

Sur la précision d'estimation du défilement angulaire d'une source en mouvement ⁽¹⁾

A Statistical Study of the Cinematic Parameters of a Moving Source



Olivier ZUGMEYER

IRISA, Campus de Beaulieu
avenue du Général Leclerc
35042 Rennes Cedex, France

Olivier Zugmeyer est titulaire d'un DEA obtenu en 1989 à l'université de Rennes (mention « Traitement du Signal et Télécommunications »). Il a obtenu le titre de docteur de l'université de Rennes I le 7 juillet 1992 (intitulé de la thèse « Méthodes d'analyse spatio-temporelle de sources en mouvement »). Ses travaux de recherche portent sur l'analyse spatio-temporelle dans le cadre des traitements des signaux d'acoustique sous-marine.



Jean-Pierre LE CADRE

IRISA/CNRS, Campus de Beaulieu
avenue du Général Leclerc
35042 Rennes Cedex, France

Jean-Pierre Le Cadre a soutenu une thèse de 3^e cycle en juin 1982 puis une thèse de doctorat d'Etat en octobre 1987, toutes deux en traitement du signal et à l'INPG. De 1980 à 1988, ses travaux portent essentiellement sur le traitement d'antenne appliqué à l'acoustique sous-marine et sont effectués au GERDSM (DCAN Toulon). Depuis le 1^{er} octobre 1988, J. P. Le Cadre est affecté à l'IRISA en qualité de Chargé de recherche au CNRS. Il est responsable du groupe de travail n° 4 (GT4, « antennes ») du GdR TdSI.

RÉSUMÉ

On considère le problème de l'estimation du défilement angulaire d'une source en mouvement et plus précisément le calcul des bornes inférieures de la variance d'estimation de ce paramètre.

Le calcul des bornes a été effectué tout d'abord dans un cadre classique où les observations sont constituées des sorties de capteurs (en bande étroite) puis dans un cadre plus spécialisé adapté à l'analyse multifils. Les deux bornes sont ensuite comparées. Les résultats essentiels de cet article sont

relatifs d'une part à l'optimisation du choix des fils, d'autre part aux lois des observations constituant les fils.

MOTS CLÉS

Sources en mouvement, fréquence spatiale, défilement angulaire, matrice de Fisher, analyse multifils, hypothèse de circularité.

ABSTRACT

This paper deals with the estimation of source motion parameters and more precisely with the calculation of the statistical lower bounds of the spatial frequency speed estimator.

The lower bounds have been calculated, in a first time, in the classical frame where the observations are constituted of the sensor outputs (narrow band analysis). Then, the calculations are specialized to the so-called « multifile » analysis. The two lower bounds are then compared.

The main results of this paper are related on the first hand to the optimization of the choice of the files and, the other, on to the observation densities.

KEY WORDS

Moving sources, spatial densities, Fisher matrix, « multifile » analysis, circularity hypothesis.

(¹) Étude réalisée dans le cadre de la convention CERDSM/IRISA.

1. Introduction

Pour la plupart des applications considérées en traitement d'antenne les sources sont mobiles. Ceci est particulièrement vrai dans le contexte de l'écoute passive, par exemple en acoustique sous-marine. L'approche habituelle consiste à ignorer les mouvements respectifs des sources au niveau du traitement d'antenne en utilisant des temps d'intégration assez faibles pour que les sources soient considérées comme fixes. L'analyse des mouvements des sources est alors effectuée en sortie de traitement d'antenne.

Ce type d'approche est critiquable pour plusieurs raisons que nous allons brièvement présenter ci-dessous. L'une d'entre elles est qu'il existe un temps d'intégration optimal, i.e. permettant d'optimiser la probabilité de détection, la variance d'estimation du gisement, etc., pour une source de paramètres cinématiques donnés. Dans le cas d'une source unique, ce temps d'intégration optimal a pu être déterminé [1], [2] et l'on a pu constater qu'il décroissait rapidement au fur et à mesure que le nombre de capteurs de l'antenne (linéaire) croissait. Pour une antenne longue et une source à moyenne distance, ce temps est donc faible ; ce qui limite les performances des traitements d'antenne quels qu'ils soient. L'autre est plus fondamentale : les méthodes d'extraction-poursuite utilisent des estimées associées à des sources en mouvement. Ces estimées (exemple : gisements) sont obtenues sur un temps court. Le but des méthodes de traitement de l'information consiste ensuite à reconstituer la trajectoire de la source. On conçoit donc aisément que les performances des méthodes d'estimation des trajectoires des sources soient très dépendantes de la « qualité » des estimées instantanées. On rencontre ce phénomène dans de très nombreuses situations pratiques telles que : croisement de pistes, sources de niveaux très différents ou très variables. Pour toutes ces situations, on peut se demander s'il n'est pas préférable de considérer l'estimation **directe** de paramètres définissant la trajectoire de la source. Ici, l'adjectif direct signifie à partir des données et — implicitement puisqu'il s'agit de modèle à évolutions lentes vis-à-vis du temps d'échantillonnage — pour des temps d'analyse « longs ».

Il semble donc intéressant de définir des méthodes d'analyse spatio-temporelle utilisant explicitement un modèle de source en mouvement. Ainsi, il devient possible de séparer des sources en considérant leurs trajectoires respectives (et non leurs gisements instantanés), d'améliorer la détection de sources de faibles puissances, etc. Contrairement aux méthodes de trajectographie passive [3], [4] qui se situent en aval du traitement d'antenne, l'analyse spatio-temporelle considère l'analyse directe des données (spatio-temporelles). Ceci conduit à utiliser un modèle simplifié du mouvement de la source vu par l'antenne.

Nous allons, dans cet article, considérer la précision de l'estimation du défilement angulaire d'une source en mouvement. En effet, ce paramètre s'avère être d'une importance fondamentale pour l'étude des performances des traitements d'antenne [2], [5], [6], [7]. L'estimation de ce paramètre peut être effectuée soit directement sur les sorties de capteur, soit sur les covariances estimées après

rectification [8], i.e. moyennage spatial. Cette dernière approche présente de nombreux avantages que nous présenterons par la suite [9].

L'objet de cet article est d'étudier la précision d'estimation du défilement angulaire pour les deux types d'approches. Si la première rentre dans un cadre très classique (seuls les résultats de calcul sont présentés), il n'en est pas de même de la seconde qui pose de multiples problèmes d'analyse statistique et met en évidence les différents apports des suites (temporelles) des corrélations spatiales.

2. Un modèle simplifié de source en mouvement

Usuellement la trajectoire des sources est décrite dans un repère cartésien [3] ou grâce à des coordonnées polaires ou polaires modifiées [4]. Ces modèles sont fort bien adaptés aux problèmes de trajectographie passive qui sont des posts-traitements et considèrent que les données sont une suite d'azimuts estimés associés à une piste.

L'objet de notre propos est totalement différent puisque les données sont constituées des observations en sorties de capteurs. Il est donc nécessaire d'utiliser une paramétrisation aussi réduite que possible, susceptible de décrire les mouvements de toutes les sources tels qu'ils sont vus par l'antenne.

L'analyse que nous étudions étant spatio-temporelle, elle fait intrinsèquement intervenir la fréquence spatiale (i.e. $k = \cos \theta / \lambda$: θ gisement et λ longueur d'onde dans le cas d'une antenne linéaire à capteurs équirépartis). Le mouvement de la source fait donc nécessairement apparaître son défilement angulaire \dot{k} . Il s'agit là d'un léger abus de notation puisque \dot{k} est la vitesse d'évolution de la fréquence spatiale (et non de l'angle).

Considérons une source animée d'un mouvement rectiligne uniforme (MRU), notons v sa vitesse constante, β son cap et θ_n et L_n ses gisements et distance (du centre de l'antenne) à l'instant n . Ces paramètres sont décrits sur la figure 1. Par souci de simplicité, l'antenne est supposée fixe. Pour toute la suite, elle sera supposée linéaire à capteurs équirépartis.

Alors, les relations ci-dessous se déduisent immédiatement des formules habituelles de trigonométrie.

$$(1) \begin{cases} L_n \cos \theta_n = L_{n-1} \cos \theta_{n-1} + (\cos \beta) v \Delta T & \text{(égalité des projections)} \\ L_n^2 = L_{n-1}^2 + (v \Delta T)^2 + 2 L_{n-1} v \Delta T \cos (\theta_{n-1} - \beta) & \text{(égalité des normes)} \end{cases}$$

avec β : cap de la source (fig. 1) et ΔT = temps d'échantillonnage.

