif, (décroissant de $+\infty$ à 0 sur R^+ et intégrable puisque $v\, e^{-uv}/(1+v^2)$ majoré par $e^{-uv}/2$ est intégrable sur R^{+2}, et donc

$$\int_0^\infty \int_0^\infty v\, e^{-uv}/(1+v^2)\, dv\, du =$$

$$= \int_0^\infty v/(1+v^2)\, dv \int_0^\infty e^{-uv}\, du = \pi/2),$$

c'est une fonction de type positif et donc une covariance.

3.6. Par construction tout accroissement $Z_h = \int_h^{h+t} V_u\, du = Y_{h,t,1}$, t positif, suit la même loi que $X_t = \int_0^t V_u\, du$. Nous considérons le processus Z_h en fonction de l'instant h ; c'est un nouveau processus stationnaire, son espérance est égale à tE_V, sa fonction de covariance centrée C_Z à $E(Z_h Z_{h+\tau}) - t^2 E_V^2$.

3.6.1. *Lemme 4 :* Soit Λ_t l'application paire continue définie par $\Lambda_t(x) = (t - |x|)\, \mathbb{1}_{[-t+t]}(x)$, (fonction « lambda »), la covariance C_Z est égale au produit de convolution de C_V et de Λ_t.
En effet

$$C_Z(\tau) = E\left\{ \int_h^{h+t} \int_{h+\tau}^{h+t+\tau} (V_u V_v - E_V^2)\, du\, dv \right\}$$

est encore égale à

$$\int_h^{h+t} \int_{h+\tau}^{h+t+\tau} C_V(v-u)\, du\, dv \quad [2],$$

c'est un cas particulier de la fonction structure centrée du processus qui a été introduite par Kolmogorov et par von Neumann et Schoenberg [24]. Un simple changement de variables donne

$$C_Z(\tau) = \int_{\tau-t}^{\tau} C_V(x)\, dx \int_{h+\tau}^{h+t+x} dy +$$

$$+ \int_{\tau}^{\tau+t} C_V(x)\, dx \int_{h+x}^{h+t+\tau} dy =$$

$$= \int_{\tau-t}^{\tau} (x+t-\tau)\, C_V(x)\, dx + \int_{\tau}^{\tau+t} (x+t-x)\, C_V(x)\, dx .$$

C'est une application paire en τ qui ne dépend plus de l'instant h, encore égale à $\int_R \Lambda_t(x-\tau)\, C_V(x)\, dx = C_V * \Lambda_t$ puisque les deux applications C_V et Λ_t sont paires. ■

Avec les notations précédentes

$$C_Z = 2\, D\Lambda_t + C_V^0 * \Lambda_t, \quad \text{et} \quad \operatorname{var}(Z_h) = \operatorname{var}(X_t) =$$

$$= 2\, Dt + (C_V^0 * \Lambda_t)_{\tau=0};$$

pour les PAOS on retrouve le fait que la covariance C_Z se réduit à $2\, D\Lambda_t$.

3.6.2. La covariance centrée entre deux accroissements $Y_{h,t,j}$ d'indices j et $j+n$ est égale à $C_Z(nt)$;

Lemme 5 : Avec les hypothèses du Lemme 1 sur C_V, la moyenne $1/n \sum_{k=1}^{n} C_Z(kt)$ tend vers zéro quand n tend vers plus l'infini (limite au sens de Césaro des $C_Z(kt)$).
En effet quand on intègre par parties les deux intégrales de $C_Z(kt)$ on obtient la valeur simplifiée

$$C_Z(kt) = \int_{kt}^{(k+1)t} \int_0^x C_V(u)\, du\, dx -$$

$$- \int_{(k-1)t}^{kt} \int_0^x C_V(u)\, du\, dx ,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} C_Z(kt) = \int_{nt}^{(n+1)t} \int_0^x C_V(u)\, du\, dx -$$

$$- \int_0^t \int_0^x C_V(u)\, du\, dx .$$

Par hypothèse $\int_0^x C_V(u)\, du$ tend vers une limite finie quand x tend vers plus l'infini et donc $\int_{nt}^{(n+1)t} \int_0^x C_V(u)\, du\, dx$ aussi ; la limite au sens de Césaro des $C_Z(kt)$ est donc nulle. ■

On retrouve de la sorte l'ergodicité (en probabilité) des $Y_{h,t,j}$ en utilisant un théorème de Renyi inspiré de Bernstein [21]. La limite nulle au sens de Césaro des $C_Z(kt)$ est ici la manière d'exprimer une faible corrélation entre les accroissements $Y_{h,t,j}$.

