L'interpolation des suites de variables aléatoires et la stationnarité

Interpolation of Random Sequences and Stationarity

Bernard LACAZE
Institut National Polytechnique de Toulouse
École Nationale Supérieure d'Électrotechnique d'Électronique d'Informatique et d'Hydraulique
ENSEEIHT/GAPSE
2 rue Camichel
31071 Toulouse Cedex

Docteur de 3e cycle en Électronique (1966), Docteur es Sciences Mathématiques (1971). Professeur des Universités depuis 1975 à l'INSA de Toulouse. Activités de recherche en théorie du signal et en mécanique statistique des gaz.

RÉSUMÉ

La formule d'échantillonnage (ou formule de Shannon) a rendu familiers les processus de la forme $A(t) = \sum_{n \in \mathscr{Z}} A_n \mu(t-n)$ où $A_n = A(n)$. Dans le cas où les A_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, on se pose la question de savoir à quelles conditions le processus $A = \{A(t), t \in \mathscr{R}\}$ est stationnaire à un ordre donné.

MOTS CLÉS

Stationnarité stricte au 1er ordre, à l'ordre 2, interpolation, échantillonnage, processus gaussien.

ABSTRACT

The sampling theorem (or Shannon formula) makes familiar the processes having the shape $A(t) = \sum_{n \in \mathscr{Z}} A_n \mu(t-n)$ with $A_n = A(n)$. In the case where the A_n are mutually independent identically distributed random variables, the question arises to know in which conditions the process $A = \{A(t), t \in \mathscr{R}\}$ is stationary to a given order.

KEY WORDS

Strictly stationarity, of order 1, of order 2, interpolation, sampling, gaussian process.

1. Introduction

Dans toute la suite, les variables aléatoires (v.a.) A_n, $n \in \mathscr{Z}$ sont réelles indépendantes, de même loi et $\mu(t)$ est une application suffisamment régulière de $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{R}$ telle que

(1) $\qquad \mu(0) = 1\,, \quad \mu(n) = 0 \qquad n \in \mathscr{Z}^*\,.$

On se propose d'étudier l'existence et la stationnarité du processus aléatoire $A = (A(t), t \in \mathscr{R})$ défini par :

(2) $\qquad A(t) = \sum_{n \in \mathscr{Z}} A_n \mu(t-n) \qquad t \in \mathscr{R}$

(1) fait que $A(n) = A_n$, $n \in \mathscr{Z}$. La suite de v.a. A_n, $n \in \mathscr{Z}$, constitue donc un échantillonnage du processus A et inversement, $A(t)$ est une interpolation de la suite précédente.

D'après le théorème des trois séries de Kolmogorov ([1] p. 392 et [2] p. 83), si $E(A_0) = 0$ et $E(A_0^2) = 1$, $A(t)$ est définie (en moyenne quadratique et presque sûrement) si et seulement si $\sum_{n \in \mathscr{Z}} \mu^2(t-n)$ existe ($\sum_{n \in \mathscr{Z}}$ existe si $\sum_{n=-\infty}^{0}$ et $\sum_{n=0}^{\infty}$ existent).

Rappelons que le processus A est strictement stationnaire à l'ordre n si la loi de probabilité du n-uplet $\{A(t_1+t), A(t_2+t) \ldots, A(t_n+t)\}$ ne dépend pas de t, pour tout $(t_1, t_2 \ldots t_n, t) \in \mathcal{R}^{n+1}$ ([7], p. 37). Bien entendu, la stationnarité stricte à l'ordre n entraîne celle à l'ordre $n-1$. Habituellement, on se contente d'un autre type de stationnarité, dite au sens large qui suppose uniquement que $E[A(t)]$ et $E[A(t)A(t+\tau)]$ existent et sont des quantités indépendantes de t. La stationnarité stricte à l'ordre 2 implique la stationnarité au sens large, (dans la mesure de l'existence du moment d'ordre 2) la réciproque étant en général fausse, sauf dans le cas gaussien.

Si $A(t)$ est défini par (2) tout en étant stationnaire au sens large, alors $\mu(t)$ est sa fonction d'autocorrélation (§ IV.3).

L'intérêt de la stationnarité au sens large est qu'elle introduit de manière naturelle la notion de spectre de puissance.