On note k_n la fréquence spatiale instantanée, i.e. :

$$k_n = \frac{\cos \theta_n}{\lambda}$$

On déduit donc de (1) l'expression suivante de k_n :

$$k_n = \frac{L_{n-1} \cos (\theta_{n-1}) + v \Delta T \cos (\beta)}{\lambda [L_{n-1}^2 + (v \Delta T)^2 + 2 L_{n-1} v \Delta T \cos (\theta_{n-1} - \beta)]^{1/2}}$$

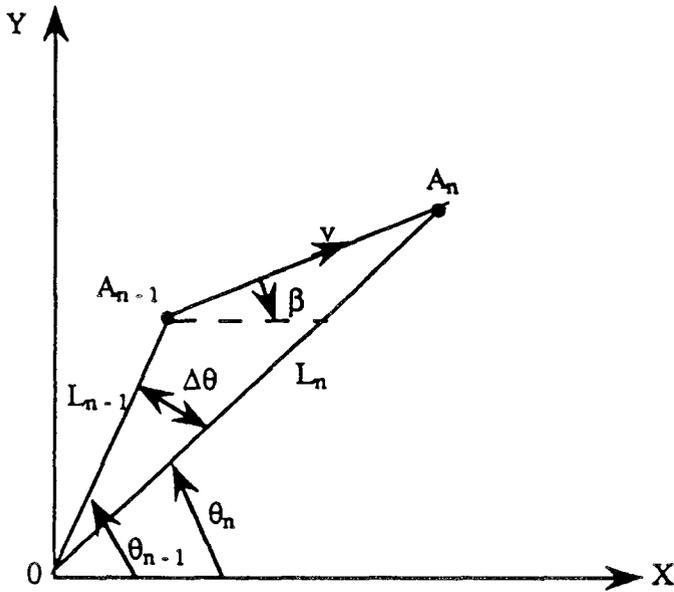


Figure 1. — Géométrie du mouvement de la source relativement à l'antenne ; A_{n-1} et A_n (resp. L_{n-1} et L_n) représentent les positions (resp. distances) de la source aux instants t_{n-1} et t_n . Le cap de la source est référencé par rapport à l'axe de l'antenne = axe des abscisses = 0° .

L'équation ci-dessus fournit la valeur de la fréquence spatiale à chaque instant t_n . La variation de la fréquence spatiale k_n entre deux instants consécutifs t_n et t_{n-1} ($\Delta T = t_n - t_{n-1}$) étant relativement faible, il paraît donc légitime de considérer une approximation au premier ordre de k_n .

dans ce but, on pose :

$$x \triangleq \frac{v \Delta T}{L_{n-1}}$$

d'où :

$$k_n = \frac{1}{\lambda} [\cos \theta_{n-1} + x \cos \beta] \times [1 + 2x \cos(\theta_{n-1} - \beta) + x^2]^{-1/2}$$

$$\cong \frac{1}{\lambda} [\cos \theta_{n-1} + (\cos \beta - \cos \theta_{n-1} \cos(\theta_{n-1} - \beta))x]$$

(\cong signifie : développement limité au premier ordre) et finalement l'approximation (locale) au premier ordre de la fréquence spatiale instantanée k_n :

$$(2) \quad k_n \cong k_{n-1} + \dot{k}_{n-1}$$

où

$$\dot{k}_{n-1} = \frac{[\cos \beta - \cos \theta_{n-1} \cos(\theta_{n-1} - \beta)] v \Delta T}{\lambda \cdot L_{n-1}}$$

Pour des sources lointaines l'équation (1) reste valide, ce qui donne :

$$\begin{cases} L_n \cos \theta_n = L_0 \cos \theta_0 + nv \Delta T (\cos \beta) \\ L_n^2 = L_0^2 + (nv \Delta T)^2 + 2 n L_0 v \Delta T \cos(\theta_0 - \beta) \end{cases}$$

(mouvement rectiligne uniforme de la source), d'où :

$$k_n = \frac{L_0 \cos \theta_0 + nv \Delta T (\cos \beta)}{\lambda [L_0^2 + (nv \Delta T)^2 + 2 n L_0 v \Delta T \cos(\theta_0 - \beta)]^{1/2}}$$

On considère alors :

$$x = \frac{nv \Delta T}{L_0}$$

pour des sources lointaines (L_0 grand) x est petit, ce qui justifie une approximation au premier ordre de k_n en tous points similaires à celle de l'équation (2), soit :

$$(3) \quad k_n = k_0 + n\dot{k}$$

$$\dot{k} = [\cos \beta - \cos \theta_0 \cos(\theta_0 - \beta)] \frac{v \Delta T}{\lambda L_0}$$

Il est à noter que le choix de l'origine du temps est ici arbitraire et que d'autres choix conduisent à modifier l'erreur d'approximation de la trajectoire exacte. D'autre part, il est évidemment possible de considérer des développements de k_n à des ordres plus élevés (relativement à x). On peut également remarquer les relations ci-dessous :

$$\begin{cases} \cos \beta - \cos \theta_{n-1} \cos(\theta_{n-1} - \beta) = \\ \sin(\theta_{n-1} - \beta) \sin(\theta_{n-1}) \\ \cos \beta - \cos \theta_0 \cos(\theta_0 - \beta) = \\ \sin(\theta_0 - \beta) \sin \theta_0 \end{cases}$$

qui permettent d'écrire :

$$(4) \quad \dot{k} = \sin(\theta_0 - \beta) \sin \theta_0 \frac{v \Delta T}{\lambda L_0}$$

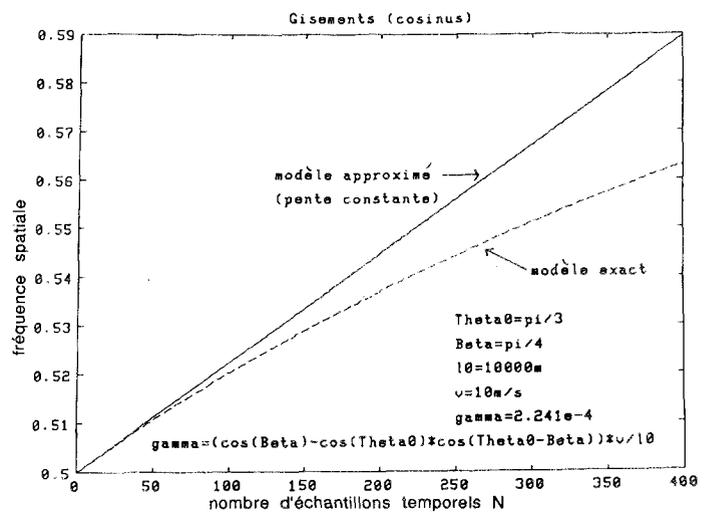


Figure 2. — Source en mouvement rectiligne uniforme ($\theta_0 = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $L_0 = 10\,000$ m, $v = 10$ m/s). Comparaison entre l'évolution des fréquences spatiales instantanées $k_{n,n} = 1, \dots, 400$ (λk_n représenté en tirets) et son approximation (eq. 3) ($k_n \triangleq k_0 + n\dot{k}$ représenté en traits pleins).

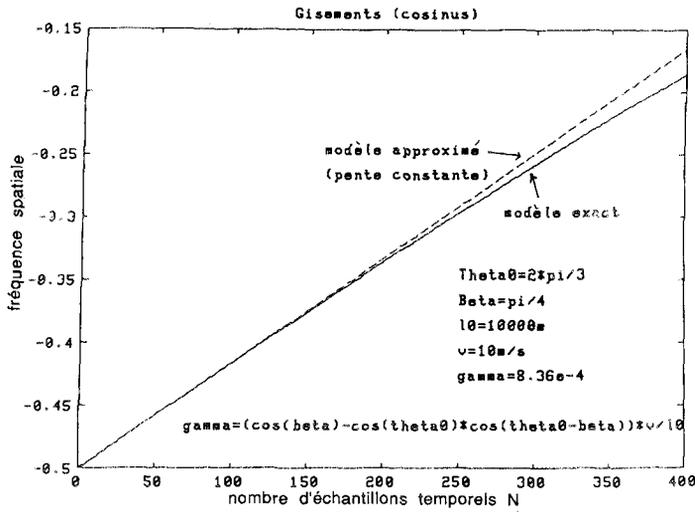


Figure 3. — Source en mouvement rectiligne uniforme ($\theta_0 = 2\pi/3$, $\beta = \pi/4$, $L_0 = 10\,000$ m, $v = 10$ m/s). Comparaison entre l'évolution des fréquences spatiales instantanées $k_{n,n} = 1, \dots, 400$ ($\lambda k_n = \cos \theta_n$ représenté en traits pleins) et son approximation (eq. 3) ($k_n = k_0 + nk$ représenté en tirets).

L'équation (4) prouve que la valeur de \dot{k} dépend directement de θ_0 et aussi de $\theta_0 - \beta$. La validité de l'approximation linéaire (3) dépend, quant à elle, essentiellement de la valeur de $x(x = nv \Delta T/L_0)$. La qualité de cette approximation est illustrée par les figures 2 et 3 pour deux configurations.