4. Les processus de « shot effect » généralisés

Les Lemmes 1 et 3 étendent les propriétés de normalité asymptotique des PAIS du second ordre à une classe plus étendue de PASEAN. Cependant il s'agit en acoustique de prendre le logarithme des accroissements, et à la différence des PAIS positifs l'auteur ne connaît pas la classe des PAS positifs ni celle des PASEAN positifs. Malgré cela nous présentons ci-dessous une large classe de processus stationnaires positifs du second ordre V_t qui conduisent à des PASEAN $X_t = \int_0^t V_u\, du$ positifs, et qui répondent donc à la question posée.

4.1. Définition. Soient un processus d'instants ponctuels poissonniens t_n d'intensité q, une variable aléatoire Y et des répétitions Y_n mutuellement indépendantes et indépendantes des instants poissonniens, et une fonction d'effet (ou de propagation) $\varphi(u)$. La définition des processus de

« shot effect » généralisés figure dans Rice, le signal S_t est défini par la somme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \varphi(t-t_n)$, il généralise la définition des shot effect classiques dans lesquels Y n'intervient pas (Campbell 1909) [22]. De tels processus servent notamment pour étudier le bruit de grenaille et dans la littérature française on les désigne par « processus de Poisson filtrés » [12] (voir le renvoi (*) de 4.3.5). Nous examinons quelques propriétés de S_t.

Lemme 6 : Quand il est défini le processus S_t est stationnaire.

En effet la loi des instants poissonniens est invariante par changement d'origine du temps et indépendante de la loi des Y_n qui ne dépendent pas du temps. La loi de S_t est donc invariante par changement d'origine du temps. ■

Le signal S_t est une série de variables aléatoires dont il faut se soucier de la convergence, pour simplifier nous nous limitons au cas des variables Y et des propagations φ positives.

Lemme 7 : Avec Y et φ positifs, le signal converge en probabilité quand E(Y) est fini et φ intégrable sur R.

En effet la loi des instants poissonniens ne dépend pas d'une renumérotation, et pour tout t on les rénumérote à partir de $t_0 = t$; les durées sont mutuellement indépendantes, $t_1 - t_0$, $t_0 - t_{-1}$ et $t_k - t_{k-1}$ suivent la loi exponentielle $\gamma(1, q)$, $t_n - t_0$ et $t_0 - t_{-n}$ la loi gamma $\gamma(n, q)$.

Nous utilisons le critère de convergence mutuelle de Cauchy-Slutsky [3], [4].

a) Pour les instants d'indices positifs on considère la probabilité de l'événement $\{R_{nm} > \eta\}$ avec la somme $R_{nm} = \sum_{k=n}^{m} Y_k \varphi(t-t_k)$, $m > n > 0$, d'après l'inégalité de Markov elle est inférieure à

$$1/\eta\, E\left(\sum_{k=n}^{m} Y_k \varphi(t-t_k)\right) = 1/\eta\, E(Y) \sum_{k=n}^{m} E(\varphi(t-t_k))$$

grâce à l'indépendance. Lorsque φ est positive intégrable, $E(\varphi(t-t_k))$ est finie positive égale à

$$\int_0^{+\infty} q\, e^{-qu} (qu)^{k-1}/\Gamma(k)\, \varphi(-u)\, du\ ;$$

on peut inverser la sommation et l'intégration dans la série des termes $E(\varphi(t-t_k))$, elle converge et sa somme est égale à

$$q \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-qu} (qu)^{k-1}/\Gamma(k)\, \varphi(-u)\, du = \\ = q \int_0^{+\infty} \varphi(-u)\, du\, .$$