En effet, si $K(\tau) = E(A(t)A(t+\tau))$ est une fonction continue, alors, $K(\tau)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}\, dS(\omega)$$

où $S(\omega)/2\pi$ est le spectre de puissance du processus A. Comme le montre la suite, la stationnarité du processus A réagit à la fois sur la loi de probabilité des v.a. A_n et sur le spectre de puissance $S(\omega)$.

2. Théorème 1

2.1. HYPOTHÈSES

1. Les v.a. réelles A_n, $n \in \mathcal{Z}$, sont indépendantes (mutuellement), de même loi, et telles que $E(A_0) = 0$, $E(A_0^2) = 1$.

2. μ est une application de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ telle que $\mu(0) = 1$, $\mu(n) = 0$, $n \in \mathcal{Z}^*$ et il existe t_0 tel que $\mu(t_0)$ est différent de 0, 1, -1.

CONCLUSION

La loi de $A(t) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} A_n \mu(t-n)$ ne dépend pas de t si et seulement si

$$\begin{cases} 1 \quad \sum_{n\in\mathcal{Z}} \mu^2(t-n) = 1 \qquad \forall t \in \mathcal{R} \\ 2 \quad A_0 \text{ est normale .} \end{cases}$$

2.2. Les conditions sont suffisantes. D'abord, puisque $E(A_0) = 0$ et $E(A_0^2) = 1$, l'existence (en moyenne quadratique ou presque sûre) de $A(t)$ ne dépend que de celle de $\sum_{n\in\mathcal{Z}} \mu^2(t-n)$, ([1] p. 392). D'autre part, puisque les A_n sont indépendantes et normales :

$$E\left[\exp i\omega\left(\sum_{n=p}^{q} A_n\,\mu(t-n)\right)\right] = $$
$$= \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\sum_{n=p}^{q}\mu^2(t-n)\right) \xrightarrow[\substack{p\to-\infty \\ q\to+\infty}]{} e^{-\omega^2/2}$$

fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite. Ceci entraîne la même propriété pour $A(t)$, $\forall t \in \mathcal{R}$ (Th. de Levy [1] p. 299).

2.3. Les conditions sont nécessaires. Cela découle d'un théorème de Laha et Lukacs ([2] p. 116 ou [3]) qui peut s'énoncer de la manière suivante (pour le cas qui nous concerne) : soit $B = \sum_{n\in\mathcal{Z}} a_n B_n$, $a_n \in \mathcal{R}$ où les B_n, $n \in \mathcal{Z}$ sont des variables aléatoires réelles de même loi, indépendantes (mutuellement) et telles que $E(B_0) = 0$, $E(B_0^2) = 1$. Si au moins deux des a_n sont non nuls, si $\sum_{n\in\mathcal{Z}} a_n^2 \geqslant 1$, et si B a la même loi que B_0, alors cette loi est la loi normale. Ici, A_n joue le rôle de B_n, $\mu(t_0-n)$ celui de a_n et $A(t_0)$, celui de B. Du fait que $\mu(t_0)$ est différent de 0, 1, -1, il existe un entier n_0 tel que $\mu(t_0-n_0)$ a la même propriété puisque $\sum_{n\in\mathcal{Z}} \mu^2(t_0-n) = 1$ ce qui fait que l'hypothèse du théorème de Laha et Lukacs est vérifiée.

Donc $A(t_0)$ ne peut suivre la même loi que les A_n que si ces dernières sont normales.

La démonstration du théorème cité au dessus est difficile et prend en compte les propriétés fines des fonctions caractéristiques (distributions infiniment divisibles et lois stables). Une démonstration élémentaire est donnée en annexe, dans le cas où μ est suffisamment régulière.

2.4. REMARQUES

On peut se convaincre facilement que le théorème 1 est faux sous d'autres hypothèses.

Par exemple, si A_0 suit une loi de Cauchy de densité de probabilité $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ et donc de fonction caractéristique $\psi(t) = e^{-|t|}$, $A(t)$ suit encore une loi de Cauchy pour $\mu(t) = \left(\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2$. Dans ce cas $E(A_0)$ et $E(A_0^2)$ n'existent pas mais $A(t)$ existe p.s. ([1] p. 299 et [2] p. 83). On voit que, pour tout $t \notin \mathcal{Z}$, $\sum_{n\in\mathcal{Z}} \mu^2(t-n) < 1$, ce qui fait que l'hypothèse essentielle du théorème de Laha et Lukacs est mise en défaut. Cette remarque est valable pour l'exemple suivant.