Les paramètres des mouvements des sources sont indiqués sur les figures, l'échantillonnage temporel correspond à une durée d'une seconde. Cette durée correspond à des hypothèses de traitement usuelles, l'intervalle de temps séparant deux snapshots successifs est déduit du nombre de points de transformée de Fourier et de la fréquence d'échantillonnage.

Les deux figures correspondent aux paramètres sources définis par les équations (1), (2), (3) et la figure 1. Pour ces deux figures, la distance de la source à l'antenne est identique (10 000 m) ainsi que la vitesse (10 m/s) et le cap β ; seules diffèrent les positions initiales des sources ($\theta_0 = \pi/3$ et $\theta_0 = 2\pi/3$).

On constate que pour la figure 3 la qualité de l'approximation linéaire (3) est tout à fait convenable mais qu'elle paraît moins bonne dans le cas de la figure 2. Pour une part ceci est dû au facteur d'échelle des fréquences spatiales qui n'est pas le même pour les deux figures et d'autre part à la valeur du terme $\sin(\theta_0 - \beta)$, qui est plus petit dans le cas de la figure 3.

En fait, pour ces deux figures, la trajectoire exacte est approximée par sa tangente à l'origine ce qui peut conduire à une erreur non négligeable. Une approximation linéaire de meilleure qualité serait obtenue en choisissant une autre origine des temps, au prix d'une erreur sur l'estimée de $\cos \theta_0$ (ou k_0). Ceci est le cas pour les méthodes paramétriques d'estimation du paramètre \dot{k} seul exposées en [9] qui n'utilisent que la validité de l'approximation linéaire, sans considération de l'instant d'origine.

Pour la suite, nous considérerons le modèle de k_n donné par (3), i.e. :

$$k_n = k_0 + nk$$

La trajectoire d'une source (vue par l'antenne) sera donc caractérisée par les deux paramètres k_0 et \dot{k} . L'approximation au premier ordre (eq. 3) peut être remplacée par une approximation à un ordre plus élevé ce qui requiert l'utilisation de coefficients \ddot{k} , etc. L'équation (11) prouvera que les calculs pour l'estimation des bornes inférieures relatives à l'estimation de ces paramètres obéit au même formalisme.

Le problème que nous allons considérer maintenant est le calcul des bornes de Cramer-Rao relatives à l'estimation des paramètres (k_0, \dot{k}) dans le cas d'une antenne linéaire à capteurs équirépartis. Pour cela, nous verrons que les observations considérées peuvent être de natures différentes ce qui nécessitera des approches totalement distinctes. L'une est classique et considère que les données sont les sorties de capteurs, l'autre considère que les données sont des résumés (partiels) des observations. Cette deuxième approche considère des estimateurs nécessairement sous-optimaux mais est nécessitée par les problèmes multi-sources [8], [9]. L'étude des performances de cette seconde approche est considérée dans la section 4; le problème consiste, alors, à choisir les meilleurs fils.

3. Calcul de la matrice de Fisher dans le cas d'observations centrées

Considérons l'observation constituée de N vecteurs gaussiens indépendants $\{X_0, X_1, \dots, X_{N-1}\}$ de dimension p (l'antenne est constituée de p capteurs). Ces vecteurs correspondent aux sorties de T.F. (transformée de Fourier) des capteurs de l'antenne. L'hypothèse gaussienne résulte de la gaussianité supposée de l'observation temporelle et l'indépendance des propriétés classiques de la T.F. Chaque vecteur X_i est supposée gaussien complexe circulaire, on fait, de plus, l'hypothèse « onde plane ».

Considérons \mathcal{L} la fonction de Log-vraisemblance associée à la suite d'observations $\{X_0, X_1, \dots, X_{N-1}\}$, d'après l'hypothèse d'indépendance des X_i , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\triangleq \log (p(X_0, X_1, \dots, X_{N-1}) / (\rho, k_0, \dot{k})) \\ &= Np \log \pi - \sum_{n=0}^{N-1} \log \det \Gamma_n - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{N-1} \text{tr} (\Gamma_n^{-1} X_n X_n^*) \end{aligned}$$

avec

$$(5) \quad \Gamma_n = \rho D_{k_n} D_{k_n}^* + Id$$

* : transposée conjugué, Id : matrice identité.

Dans l'expression ci-dessus de la Log-vraisemblance des observations le paramètre ρ représente le rapport signal à

bruit de la source. La matrice Γ_n est la matrice de covariance exacte de l'observation X_n , les vecteurs D_{k_n} sont des vecteurs directionnels définis par :

$$D_{k_n}' \triangleq (1, \exp(-2i\pi k_n \cdot d), \dots, \exp(-2i\pi k_n(p-1)d))$$

- t : transposée
- d : espacement intercepteurs (antenne linéaire équirépartie)
- k_n : fréquence spatiale à l'instant t_n i.e. $k_n \triangleq \cos \theta_n / \lambda$
- \dot{k}_n : $k_0 + n\dot{k}$
- λ : longueur d'onde.

On suppose que la matrice Γ_n est constante durant l'observation X_n (temps d'acquisition d'un seul snapshot). Cette hypothèse est tout à fait acceptable pratiquement ainsi que le prouve l'exemple suivant :

Exemple

On considère les paramètres d'évolution d'une source suivants :

- $v = 10$ m/s,
- $L_0 = 60$ kms,
- $\theta_0 = 110^\circ$,
- $\beta = 40^\circ$,
- $f_0 = 100$ Hz,
- $\Delta T = 1$ s,

alors : $\dot{k} \approx 10^{-5}$.

La variation instantanée de k est donc très faible ; par contre, la variation totale de la fréquence spatiale sur les N snapshots ne l'est pas.

Pour l'estimation des paramètres k_0 et \dot{k} , la matrice de Fisher F est définie par les formules ci-dessous [10] :

$$F_{11} = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k_0^2} \right), \quad F_{12} = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k_0 \partial \dot{k}} \right),$$

$$F_{22} = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{k}^2} \right)$$

$$F_{00} = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \rho^2} \right), \quad F_{01} = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \rho \partial k_0} \right),$$

$$F_{02} = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \rho \partial \dot{k}} \right)$$

$$F = (F_{ij})_{0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2}.$$

Les formules générales suivantes sont classiques [11], [12], et permettent de calculer aisément ces termes :

$$(6) \quad F_{11} = \sum_{n=0}^{N-1} tr \left[\Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \right]$$

$$F_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} tr \left[\Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial \dot{k}} \right]$$

tr : désignant ici la trace d'une matrice. La formule de Woodbury [13] permet d'inverser les matrices Γ_n^{-1} , soit :

$$(7) \quad \Gamma_n^{-1} = Id - \left(\frac{\rho}{1 + p\rho} \right) D_{k_n} D_{k_n}^*$$

(Id matrice identité).

L'expression des termes F_{11} et F_{22} prend la forme générale ci-dessous :

$$\rho^2 tr [A(UV^* + VU^*) A(UV^* + VU^*)]$$

soit, encore, en développant :

$$\rho^2 [2(U^* AU) \cdot (V^* AV) + (U^* AV)^2 + (V^* AU)^2]$$

avec :

$$A \triangleq \Gamma_n^{-1}, \quad U \triangleq D_{k_n}$$

on pose

$$(8) \quad V \triangleq \frac{\partial D_{k_n}}{\partial k_0} \quad \text{pour le calcul de } F_{11}$$

$$\text{et} \quad V \triangleq \frac{\partial D_{k_n}}{\partial \dot{k}} \quad \text{pour le calcul de } F_{22}.$$

Il s'agit de calculer les termes élémentaires de cette somme (8), il vient :

$$(9) \quad \begin{aligned} U^* AU &= p/(1 + p\rho) \\ U^* AV &= \frac{\partial}{\partial k_0} \|D_{k_n}\|^2 = 0 \\ V^* AV &= \|V\|^2. \end{aligned}$$

(En prenant comme référence le centre de l'antenne).

On obtient donc finalement :

$$(10) \quad tr \left[\Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \right] = 2 \rho^2 \left(\frac{p}{1 + p\rho} \right) \cdot \|V\|^2$$

ici $V = \frac{\partial D_n}{\partial k_0}$ et donc : $\|V\|^2 = 4 \pi^2 d^2 \frac{1}{12} p(p^2 - 1)$.