Par conséquent la somme scalaire $\sum_{k=n}^{m} E(\varphi(t-t_k))$ peut être rendue aussi petite que voulue, et pour tout η positif il en est de même pour la probabilité de l'événement $\{R_{nm} > \eta\}$ lorsque $E(Y)$ est fini ;

b) pour les instants d'indices négatifs la série des $E(\varphi(t-t_k))$ a pour somme

$$q \int_0^{+\infty} \varphi(v)\, dv = q \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-qv} (qv)^{k-1}/\Gamma(k)\, \varphi(v)\, dv\ ;$$

de la même façon la probabilité de l'événement $\{R_{n'm'} > \eta'\}$ peut être rendue aussi petite que voulue, avec la somme

$$R_{n'm'} = \sum_{k=-n'}^{-m'} Y_k \varphi(t-t_k)\,, \quad m' > n' > 0\,. \ ■$$

Par ailleurs Rice donne l'expression $qE(Y^r) \int_R \varphi^r(u)\, du$ des cumulants d'ordre r de la loi de S_t quand ils sont définis ; en particulier l'espérance de S_t est égale à $qE(Y) \int_R \varphi(u)\, du$, la variance à $qE(Y^2) \int_R \varphi^2(u)\, du$. Il en résulte que S_t est un processus stationnaire du second ordre positif quand la variable Y est positive d'ordre 2 et la propagation φ positive intégrable et de carré intégrable.

4.2. La covariance centrée d'un processus de Poisson filtré du second ordre.

4.2.1. *Lemme 8 :* Lorsque Y est du second ordre, et les applications φ et φ^2 intégrables, la covariance centrée $C_S(\tau)$ de S_t est égale à $qE(Y^2) \int_R \varphi(u)\, \varphi(u+\tau)\, du$.

Sous ces conditions le processus de shot effect généralisé est du 2e ordre et

$$\begin{aligned} S_{t+\tau} S_t &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_m Y_n \varphi(t+\tau-t_m)\, \varphi(t-t_n) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_m^2 \varphi(t+\tau-t_m)\, \varphi(t-t_m) \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n \neq m} Y_m Y_n \varphi(t+\tau-t_m)\, \varphi(t-t_n)\ ; \end{aligned}$$

a) l'espérance du premier terme est égale à $qE(Y^2) \int_R \varphi(u+\tau)\, \varphi(u)\, du$, quantité définie majorée par $qE(Y^2) \int_R \varphi^2(u)\, du$ (Cauchy Schwarz) ;

b) le terme $Y_m Y_n \varphi(t+\tau-t_m)\, \varphi(t-t_n)$ a pour espérance

$$E(Y)^2\, E[\varphi(t+\tau-t_m)\, E(\varphi(t-t_n) | t_m)]\,.$$

Pour tout indice m nous considérons les deux classes d'indices n supérieurs ou inférieurs à m. Pour $n = m+k$, k positif, la loi conditionnelle de $t - t_n$ est la loi de $t - t_m - u_k$ avec u_k une variable qui suit la loi $\gamma(k, q)$, et donc

$$E(\varphi(t-t_n)|t_m) = $$
$$= q\int_0^{+\infty} \varphi(t-t_m-u)\, e^{-qu}(qu)^{k-1}/\Gamma(k)\, du\ ;$$

la somme des espérances conditionnelles sur les indices $m+k$, k positif, est égale à $q\int_0^{+\infty}\varphi(t-t_m-u)\,du$.

Pour $n = m-k$, k positif, la loi conditionnelle de $t-t_n$ est la loi de $t-t_m+v_k$ avec v_k une variable qui suit la loi $\gamma(k, q)$, et donc

$$E(\varphi(t-t_n)|t_m) = $$
$$= q\int_0^{+\infty} \varphi(t-t_m+v)\, e^{-qv}(qv)^{k-1}/\Gamma(k)\, dv\ ;$$

la somme des espérances conditionnelles sur les indices $m-k$, k positif, est égale à $q\int_0^{+\infty}\varphi(t-t_m+v)\,dv$.