De même, si A_0 suit la loi stable de fonction caractéristique $\psi(t) = \exp[-|t|^{3/2}]$, $A(t)$ suivra la même loi pour $\mu(t) = \left|\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right|^{4/3}$. Dans ce cas $E(A_0) = 0$ mais $E(A_0^2)$ n'existe pas.

Enfin, on peut fabriquer μ de façon que, pour tout $t \in \mathcal{R}$, la suite $\mu(t-n)$, $n \in \mathcal{Z}$, ait un seul terme non nul (et donc égal à ± 1). Dans ce cas, $A(t) = \pm A_n(t)$ et le théorème est évidemment en défaut.

3. Construction d'une famille de fonctions d'interpolation

3.1*a*) On cherche à construire l'ensemble P des applications μ de $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} C_1 & \mu(0)=1,\ \mu(n)=0, \quad n\in\mathscr{Z}^* \\ C_2 & \sum_{n\in\mathscr{Z}} \mu^2(t-n)=1 \quad \forall t\in\mathscr{R} \end{cases}$$

C_1 et C_2 interviennent dans le théorème 1.

3.1*b*) Soit P′ l'ensemble des applications f de $\mathscr{R}^2$ dans $\mathscr{C}$ telles que $f(t,\omega)$ est une fonction mesurable de ω pour tout $t\in\mathscr{R}$ et vérifie ($t=\bar{t}+\underline{t}$ où $\bar{t}$ et $\underline{t}$ désignent les parties entières et fractionnaires de t) :

$$D_1 \begin{cases} f(t,\omega)=f(\underline{t},\omega)\,e^{i\bar{t}\omega} \\ f(t,\omega) \text{ est périodique par rapport} \\ \quad \text{à } \omega \text{ de période } 2\pi \end{cases}$$

$$D_2 \quad f(0,\omega)=1 \qquad \omega\in\mathscr{R}$$

$$D_3 \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t,\omega)|^2\,d\omega = 1 \qquad t\in\mathscr{R}.$$

Un élément f de P′ est construit à partir de n'importe quelle famille d'applications mesurables (/ω pour tout t) de $(0,1)\times(-\pi,+\pi)$ dans $\mathscr{C}$, normalisées à partir des conditions D_2 et D_3 puis prolongées à partir de D_1.

3.1*c*) À tout élément $\mu\in P$ correspond un élément unique $f\in P'$ tel que

$$\mu(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t,\omega)\,d\omega.$$

Posons : $g(t,\omega)=\sum_{n\in\mathscr{Z}}\mu(t-n)\,e^{in\omega}$

$g(t,\omega)$ est, pour tout t, la somme d'une série de Fourier. C'est un élément de $L^2([-\pi,+\pi],d\omega)$ d'après C_2, pour tout t.

On voit facilement que g vérifie D_1 (car $g(t+k,\omega)=g(t,\omega)\,e^{ik\omega}$), D_2 (à cause de C_1) et D_3 (à cause de C_2 et de l'égalité de Parseval). En effet, $\mu(t-n)$ est le n-ième coefficient de Fourier de $g(t,\omega)$, fonction de ω de période 2π. De plus, dans $L^2(-\pi,+\pi)$:

$$\mu(t-n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(t,\omega)\,e^{-in\omega}\,d\omega.$$

En définitive, $g\in P'$ et $\mu(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(t,\omega)\,d\omega$.

L'unicité découle de l'unicité des séries de Fourier.

3.1*d*) Inversement, si $f\in P'$ et si $\mu(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t,\omega)\,d\omega$ est réelle, alors $\mu\in P$. En effet, C_1 découle de D_2 et D_1 ($f(n,\omega)=e^{in\omega}$, $n\in\mathscr{Z}$). D'autre part, C_2 exprime l'égalité de Parseval ($\mu(t-n)$ est le coefficient de Fourier de $f(t,\omega)$ d'après D_1, f étant L^2 d'après D_3).

Ainsi, pour construire μ susceptible de stationnariser à l'ordre 1 le processus défini par (2), il suffit de construire f de la manière indiquée au-dessus.

3.2. EXEMPLES

a) $\mu(t)=\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$ correspond à $f(t,\omega)=e^{i\omega t}$, $\omega\in(-\pi,+\pi)$.