De plus, on vérifie immédiatement que l'on a :

$$(11) \quad \begin{aligned} tr \left[\Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial \dot{k}} \Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial \dot{k}} \right] &= ntr \left[\Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial \dot{k}} \Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \right] \\ &= n^2 tr \left[\Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant les formules (10) et (11) on obtient finalement :

$$F_{11} = \frac{N \rho^2 4 \pi^2 d^2 p^2 (p^2 - 1)}{6(1 + p\rho)} = N \cdot \Theta_{11}$$

$$F_{22} = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \Theta_{11},$$

$$F_{12} = \frac{N \cdot (N-1)}{2} \Theta_{11}.$$

Les deux termes F_{12} et F_{22} se déduisent donc du calcul de F_{11} . On a, de plus, l'expression ci-dessous de F_{01} :

$$F_{01} = \sum_{n=0}^{N-1} \text{tr} \left[\Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial \rho} \Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \right]$$

or (avec les notations de (1)) :

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial \rho} \Gamma_n^{-1} \frac{\partial \Gamma_n}{\partial k_0} \right] &= \rho \text{tr} [\text{AUU}^* \text{A} (\text{UV}^* + \text{VU}^*)] \\ &= \rho (\text{U}^* \text{AU}) [\text{V}^* \text{AU} + \text{U}^* \text{AV}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

La matrice de Fisher relative à l'estimation des paramètres (ρ, k_0, \dot{k}) est donc bloc-diagonale et s'écrit sous la forme ci-dessous :

$$F = \begin{pmatrix} F_{00} & 0' \\ 0 & F_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad F_1^2 \triangleq \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix}.$$

On déduit du lemme d'inversion par blocs l'expression suivante de la matrice F^{-1}

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} F_{00}^{-1} & 0' \\ 0 & (F_1^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Soit (E_1, E_2, E_3) la base usuelle de \mathbb{R}^3 , i.e. :

$$E_1^t = (1, 0, 0), \quad E_2^t = (0, 1, 0), \quad E_3^t = (0, 0, 1)$$

et V la matrice de covariance du vecteur de paramètres (ρ, k_0, \dot{k}) , l'inégalité classique (de Cramér-Rao) [10] :

$$V \geq F^{-1}$$

($A \leq B$ signifiant $B - A$ matrice positive) implique les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{k}_0) &= E_2^* V E_2 \geq E_2^* F^{-1} E_2 \\ \text{var}(\hat{k}) &= E_3^* V E_3 \geq E_3^* F^{-1} E_3. \end{aligned}$$

On obtient donc finalement les bornes inférieures suivantes de $\text{var}(\hat{k}_0)$ et $\text{var}(\hat{k})$ en fonction de F_{11} , F_{12} , F_{22} seuls, soit :

$$(12) \quad \begin{cases} \text{var}(\hat{k}_0) \geq \frac{3(1+p\rho)(2N-1)}{\rho^2 p^2 \cdot (p^2-1) \pi^2 d^2 N(N+1)} \\ \text{var}(\hat{k}) \geq \frac{18(1+p\rho)}{\rho^2 p^2 (p^2-1) \pi^2 d^2 (N^3-N)}. \end{cases}$$

La formule (12) est intéressante à plusieurs titres. D'une part, elle prouve que les bornes inférieures de $\text{var}(\hat{k}_0)$ et de $\text{var}(\hat{k})$ dépendent toutes deux de p selon un facteur identique (p^{-3}). D'autre part, que ces bornes dépendent de N selon un facteur de N^{-1} pour k_0 et de N^{-3} pour \dot{k} . Ce résultat prouve que la variance de \hat{k} décroît rapidement en fonction de N . Cette conclusion (optimiste) doit,

cependant, être fortement tempérée par les valeurs de \dot{k} qui sont usuellement très faibles.

En fait, la quantité $N\dot{k}$ peut être du même ordre de grandeur que k_0 ; mais d'après (12) la variance de $N\dot{k}$ dépend de N comme un facteur de N^{-1} , comme \hat{k}_0 .

Cette approche (classique) considère que les observations sont les sorties de capteurs et ne distingue pas les contributions des différentes corrélations spatiales pour l'obtention de la borne inférieure des variances de \hat{k} . Toutefois, dans le cas multi-sources, l'utilisation directe des sorties de capteurs présente des difficultés rédhibitoires [9], [11] car elle nécessite une estimation conjointe des paramètres k_0 et \dot{k} , ce qui conduit à des problèmes d'interférences entre sources. Il est donc nécessaire de développer d'autres approches permettant d'estimer directement les paramètres \dot{k} (indépendamment des k_0).

Ceci conduit alors à considérer comme données les suites de covariances spatiales (indice spatial fixé) indexées par le temps comme ceci a été présenté dans la référence [8]. Ces données sont appelées « sorties de fils » et les propriétés statistiques des estimateurs de \dot{k} (bornes inférieures) définis sur ces fils sont étudiées dans la section 4. Il est à noter que ce type d'approche ne prétend absolument pas à l'optimalité.

Cette remarque sur la sous-optimalité peut aussi être assortie du calcul élémentaire suivant. On considère le cas d'une source en mouvement (modèle des fréquences spatiales instantanées, $k_t = k_0 + t\dot{k}$) et à partir des snapshots $\{X_t\}_1^N$ on estime une suite de fréquences spatiales instantanées $\{\hat{k}_t\}_1^N$. Le formalisme est identique à celui de l'équation 5 et on obtient ($N = 1$ dans éq. 12) :

$$\text{var}(\hat{k}_t) \geq \frac{3(1+p\rho)}{2(\pi d\rho)^2 p^2 (p^2-1)} \triangleq \sigma_k^2.$$

Le terme de droite de l'inégalité ci-dessus est la borne inférieure de la variance d'estimation de k_t (pour un seul snapshot). On dispose alors d'un vecteur d'observations \mathcal{X} , soit :

$$\mathcal{X}^t = (\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_N).$$

On fait alors l'hypothèse que le vecteur \mathcal{X} est un vecteur gaussien, dont la loi est donnée ci-dessous :

$$\mathcal{X} \text{ est } \mathcal{N}(M, \sigma_k^2 \text{Id})$$

avec :

$$M^t = (k_0, k_0 + \dot{k}, \dots, k_0 + (N-1)\dot{k}).$$

Cette hypothèse est évidemment extrêmement optimiste puisque la convergence vers la loi ci-dessus ne peut être qu'asymptotique. Pour cette nouvelle observation, la matrice de Fisher prend la forme ci-dessous :

$$F_{11} = \sigma_k^{-2} N \quad F_{12} = \sigma_k^{-2} \frac{N(N-1)}{2}$$

et

$$F_{22} = \sigma_k^{-2} \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$$

d'où :

$$\text{var}(\hat{k}) \geq \frac{18(1+pp)}{\rho^2 p^2 (p^2 - 1) \pi^2 d^2 (N^3 - N)}$$

On retrouve donc exactement la borne inférieure de var(\hat{k}) trouvée en (12), ceci bien que l'approche utilisée soit sous-optimale. Il convient cependant de remarquer que l'hypothèse de gaussiannité du vecteur \mathcal{X} conduit à des calculs identiques aux précédents. De plus, cette hypothèse apparaît tout à fait irréaliste dans les cas multi-sources où l'estimation directe de \hat{k} (à partir des données) prend toute sa signification.

4. Calcul de la matrice de Fisher pour les corrélations spatiales

4.1. INTRODUCTION

Nous considérons toujours que l'observation initiale est constituée des N vecteurs gaussiens complexes circulaires indépendants $\{X_0, X_1, \dots, X_{N-1}\}$; puis on calcule la matrice de covariance instantanée \hat{R}_n définie par :

$$(13) \quad \hat{R}_n = X_n \cdot X_n^*$$

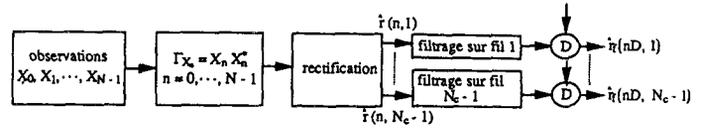
Cette matrice est ensuite projetée (orthogonalement) sur le sous-espace vectoriel des matrices de Toeplitz, soit $\hat{R}_{n,T}$ cette matrice. Celle-ci est entièrement définie par sa première ligne (ou colonne) indexée par l'indice m , soit $\{\hat{r}_m(n)\}_{0 \leq m \leq p-1}$ (opération de rectification).

Considérons la suite $\{\hat{r}_m(n)\}_n$ indexée par le temps, celle-ci peut être filtrée temporellement afin d'inclure des hypothèses a priori sur les valeurs de \hat{k} . Ainsi pour un indice m fixé, le paramètre d'évolution de la source est $m\hat{k}$ d'après l'équation 5. La fréquence de coupure du filtre doit alors être adaptée à chaque valeur de l'indice m . Le filtre utilisé est en général un filtre RIF [9], [11], à réponse impulsionnelle symétrique. Son effet principal est d'améliorer le rapport signal à bruit.

L'exemple le plus répandu de filtre est le moyenneur classiquement utilisé pour estimer les matrices de covariances (i.e. $\hat{R} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N X_n X_n^*$). L'inconvénient majeur de ce

filtre, pour l'estimation des \hat{k} à partir des corrélations spatiales, est que sa fréquence de coupure est indépendante de l'indice (m) de corrélations spatiales considéré. Il est donc préférable de remplacer ce filtre unique par une batterie de filtres adaptés aux fréquences de coupure requises sur chaque fil.