Par conséquent l'espérance conditionnelle par rapport à t_m de l'ensemble des termes d'indices $n \neq m$ est égale à

$$q\int_R \varphi(t-t_m+u)\,du = q\int_R \varphi(u)\,du\,.$$

C'est une constante, l'espérance finale est égale à

$$E(Y)^2\, q\int_R \varphi(u)\,du\, E\Big[\sum_m \varphi(t+\tau-t_m)\Big] = $$
$$= \left\{E(Y)\, q\int_R \varphi(u)\,du\right\}^2$$

c'est-à-dire

$$E(S_{t+\tau})\,E(S_t)\,.$$

c) Il en résulte que la covariance centrée $C_S(\tau)$ de S_t est égale à

$$qE(Y^2)\int_R \varphi(u+\tau)\,\varphi(u)\,du\,. \quad \blacksquare$$

4.2.2. Quelques propriétés de C_S

— L'autocorrélation de φ figure dans C_S, on sait que cette dernière est une application paire définie positive, C_S est majorée en valeur absolue par $C_S(0)$;

— si $\mathring{\varphi}$ est la symétrisée de φ définie par $\mathring{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, alors $\int_R \varphi(u)\,\varphi(u+\tau)\,du$ est le produit de convolution $\varphi * \mathring{\varphi}$; lorsque φ est paire $\mathring{\varphi} = \varphi$, et la covariance C_S égale à $qE(Y^2)\,\varphi * \varphi$ peut se mettre sous la forme $2\,qE(Y^2)\int_{-t/2}^{+\infty}\varphi(u)\,\varphi(u+t)\,du$.

Lemme 9 : Avec les hypothèses du Lemme 8 la covariance centrée C_S est intégrable sur R et $\int_R C_S(t)\,dt$ est égal à $qE(Y^2)\left\{\int_R \varphi(u)\,du\right\}^2$, si en outre φ est continue C_S est continue.

En effet $\varphi(u+t)\,\varphi(u)$ est intégrable sur R^2, on peut donc intervertir les signes d'intégration, et on a

$$\int_R C_S(t)\,dt = qE(Y^2)\int_R \varphi(u)\,du\int_R \varphi(u+t)\,dt = $$
$$= qE(Y^2)\left\{\int_R \varphi(u)\,du\right\}^2,$$

(on vérifie ici que $\int_R C_S(t)\,dt$ est positif).

Par ailleurs φ continue est bornée, donc $\varphi(u+t)\,\varphi(u)$ est continue en tout t et majorée en valeur absolue par $\varphi(u)\sup\varphi$, et donc C_S est continue en tout point [23]. ■

Comme pour la progression entre les Lemmes 1 et 2, des hypothèses plus fortes sur φ conduisent à des résultats plus précis.

Lemme 10 : Si les hypothèses du Lemme 8 sont vérifiées et si l'application $|u\varphi|$ est intégrable sur R, $|tC_S|$ est intégrable sur R.

En effet C_S est égal à $qE(Y^2)\,\varphi * \mathring{\varphi}$ et a pour transformée de Fourier le produit des transformées de φ et de $\mathring{\varphi}$, celles-ci sont continues et dérivables par hypothèse [23] et donc la transformée de C_S aussi, il en résulte que $|tC_S|$ est nécessairement intégrable. ■

4.2.3. Une classe de PASEAN positifs

Nous obtenons une sous-classe de processus stationnaires positifs du second ordre S_t ; avec eux $X_t = \int S_u\,du$ est un PAS positif du second ordre, et lorsque les hypothèses du Lemme 8 sont vérifiées il appartient à la classe des PASEAN du Lemme 1, ses incréments moyens convergent en loi vers la loi normale d'espérance

$$E(S_t) = qE(Y)\int_R \varphi(u)\,du$$

et de variance

$$1/t\int_R C_S(t)\,dt = 1/t\; qE(Y^2)\left\{\int_R \varphi(u)\,du\right\}^2.$$

Si en outre la propagation vérifie les hypothèses du Lemme 10 l'application $\mathrm{var}(\Delta X_t)$ a une droite asymptote lorsque Δt tend vers plus l'infini (Lemme 2).

Ces résultats fournissent ainsi un moyen de construire des signaux aléatoires qui conviennent dans la modélisation de la puissance réduite $V_t = (p_t/p_0)^2$ de la pression acoustique et qui respectent les préoccupations de normalité de l'acoustique routière.