La chaîne de transformation des données se présente comme suit [11] :



On appellera la suite $\{\hat{r}_m(n)\}_n$ (resp. $\{\hat{r}_{m,f}(n)\}$) « sorties du fil m » (resp. sorties filtrées du fil m). Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à l'estimation de k_0 et \hat{k} en sorties de fils.

On montre aisément [8], [14], [15], la relation suivante :

$$(14) \quad \hat{r}_m(n) = \text{tr}(\hat{R}_n \cdot Z^m)$$

Z : matrice de décalage (shift) [8].

La matrice Z est la matrice carrée (p, p) définie par :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La diagonale de 1 est donc décalée une fois par rapport à la diagonale principale. On appellera aussi Z^m la matrice carrée (p, p) dont la diagonale constituée de 1 est décalée m fois par rapport à la diagonale principale. Cette notation a un sens car on montre très aisément les résultats ci-dessous :

$$Z \cdot Z = Z^2$$

et plus généralement :

$$Z^m \cdot Z^n = Z^{m+n} (m \text{ et } n \geq 0)$$

et donc, par souci de cohérence, on convient que :

$$Z^0 = Id.$$

En utilisant le formalisme élémentaire de l'équation (14), il a été possible [8] de calculer les moments des covariances rectifiées $\hat{r}_m(n)$. Nous allons désormais considérer le calcul des matrices de Fisher relatives à l'estimation des paramètres définissant une source en mouvement (i.e. : ρ, k_0, \hat{k}), sous diverses hypothèses de loi des $\hat{r}_m(n)$, puis vérifier la validité des résultats ainsi obtenus.

On notera [8] que, d'après les définitions des sorties de fils (eq. 14) et du modèle d'évolution des fréquences spatiales (eq. 4), les différents fils « voient » la source en mouvement avec un facteur de dilatation m (m indice de fil). Puisque nous considérerons désormais que les données sont constituées de ces sorties de fils, il s'agit donc de calculer les bornes inférieures relatives à l'estimation des \hat{k} sur les différents fils.

Bien que les moments des $\hat{r}_m(n)$ puissent être obtenus aisément [8], il semble difficile d'utiliser sa loi exacte (cf. annexe 1) car les résultats (de calcul) sont alors difficilement interprétables. Celle-ci, ou au moins une approximation convenable, est cependant nécessaire pour le calcul de

(méthode décrite en [8]). On obtient donc des estimées de \hat{k} pour chaque fil m . L'effet du filtrage est, en premier lieu, d'améliorer le rapport signal à bruit. Il importe de modifier en conséquence la formule (19), ce qui ne présente aucune difficulté (cf. annexe 2).

On génère 100 tirages indépendants correspondant chacun à 1 000 tirages des vecteurs gaussiens X_n ($n = 1$ à 1 000) dont la loi est donnée par l'équation (5). Les observations sont alors traitées suivant le schéma présenté en 4.1. Ceci conduit à analyser pour chaque valeur de m , 100 matrices de Hankel (40,6) afin d'estimer les paramètres \hat{k}_m . Les estimées sont ensuite moyennées ce qui conduit à l'écart type estimé (représenté par σ).

Cette simulation est évidemment assez lourde. On peut constater sur la figure 4 que la valeur moyenne des estimées \hat{k}_m est très proche de la borne de Cramér-Rao, sauf pour les valeurs très grandes ($96 \leq m \leq 100$) ou très petites de m . Ce résultat est intéressant à plusieurs titres : d'une part il prouve que l'hypothèse gaussienne complexe circulaire pour la loi des $\hat{r}_{m,f}(n)$ est acceptable à faible rapport signal à bruit (l'effet du filtrage étant aussi de « gaussianiser » les $\hat{r}_{m,f}(n)$). D'autre part, il montre que l'estimation de \hat{k} seul, par la méthode proposée, est proche de l'optimum (BCR) bien que la matrice de Fisher reliant k_0 et \hat{k} (éq. 18) ne soit pas diagonale. Ce dernier phénomène semble assez étonnant.

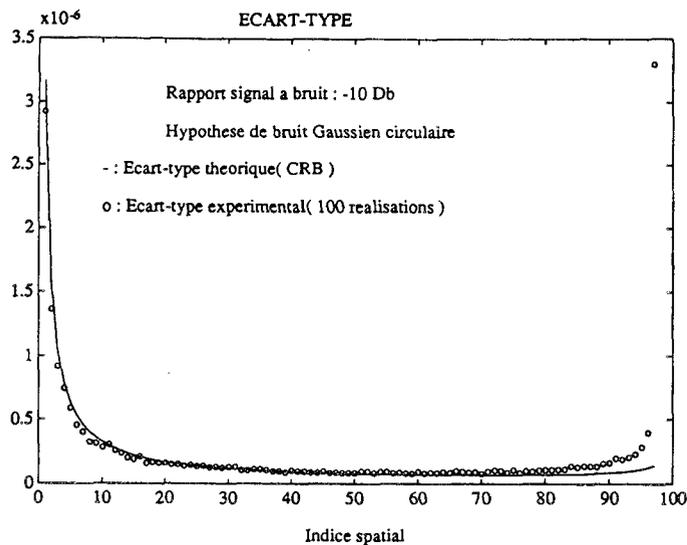


Figure 4. — Comparaison entre la borne inférieure (BCR) de $(\text{var } \hat{k}_m)^{1/2}$ représenté en traits pleins et l'écart-type expérimental obtenu sur 100 réalisations, une source faible ($\rho = -10$ dB).

Ce résultat ne s'étend pas au cas d'une source puissante. Dans ce cas, l'allure de la BCR est identique à celle de la figure 4, alors que l'écart type expérimental a (comme on le verra à la figure 6) une allure totalement différente.

Ceci conduit à remettre en cause l'hypothèse de circularité à fort rapport signal à bruit et à considérer une loi gaussienne complexe non circulaire pour les $\hat{r}_m(n)$.

De plus, il est instructif de calculer le rapport des deux bornes de la variance d'estimation de \hat{k} données respectivement par les formules (12) et (19), on obtient directement (une source de S/B : ρ) :

$$\frac{(12)}{(19)} = 12 \frac{1 + p\rho}{p^2(p^2 - 1)} \cdot \frac{m^2}{\left(\frac{1 + 2\rho}{p - m} + \rho^2\right)}$$

Sous les hypothèses d'un faible (S/B) et d'un nombre de capteurs assez élevé, on a :

$$\left(\frac{12}{19}\right) \sim 12 \left(\frac{1 + p\rho}{p^4}\right) \cdot \frac{m^2(p - m)}{1 + 2\rho}$$

soit avec le choix $m = p/2$:

$$\left(\frac{12}{19}\right) \approx \frac{3}{2} \frac{1 + p\rho}{2p(1 + 2\rho)}$$

(le symbole \sim signifiant « équivalent à »).

Si, de plus, on fait l'hypothèse de négliger 1 devant $p\rho$ (p élevé), on obtient finalement :

$$\left(\frac{12}{19}\right) \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho}{1 + 2\rho}$$

Si on choisit $\rho = 10^{-1}$ (-10 dB), on trouve :

$$\left(\frac{12}{19}\right) \sim \frac{3}{24}$$

Dans ce cas le rapport n'est nullement catastrophique ; cette conclusion n'est cependant pas valide lorsque ρ est très faible (exemple $\rho = -20$ dB \rightarrow (12)/(19) \sim 3/100 pour $p = 100$). On conçoit donc aisément l'intérêt de l'analyse multi-fils à faible S/B [11].

Le calcul des bornes inférieures de variances d'estimation des paramètres k_0 et \hat{k} est identique (dans son principe) pour le cas de sources multiples. Considérons le cas de deux sources, de paramètres respectifs $(\rho_1, k_{0,1}, \hat{k}_1)$ $(\rho_2, k_{0,2}, \hat{k}_2)$.

Toujours sous l'hypothèse de circularité, la loi du vecteur d'observations Y_m est donnée ci-dessous :

$$Y_m : \mathcal{N}_c(M_m, \Lambda_m)$$

avec :

$$\begin{cases} M_m = \rho_1 \exp(2 i \pi d m k_{0,1}) \mathcal{D}_{k_1} + \rho_2 \exp(2 i \pi d m k_{0,2}) \mathcal{D}_{k_2} \\ \Lambda_m = \text{var}(\hat{r}_m(n)) \cdot \text{Id}(N, N) \end{cases}$$

et [8] :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{k_1} &= (1, \exp(2 i \pi d m \hat{k}_1), \dots, \exp(2 i \pi d m (N - 1) \hat{k}_1)) \\ (21) \quad \text{var}(\hat{r}_m(n)) &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + \frac{(2 \rho_1 + 2 \rho_2 + 1)}{(p - m)} + \\ &+ 2 \rho_1 \rho_2 \frac{\sin^2[\pi d (p - m)(k_1(n) - k_2(n))]}{(p - m)^2 \sin^2[\pi d (k_1(n) - k_2(n))]} \end{aligned}$$

On définit les coefficients de la matrice de Fisher relative à $(k_{0,1}, k_{0,2}, \dot{k}_1, \dot{k}_2)$ comme ci-dessous :

$$F_{11} \triangleq -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k_{0,1}^2} \right), \quad F_{12} \triangleq -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k_{0,1} \partial \dot{k}_1} \right),$$

$$F_{22} \triangleq -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{k}_1^2} \right)$$

$$F_{33} \triangleq -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k_{0,2}^2} \right), \quad F_{13} \triangleq -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k_{0,1} \partial k_{0,2}} \right), \dots$$

La matrice de Fisher relative à l'estimation des couples de paramètres $(k_{0,1}, \dot{k}_1)$ d'une part et $(k_{0,2}, \dot{k}_2)$ d'autre part, s'écrit sous la forme bloc suivante :

$$(22) \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}'_2 & \mathcal{F}_3 \end{pmatrix}$$

(la définition des blocs étant évidente, elle est omise).

Considérons le bloc \mathcal{F}_2 , alors :

$$\mathcal{F}_2 \triangleq \begin{pmatrix} F_{13} & F_{14} \\ F_{23} & F_{24} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer les coefficients de \mathcal{F} (et en particulier de \mathcal{F}_2) on commence par supposer $\text{var}(\hat{r}_m(n))$ indépendant de l'instant n considéré, ce qui est justifié si $(p-m)$ est suffisamment grand. On a alors de façon similaire à (18) :

$$F_{14} = 2(\text{var} \hat{r}_m)^{-1} \text{Re} \left(\frac{\partial M_m^*}{\partial k_{0,1}} \cdot \frac{\partial M_m}{\partial \dot{k}_2} \right)$$

$$= -8(\text{var} \hat{r}_m)^{-1} \pi \text{dmp}_1 \rho_2 (e^{i\alpha} \mathcal{D}_{k_1}^* \cdot U_{k_2} + e^{-i\alpha} U_{k_2}^* \mathcal{D}_{k_1})$$

avec :

$$U_{k_2} \triangleq \frac{\partial}{\partial k_2} \mathcal{D}_{k_2}.$$

Or l'hypothèse suivante est justifiée lorsque N est suffisamment grand (ce qui est le cas pour une analyse à temps long) et \dot{k}_1 distinct de \dot{k}_2 :

$$\mathcal{D}_{k_1}^* \cdot \mathcal{D}_{k_2} = 0$$

d'où par dérivation relativement à \dot{k}_2 (par exemple) :

$$(23) \quad \mathcal{D}_{k_1}^* U_{k_2} + U_{k_2}^* \mathcal{D}_{k_1} = 0.$$

Sous l'hypothèse N grand, on peut donc négliger le terme F_{14} (devant les termes de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_3) ainsi que les termes F_{13} et F_{24} pour la même raison. On peut donc approximer \mathcal{F} par la matrice bloc-diagonale \mathcal{F}' :

$$\mathcal{F}' = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_3 \end{pmatrix}$$

et on peut donc approximer la borne inférieure relative à l'estimation de \dot{k}_1 par :

$$\text{var}(\dot{k}_{1,m}) \cong \frac{6 \text{var}(\hat{r}_m)}{4(\pi \text{d}\rho_1)^2 m^2 N(N^2 - 1)}$$

avec :

$$(24) \quad \text{var}(\hat{r}_m) = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \frac{(2\rho_1 + 2\rho_2 + 1)}{(p-m)}.$$

On voit donc que cette borne inférieure pour l'estimation de \dot{k}_1 dépend non seulement de ρ_1 mais aussi de ρ_2 . La présence d'une source forte, même de trajectoire très différente de celle de la source faible peut grandement perturber l'estimation des paramètres de trajectoire de la source faible. Il s'agit là d'un inconvénient majeur de l'analyse monofil. Il est cependant possible d'y remédier en utilisant le gain spatial tout en gardant le même formalisme [9], [11].

4.3. VALIDITÉ DE L'HYPOTHÈSE DE CIRCULARITÉ

On définit $w(n, m)$, le bruit d'estimation de $\hat{r}_m(n)$ par :

$$w(n, m) \triangleq \hat{r}_m(n) - r_m(n)$$

avec :

$$(25) \quad \hat{r}_m(n) \triangleq X_n^* \cdot Z^m \cdot X_n.$$

Alors le formalisme défini en [8] permet de calculer aisément $\mathbb{E}(|w(n, m)|^2)$ donné par (18) ainsi que $\mathbb{E}(w^2(n, m))$ puisqu'il suffit de calculer les termes de la forme $\mathbb{E}[X_n^* Z^m X_n X_n^* Z^m X_n]$. On obtient alors :

$$(26) \quad \mathbb{E}(w^2(n, m)) = \begin{cases} \rho^2 \exp(4i\pi dm(k_0 + nk)) & \text{pour } m \geq p/2 \text{ (et } p \text{ pair)} \\ \left(\rho^2 + 2\rho \frac{(p-2m)}{(p-m)^2} \right) \times & \\ \quad \times \exp(4i\pi dm(k_0 + nk)) & \text{pour } 1 < m \leq p/2 \text{ (et } p \text{ pair)}. \end{cases}$$

On remarquera que $\mathbb{E}(w^2(n, m))$ prend deux formes distinctes suivant que m est plus petit ou plus grand que $p/2$. On en déduit les expressions suivantes des variances-covariances des parties réelles et imaginaires $w_r(n, m)$ et $w_i(n, m)$.

$$(27) \quad \mathbb{E}[w_r^2(n, m)] = \frac{1}{2} [\rho^2(1 + \cos(2\pi dm(k_0 + nk))) + \frac{2\rho + 1}{p-m}]$$

$$\mathbb{E}[w_i^2(n, m)] = \frac{1}{2} [\rho^2(1 - \cos(4\pi dm(k_0 + nk))) + \frac{2\rho + 1}{p-m}]$$

$$\mathbb{E}(w_i \cdot w_r) = \frac{1}{2} \rho^2 \sin(4\pi dm(k_0 + nk))$$

pour $m \geq p/2$ (p pair).

Des formules analogues sont obtenues lorsque m est inférieur à $p/2$. Dans les deux cas, on voit que le bruit d'estimation $w(n, m)$ d'une part ne possède pas la propriété de circularité [14] et d'autre part que sa matrice de covariance (décomplexifiée) dépend de l'instant n considéré.

Dans le cas d'une source de faible puissance, il est possible de négliger les termes en ρ^2 et le bruit peut donc être approximé par un bruit complexe gaussien circulaire ($\mathbb{E}(w_r^2) = \mathbb{E}(w_i^2) \cong \frac{2\rho + 1}{2(p - m)}$, $\mathbb{E}(w_r \cdot w_i) = 0$). Dans ce cas, l'hypothèse circulaire semble justifiée ce que semble corroborer le paragraphe précédent. Sinon, l'hypothèse de circularité (pour la distribution de $\hat{r}_m(n)$) semble être une grossière erreur.

Nous allons donc considérer que la distribution de $\hat{r}_m(n)$ est gaussienne complexe, sans hypothèse de circularité.

4.4. HYPOTHÈSE GAUSSIENNE COMPLEXE

On suppose que la distribution de $\hat{r}_m(n)$ est gaussienne de moyenne $r_m(n)$ et de matrice de covariance décomplexifiée $D_m(n)$ donnée par (27).

On remarque que — contrairement à l'hypothèse circulaire — les variances-covariances de $w(n, m)$ dépendent de l'instant n considéré.

Le calcul des éléments de la matrice de Fisher est immédiat, on trouve pour le couple (k_0, \dot{k}) :

$$F(k_0, \dot{k}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} F_n(k_0, \dot{k})$$

avec :

$$(28) \quad F_n(k_0, \dot{k}) \triangleq -\mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial k_0} \frac{\partial}{\partial \dot{k}} \mathcal{L}_n \right) \\ = \text{tr} \left(D_n^{-1} \frac{\partial}{\partial k_0} D_n D_n^{-1} \frac{\partial D_n}{\partial \dot{k}} \right) + \\ + 2 \left(\frac{\partial M_n}{\partial \dot{k}} \right)' \cdot D_n^{-1} \cdot \frac{\partial M_n}{\partial k_0}$$

$$M_n \triangleq \begin{bmatrix} \text{Re}(r_m(n)) \\ \text{Im}(r_m(n)) \end{bmatrix} D_n = \text{cov} \begin{pmatrix} w_r(n, m) \\ w_i(n, m) \end{pmatrix}$$

La matrice D_n est une matrice (2,2) correspondant au problème décomplexifié, elle est définie par (27). Le vecteur M_n est défini en (16) ; l'indice du fil m est omis.