Remarque d'acoustique environnementale :

Les processus de Poisson filtrés sont quelques fois utilisés, mais de manière différente, dans l'acoustique de l'environnement pour modéliser la puissance p_t^2 du signal mesuré. En effet la puissance est la somme des puissances élémentaires de chacune des sources acoustiques indépendantes [7], [11]. Les sources peuvent être fixes [20], mobiles à vitesse constante et régulièrement espacées pour un modèle simple des véhicules routiers [10], ou encore mobiles et poissonniennes sur la chaussée. Dans ce dernier cas c'est un processus de shot effect qui s'introduit pour p_t^2, il est classique lorsque les véhicules routiers ont le même niveau de puissance L_w [13] ou généralisé quand les niveaux de puissance sont eux-mêmes aléatoires [18].

4.3. EXEMPLES DE FONCTION DE PROPAGATION φ POSITIVES

Pour simplifier nous nous limitons à des propagations telles que toutes les puissances φ^n sont intégrables, de manière générale lorsque φ est continue bornée intégrable sur R ses puissances φ^n le sont aussi ; dans un second souci de simplicité nous limitons également aux seules propagations paires.

1) $\varphi(u) = e^{-\alpha|u|}$ est une application paire intégrable, $\int_R \varphi(u)\,du = 2/\alpha$ et nous utilisons la formule

$$C_S(t) = 2\int_0^{+\infty} \varphi(u - t/2)\,\varphi(u + t/2)\,du\,.$$

Avec t positif l'application $\varphi(u - t/2)\,\varphi(u + t/2)$ est égale à $e^{-\alpha t}$ sur l'intervalle $[0, t/2]$ et $e^{-2\alpha u}$ sur $[t/2, +\infty[$; l'intégrale sur le premier segment est égale à $t\,e^{-\alpha t}/2$, à $e^{-\alpha t}/2\alpha$ sur le second, ce qui donne finalement $C_S(t) = (t + 1/\alpha)\,e^{-\alpha t}$ pour t positif. C'est une covariance intégrable sur la droite réelle avec $\int_R C_S(t)\,dt = qE(Y^2)\,4/\alpha^2$;

2) $\varphi_a(u) = 1/a\sqrt{2\pi}\exp(-u^2/2a^2)$, une application paire intégrable avec $\int_R \varphi_a(t)\,dt = 1$ et $\varphi_a * \varphi_b = \varphi_{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ [23], par conséquent $C_S = qE(Y^2)\,\varphi_{a\sqrt{2}}$ et $\int_R C_S(t)\,dt = qE(Y^2)$;

3) $\varphi_a(u) = a^2/(a^2 + u^2) = \pi a \psi_a$ avec $\psi_a = a/\pi(a^2 + u^2)$, une application paire intégrable avec $\int_R \psi_a(u)\,du = 1$ et $\psi_a * \psi_b = \psi_{a+b}$ [23], par conséquent $\int_R \varphi_a(u)\,du = \pi a$, $C_S = q\pi^2 a^2 E(Y^2)\,\psi_{2a}$ et $\int_R C_S(t)\,dt = q\pi^2 a^2 E(Y^2)$;

4) $\varphi_a(u) = 1/2a\,\mathbb{1}_{[-a,a]}(u)$, une application paire intégrable avec $\int_R \varphi_a(u)\,du = 1$ qui vérifie $\varphi_a * \varphi_a = 1/4a^2\,\Lambda_{2a}$, par conséquent $C_S = q/4a^2\,E(Y^2)\,\Lambda_{2a}$ et $\int_R C_S(t)\,dt = qE(Y^2)$;

5) $\varphi = \delta_0$, un exemple de distribution intégrable sur R qui conduit à un processus de shot effect généralisé lui-même généralisé (PSG) $g_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n\,\delta_{t-tn}$. On reconnaît le processus de Poisson dérivé du processus des accroissements $G_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n\,H_{t-tn}$, H distribution de Heaviside [23] (*). Si $\Phi_Y(z)$ est la fonction caractéristique de la loi de Y, la loi de tout ΔG_t sur tout Δt est connue par sa fonction caractéristique $\exp\{q\,\Delta t(\Phi_Y(z) - 1)\}$, l'espérance est égale à $q\,\Delta t\,E(Y)$, la variance à $q\,\Delta t\,E(Y^2)$; g_t est un PAIS positif du second ordre dont les incréments sont stationnaires, indépendants donc ergodiques et asymptotiquement normaux. La covariance centrée $C_G(t_1, t_2)$ est égale à $qE(Y^2)\inf(t_1, t_2)$, il en résulte que la covariance centrée C_g de g_t est égale à $qE(Y^2)\,\delta_0$ [19] ;