Cette formulation s'étend aux couples (k_0, k_0) , (\dot{k}, \dot{k}) et finalement à celle du triplet (ρ, k_0, \dot{k}) .

Il est alors possible de calculer la borne inférieure de la variance d'estimation de \dot{k} sous l'hypothèse gaussienne, celle-ci est déduite de (28).

La validité de (28) est tout d'abord testée dans le cas d'un faible rapport signal à bruit (fig. 5). On prend : $\rho = -20 \text{ dB}$, $p = 64$, $k_0 = 2,28 \cdot 10^{-2}$, $\dot{k} = 1,8 \cdot 10^{-5}$, $N = 100$.

La borne inférieure de $\text{var}(\hat{k})$ obtenue sous l'hypothèse de circularité de w , obtenu par (19) (représenté par 0), est comparée avec celle obtenue par (28) (représentée en traits pleins). On peut remarquer que les deux courbes coïncident en présentant une allure assez semblable à celle de la figure 5.

La pertinence de la borne obtenue par (28) est ensuite étudiée à fort rapport signal à bruit ($\rho = 10 \text{ dB}$), les \hat{k}_m sont estimées par analyse en composantes principales de matrices de Hankel bâties sur les corrélations $\{\hat{r}(n, m)\}_n$ [8], [9], [11]. Les paramètres de la simulation et du calcul de la BCR (borne de Cramér-Rao) sont les suivants : $p = 64$, $N = 100$, 100 réalisations, $\rho = 10 \text{ dB}$, $\dim \text{Hank} = (95, 6)$, $k_0 = 2,28 \cdot 10^{-2}$, $\dot{k} = 1,8 \cdot 10^{-5}$.

L'écart-type théorique de \hat{k} (calculé sous l'hypothèse de circularité et en tenant compte de l'effet du filtrage et de la décimation effectués sur les données) est représenté en traits pleins sur la figure 6. L'écart-type expérimental (en tirets) est proche de la borne théorique calculée. On constate l'allure particulière de cette borne qui présente deux minima locaux assez marqués et non plus un seul comme à faible rapport signal à bruit (ici pour $m_1 \cong 25$ et $m_2 \cong 45$). Ce type de courbe à deux minima semble être le cas général dès que le rapport signal à bruit est important (l'hypothèse de circularité n'est plus valide).

La décroissance de l'écart-type est rapide pour les premiers fils ($1 \cong m \cong 10$) et très rapide pour les derniers ($60 \cong m \cong 63$). Comme pour les exemples précédents (figs. 4 et 5), l'écart-type de \hat{k} est quasiment constant (et minimum) sur une large plage d'indices spatiaux qui exclut les plus faibles et les plus élevés. Cette analyse permet donc d'affiner le choix des indices spatiaux.

L'étude des BCR relatives à \dot{k} doit permettre, au moins pour une configuration simple, d'optimiser le choix des fils

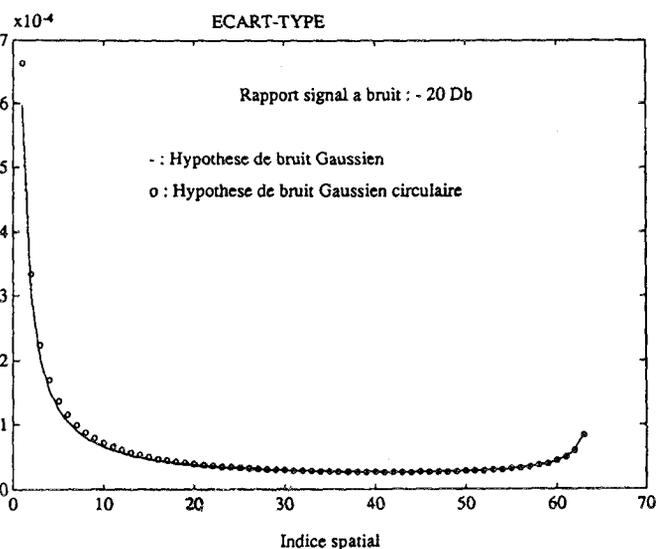


Figure 5. — Comparaison entre les bornes inférieures (BCR) relatives à \hat{k}_m dans le cas d'une hypothèse gaussienne complexe circulaire (en 0) et sans circularité, à faible S/B ($\rho = -20 \text{ dB}$).

sur lesquels on estimera \hat{k} . On comprend, en effet, aisément qu'il ne paraît pas très judicieux dans le cadre d'une estimation multifils d'utiliser des fils pour lesquels les BCR sont très défavorables.

Après filtrage des données des fils, l'hypothèse de gaussiannité de ces données semble réaliste. C'est là un effet bénéfique du filtrage. Le suréchantillonnage du processus temporel filtré permet une décimation sans perte importante d'information. C'est là la procédure retenue pour l'estimation directe des paramètres \hat{k} à partir des matrices de Hankel. Il importe de modifier en conséquence le calcul des BCR, ce qui est l'objet de l'annexe 2.

On peut également songer à « raffiner » cette hypothèse gaussienne à fort rapport signal à bruit. Il est alors tentant de songer à estimer la densité exacte de la forme bilinéaire $\varphi_m(X) = X^* Z^m X$. Le calcul des densités (de probabilité) des parties réelles et imaginaire de φ_m est présenté dans l'annexe 1. La difficulté majeure provient du calcul de la densité conjointe des parties réelles et imaginaires.

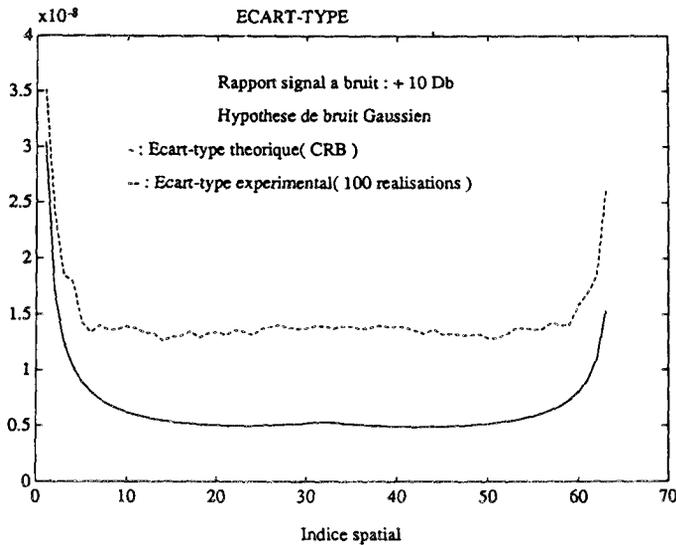


Figure 6. — Comparaison entre la borne inférieure (BCR) de $(\text{var } \hat{k}_m)^{1/2}$ représenté entre traits pleins et l'écart-type expérimental obtenu sur 100 réalisations, une source forte ($\rho = 10$ dB).

5. Conclusion

Nous avons considéré le problème de l'estimation du défilement angulaire d'une source en mouvement (en fait le paramètre \hat{k}) et plus précisément le calcul des bornes inférieures de la variance d'estimation de ce paramètre.

Le calcul des bornes a été effectué tout d'abord dans un cadre classique où les observations sont constituées des sorties de capteurs (en bande étroite) puis dans un cadre plus spécialisé adapté à l'analyse multifils. Le résultat essentiel de cet article est relatif à l'optimisation de l'analyse en sortie de fils. L'hypothèse de circularité des données constituant les fils est parfaitement acceptable à

faible signal à bruit, elle ne l'est plus à fort S/B ; par contre l'hypothèse de gaussiannité ne paraît pas devoir être remise en cause après filtrage.

Les auteurs remercient les experts de la revue dont les commentaires ont permis de clarifier certains points.

Manuscrit reçu le 16 décembre 1991.

Annexe 1

CALCUL DE LA DENSITÉ DES PARTIES RÉELLES ET IMAGINAIRES DE $\varphi_m(X)$

On considère la forme bilinéaire $\varphi(X)$ avec $X : \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, R)$, on a alors [8] :

$$(29) \quad \begin{aligned} \text{Re } \varphi(X) &= \frac{1}{2} X^* (Z + Z') \cdot X \\ \text{Im } \varphi(X) &= \frac{1}{2} X^* [-i(Z - Z')] \cdot X. \end{aligned}$$

Les matrices $(Z + Z')$ et $-i(Z - Z')$ sont toutes deux hermitiennes [13], ce qui va nous permettre de calculer les densités respectives de $\text{Re } \varphi(X)$ et $\text{Im } \varphi(X)$.

Dans ce but, considérons les deux formes quadratiques φ_1 et φ_2 définies d'après (26) :

$$\begin{aligned} \varphi_1(X) &\triangleq X^* A_1 X \\ \varphi_2(X) &\triangleq X^* A_2 X \end{aligned}$$

avec :

$$(30) \quad A_1 = \frac{1}{2} (Z + Z') \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{i}{2} (Z - Z').$$

Appelons Φ_1 et Φ_2 les fonctions caractéristiques [16] des variables aléatoires φ_1 et φ_2 , un calcul élémentaire [17], fournit :

$$(31) \quad \begin{aligned} \Phi_1(t) &\triangleq \mathbb{E} [\exp(it\varphi_1(X))] \\ &= \det (Id - it A_1 R). \end{aligned}$$

Il faut maintenant expliciter le calcul du déterminant ; pour ce faire on utilise les décompositions en éléments simples de la matrice hermitienne définie positive R , soit :

$$(32) \quad \begin{aligned} R &= V \Delta V^* \\ (V \text{ unitaire, } \Delta \text{ diagonale}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(33) \quad \begin{aligned} \det (Id - it A_1 R) &= \\ &= \det (Id - it A_1 V \Delta^{1/2} \Delta^{1/2} V^*) \\ (\Delta &= \Delta^{1/2} \Delta^{1/2}) \\ &= \det (Id - it \Delta^{1/2} V^* A_1 V \Delta^{1/2}). \end{aligned}$$

La matrice $\Delta^{1/2} \mathbf{V}^* \mathbf{A}_1 \mathbf{V} \Delta^{1/2}$ est elle aussi hermitienne, elle est donc diagonalisable, soit :

$$(34) \quad \Delta^{1/2} \mathbf{V}^* \mathbf{A}_1 \mathbf{V} \Delta^{1/2} = \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{W}^*$$

(W: unitaire et D diagonale).

On a alors :

$$\det(\mathbf{Id} - it\mathbf{A}_1 \mathbf{R}) = \det(\mathbf{Id} - it\mathbf{D})$$

$$= \prod_{j=1}^p (1 - it d_{jj})$$

d'où :

$$\Phi_1(t) = \prod_{j=1}^{rg(\mathbf{A}_1)} (1 - it d_{jj})^{-1}$$

($rg(\mathbf{A}_1) \triangleq \text{rang } \mathbf{A}_1 \leq p$)

$$= \sum_{j=1}^{rg(\mathbf{A}_1)} \frac{\mathbf{B}_j}{1 - it d_{jj}}$$

avec

$$(35) \quad \mathbf{B}_j = (d_{j,j})^{rg(\mathbf{A}_1)-1} \prod_{n=1, n \neq j}^{rg(\mathbf{A}_1)} (d_{n,n} - d_{j,j})^{-1}.$$

On en déduit par T.F. inverse la densité P_1 de $\varphi_1(\mathbf{X})$, soit :

$$(36) \quad P_1(x) = \sum_{j=1}^{rg(\mathbf{A}_1)} \frac{\mathbf{B}_j}{d_{j,j}} e^{-x/d_{j,j}}.$$

Le calcul de la densité de $\varphi_2(\mathbf{X})$ est identique, ainsi que ceux correspondants à d'autres puissances de Z. Ces deux intensités sont des sommes de lois exponentielles dont les paramètres dépendent des valeurs propres de la matrice $\Delta^{1/2} \mathbf{V}^* \mathbf{A}_1 \mathbf{V} \Delta^{1/2}$ qui sont elles-mêmes identiques à celles de la matrice $\mathbf{A}_1 \mathbf{R}$.

Annexe 2

EFFET DU FILTRAGE ET DE LA DÉCIMATION SUR LA BORNE DE CRAMÉR-RAO

Dans le but de filtrer les sorties des fils, on considère un filtre FIR symétrique à q coefficients. Ce filtre permet d'améliorer le rapport signal à bruit puisque les hypothèses usuelles sur la vitesse des sources, le temps d'échantillonnage, le nombre de points de TF impliquent que les \hat{k} sont très petits. Dans le but de décorréler le bruit d'estimation des sorties de fils filtrées $\{\hat{r}_{m,f}(t)\}$, on procède à une décimation d'un facteur au moins égal à q . Les sorties de fils décimées sont ensuite utilisées dans l'algorithme d'estimation de \hat{k} décrit en [8], [9], [11]. L'opération de filtrage-décimation impose cependant de modifier légèrement la borne inférieure de $\text{var}(\hat{k}_m)$ donnée par l'équation (19).

Ainsi la variance d'estimation de l'observation $\hat{r}_{m,f}(t)$ filtrée et décimée devient :

$$(37) \quad \text{var}(\hat{r}_{m,f}(t)) = \text{var}(\hat{r}_m) \cdot \sum_{j=1}^q h_j^2.$$

De plus, soit D le facteur de décimation, le nombre de points considérés après décimation sera N' avec $N' = N/D$. Des calculs strictement analogues à ceux du § 4.2 conduisent à l'expression ci-dessous de la borne inférieure (19) de $\text{var}(\hat{k}_m)$ en sortie de filtrage-décimation

$$(38) \quad \text{var}(\hat{k}_m) \geq \frac{6 \text{var}(\hat{r}_m) \cdot \sum_{j=1}^q h_j^2}{4 (\pi dp)^2 D^2 N' (N'^2 - 1)}.$$

C'est cette borne modifiée qui est utilisée pour les figures 4 et 6. On peut remarquer que cette valeur est sensiblement égale à la précédente car :

$$(39) \quad D^2 N' (N'^2 - 1) \approx \frac{N^3}{D}$$

$$\sum_{j=1}^q h_j^2 \approx \frac{1}{q}.$$

Par conséquent si D est proche de q , on voit que la borne inférieure n'est guère affectée par cette opération.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] O. ZUGMEYER et J. P. LE CADRE, *Méthodes d'intégration temporelle en traitement d'antenne*, Rapport Irisa n° 566, décembre 1990.
- [2] J. P. LE CADRE, O. ZUGMEYER and P. Y. ARQUÈS, *Sonar array processing for slowly varying sources*, *Proceedings of UDT 90*, Paris, May 1990, pp. 1168-1176.
- [3] S. C. NARDONE, A. G. LINDGREN and K. G. GONG, *Fundamental properties and performance of conventional bearing, only target motion analysis*, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-29, n° 9, September 1984, pp. 775-787.
- [4] V. J. AIDALA and S. E. HAMMEL, *Utilization of modified polar coordinates for bearing only tracking*, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-28, March 1983, pp. 283-294.
- [5] J. T. PATZEWITSCH, M. D. SRINATH and C. I. BLACK, *Nearfield performance of passive correlation processing sonars*, *J. Acoust. Soc. Am.*, 64 (5), November 1978, pp. 1412-1423.
- [6] E. WEINSTEIN, *Optimal source localization and tracking from passive array measurements*, *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*, vol. ASSP-30, n° 1, February 1982, pp. 69-76.
- [7] M. T. SAUVET-CAROF, *Résultats expérimentaux de l'intercorrélation compensé en Doppler différentiel*, *Traitement du Signal*, vol. 7, n° 3, pp. 221-232.
- [8] J. P. LE CADRE et O. ZUGMEYER, *Sur les propriétés statistiques des covariances spatiales estimées après rectification, application*, *Traitement du Signal*, vol. 9, n° 2, 1992.
- [9] J. P. LE CADRE et O. ZUGMEYER, *Intégration temporelle en traitement d'antenne*, *Treizième colloque GRETSI*, Juan-les-Pins, 16-20 septembre 1990, pp. 689-692.

- [10] A. BOROVKOV, *Statistique Mathématique*, Éditions MIR, 1987.
- [11] O. ZUGMEYER, *Méthodes d'analyse spatio-temporelle de sources en mouvement*, Thèse de doctorat de l'université de Rennes I, 7 juillet 1992.
- [12] L. KOPP et D. THUBERT, Bornes de Cramer-Rao en traitement d'antenne. Première partie : formalisme, *Traitement du Signal*, vol. 3, n° 3, 1986, pp. 111-125.
- [13] P. LANCASTER and M. TISMENETSKY, *The theory of matrices*, 2^d edition, Academic Press, 1985.
- [14] K. S. MILLER, *Complex stochastic processes. An introduction to theory and application*, Addison-Wesley, 1974.
- [15] B. PORAT and B. FRIEDLANDER, Parametric techniques for adaptive detection of gaussian signals. *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-32, n° 4, August 1984.
- [16] N. L. JOHNSON and S. KOTZ, *Continuous univariate distribution*, 2, Houghton-Mifflin, Boston, 1970.
- [17] M. S. SRIVASTAVA and C. G. KHATRI, *An introduction to multivariate statistics*, North-Holland, 1979.