6) l'application $\varphi(u) = \mathrm{Ci}(u)\sin u - \mathrm{si}(u)\cos u$ évoquée en [18] (**) n'est pas une fonction de propagation puisque $\varphi(u)$ qui s'écrit encore $\int_0^\infty e^{-ux}/(1 + x^2)\,dx$ [1] n'est pas intégrable sur R, elle décroît en $1/u$ au voisinage de l'infini ;

— par contre l'application associée

$$\varphi(u) = -\mathrm{Ci}(u)\cos u - \mathrm{si}(u)\sin u = \int_0^\infty x\,e^{-ux}/(1 + x^2)\,dx \quad [1]$$

est une propagation intégrable sur R^+ que l'on complète par parité, elle décroît en $1/u^2$ au voisinage de l'infini, au voisinage de l'origine elle n'est ni continue ni bornée mais croît en $O(\mathrm{Log}\,1/u)$ et par conséquent ses puissances sont intégrables sur R ; on a déjà vu que la transformée de Fourier de $\varphi(au)$ est $\pi/2(a + |t|)$, (3.5.iii).

Toutes les propagations présentées vérifient les Lemmes 8, 9 et 1, et conduisent donc à des PASEAN, les exemples 3 et 6' ne vérifient pas les Lemmes 10 et 2.

5. Conclusions

Bien que ce ne soit pas le point de vue le plus répandu, nous avons observé que la définition du $Leq_{\Delta t}$ oriente l'acousticien vers des processus qui sont définis en termes de leurs accroissements. Cette note étudie des processus à accroissements stationnaires et comprend deux points qui constituent un apport direct à l'acoustique de l'environnement qui utilise l'indice $Leq_{\Delta t}$.

(*) En pratique g_t est présent dans tout processus de Poisson filtré puisque $S_t = \varphi * g_t$ [12]. On retrouve ainsi la covariance centrée de S_t à partir de la relation $C_S = C_g * \varphi * \check{\varphi}$ [19], ici égale à $qE(Y^2)\,\varphi * \check{\varphi}$.
(**) Une confusion de notation entre Si et si dans [18] par référence aux notations du handbook [1].

— Le premier concerne l'extension de deux propriétés intéressantes des PAIS positifs du second ordre, la normalité et l'ergodicité, à une classe plus large de processus dont les accroissements sont stationnaires. D'une part la loi des incréments moyens $\Delta X_t/\Delta t$ converge vers une loi normale lorsque la durée d'enregistrement Δt augmente ; d'une autre toute suite d'accroissements successifs de durées communes est ergodique (propriété triviale avec les PAIS à cause de l'indépendance). Cette nouvelle classe est celle des PAS $\int_0^t V_u$ du moyennant une condition sur la covariance centrée C_V, condition qui entraîne à la fois la normalité asymptotique des accroissements moyens lorsque la durée de mesure augmente et l'ergodicité des accroissements. Les processus de cette classe sont désignés par le sigle PASEAN.

Puisque les variations de la variance $\mathrm{var}(\Delta X_t)$ en fonction de Δt sont différentes entre les classes de PAIS et de PASEAN, nous avons rappelé quelques exemples de $\mathrm{var}(\Delta X_t)$ pour certains PASEAN.

— Le second point concerne la possibilité de construire effectivement de tels PAS et PASEAN positifs (logarithme des accroissements oblige en acoustique) ; faute de pouvoir en préciser la classe complète nous avons retenu le sous-ensemble de ceux qui sont construits à partir des processus de Poisson filtrés, les shot effect généralisés introduits par Rice.

En dernier, pour tous ces processus, la loi des niveaux proprement dits $\mathrm{Leq}_{\Delta t} = 10 \log (\Delta X_t/\Delta t)$ converge vers une loi normale grâce aux propriétés de la loi log-normale [15]. La normalité des niveaux de bruit en acoustique routière est sans aucun doute un phénomène intéressant, mais son importance est mal située depuis que l'on s'est mépris sur son statut. En effet elle figure souvent sous la forme d'une hypothèse ou d'un postulat implicite alors que ce n'est qu'un résultat approché d'observation. Par conséquent lorsqu'on est animé par un souci de modélisation il est préférable d'avancer des modèles qui conduisent à la normalité des niveaux de bruit au lieu de la postuler. C'est le cas des PAIS positifs du second ordre [15], [16] qui se révèlent cependant un peu trop restrictifs quand on travaille avec des mesures de courtes durées [17]. Les PASEAN positifs ci-contre constituent une classe beaucoup plus étendue et donc plus réaliste de processus, ils conviennent davantage à la modélisation des niveaux de bruit de l'environnement au cours des périodes de bruit stable comme le sont notamment les bruits de la circulation pendant la journée.

Manuscrit reçu le 10 juin 1992.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, 1970, Dover.

[2] J. Bass, *Éléments de calcul des Probabilités*, 1974, Masson.

[3] A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, 1953, Masson.

[4] A. Blanc-Lapierre, B. Picimbono, *Fonctions aléatoires*, 1980, Masson.

[5] N. Bouleau, *Processus stochastiques et applications*, 1988, Hermann.

[6] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. Tricomi, *Tables of integral transforms*, vol. 1, 1954, McGraw Hill.

[7] R. D. Ford, *Physical assessment of transportation noise*, in Transportation noise, chap. 2, edited by P. Nelson, 1987, Butterworths.

[8] I. Guikhman, A. Skorokhod, *Introduction à la théorie des processus aléatoires*, 1980, MIR.

[9] E. J. Hannan, *Multiple time series*, 1970, J. Wiley.

[10] D. R. Johnson, E. G. Saunders, *The evaluation of noise from freely flowing road trafic*, Journal of Sound and Vibration, vol. 7, 1968, 287-309.

[11] R. Josse, *Notions d'acoustique à l'usage des architectes ingénieurs et urbanistes*, 1973, Eyrolles.

[12] M. Kunt, *Techniques modernes de traitement numérique des signaux*, 1991, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

[13] U. J. Kurze, *Statistics of road traffic noise*, Journal of Sound and Vibration, vol. 18, n° 2, 1971, 171-195.

[14] M. Maurin, *A propos d'une hypothèse gaussienne en Acoustique*, Premier Congrès Français d'Acoustique, Lyon, 1990, supplément au Journal de Physique, Fasc. 2, C2, 729-732.

[15] M. Maurin, *A propos de la modélisation des niveaux de bruit*, Revue de Statistique Appliquée, vol. XXXIX, n° 2, 1991, 69-74.

[16] M. Maurin, *Noise levels distributions in environmental acoustics*, Western pacific regional acoustics conference IV, 1991, Brisbane, 522-527.

[17] M. Maurin, L. Messiaen, *Une nouvelle vision des bruits de la circulation avec les PAIS*, 2e Congrès Français d'Acoustique, Arcachon, 1992, Journal de Physique IV, C1, supplément III, vol. 2, 463-466.

[18] M. Otha, S. Yamaguchi, A. Ikuta, *Statistical estimation of road traffic noise in an arbitrary sound propagation environment by use of Stratonovich's theory for a random point system*, Journal of Sound and Vibration, vol. 69, n° 2, 1980, 275-284.

[19] A. Papoulis, *Probability, random variables and stochastics processes*, 1965, McGraw Hill.

[20] E. J. Rathe, *Note on two common problems of sound propagation*, Journal of Sound and Vibration, vol. 10, 1969, 472-479.

[21] A. Renyi, *Calcul des probabilités*, 1966, Dunod.

[22] S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise* (Bell System Technical Journal, vol. n° 23, 24), ré-édité and Noise and stochastics processes, Wax N., Dover, 1954, 133-294.

[23] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, 1965, Hermann.

[24] A. M. Yaglom, *An introduction to the theory of stationary random processes*, 1962, Prentice Hall.