Ce cas correspond à la « formule d'échantillonnage » ou de « Shannon ».

b) $\mu(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{t^{3/2}}{\underline{t}^2+\bar{t}^2}\sqrt{\text{th}\,(\underline{t}+i\bar{t})\dfrac{\pi}{2}}$ correspond à

$$f(t,\omega)= \begin{cases} 1 & \text{pour } t=0 \\ \sqrt{\dfrac{2\pi t}{1-e^{-2\pi t}}} & \text{pour } t\in\,]0,1],\ \omega\in(-\pi,+\pi) \end{cases}$$

c) f de la forme $f(t,\omega)=e^{i\omega t}g(\omega)$, $\omega\in(-\pi,+\pi)$ appartient à P′ si et seulement si $g(\omega)=1$ (d'après D_2).

d) Plus généralement, pour que $f(t,\omega)=e^{i\alpha(t,\omega)}g(\omega)\geqslant 0$, $\alpha(t,\omega)$ réel pour $\omega\in(-\pi,+\pi)$, appartienne à P′, il faut et il suffit que $(p.p)\ g(\omega)=1$, $\alpha(0,\omega)=0$ (modulo 2π).

3.3. Soit $s(\omega)$ la densité spectrale de puissance d'un processus stationnaire au sens large $X=\{X(t),\ t\in\mathscr{R}\}$. Dans la reconstruction après échantillonnage à pas unité de X, on utilise [6] :

$$\alpha(t,\omega)=\sum_{n\in\mathscr{Z}} e^{it(\omega+2n\pi)}s(\omega+2n\pi) \quad \omega\in[-\pi,+\pi].$$

On peut reconstruire linéairement et sans erreur $X(m.q)$ si et seulement si, pour tout t, (et $p.p/\omega$) :

$$|\alpha(t,\omega)|=\alpha(0,\omega)$$

ce qui revient à ce que $s(\omega+2k\pi)$, pour $k\neq 0$, soit nul lorsque $s(\omega)$ ne l'est pas.

Dans le cas où, pour tout ω, $\alpha(0,\omega)=1$ (cela assure que les $X(n)$ sont non corrélés), alors $\alpha\in P'$ et l'élément correspondant $\mu\in P$ est tel que :

$$X(t)=\sum_{n\in\mathscr{Z}}\mu(t-n)\,X(n).$$

4. Théorème 2

4.1. HYPOTHÈSES

1. Les v.a. réelles A_n, $n\in\mathscr{Z}$, sont indépendantes (mutuellement), de même loi et telles que $E(A_0)=0$, $E(A_0^2)=1$.

2. μ est une application continue de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ telle que $\mu(0) = 1$, $\mu(n) = 0$, $\forall n \in \mathcal{Z}^*$.

CONCLUSION

$A(t) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} A_n \, \mu(t-n)$ est strictement stationnaire à l'ordre 2 (la loi de $\{A(t), A(t+\tau)\}$ ne dépend pas de t) si et seulement si :

1. A_0 est normale.

2. $\exists s$ mesurable telle que $\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} s(\omega)\, d\omega$ où $s(\omega) = 0$ ou 1 et $\sum_{n \in \mathcal{Z}} s(\omega + 2n\pi) = 1$, $\forall \omega \in \mathcal{R}$.

Dans ce cas, $A = \{A(t), t \in \mathcal{R}\}$ est un processus gaussien stationnaire au sens strict.

4.2. Montrons d'abord que les conditions sont suffisantes. Celle portant sur s fait que l'on peut écrire :

$$(3) \quad \mu(t-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\omega} \varphi_t(\omega)\, d\omega$$

$$\varphi_t(\omega) = e^{it\omega} \sum_{k \in \mathcal{Z}} e^{2i\pi kt} s(\omega + 2k\pi).$$

D'après l'hypothèse, à chaque ω correspond un seul entier, soit $k(\omega)$, tel que $s(\omega + 2\pi k(\omega)) = 1$ et $s(\omega + 2\pi j) = 0$ pour j entier différent de $k(\omega)$. k est évidemment mesurable, donc :

$$(4) \quad \varphi_t(\omega) = e^{it\omega + 2i\pi k(\omega)t}.$$

D'autre part, puisque les A_n sont indépendantes centrées et réduites :

$$(5) \quad E[A(t)\,A(t+\tau)] = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \mu(t-n)\,\mu(t+\tau-n).$$

En utilisant l'égalité de Parseval dans (3), (4), (5), on obtient :

$$E[A(t)\,A(t+\tau)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_t(\omega)\, \varphi^*_{t+\tau}(\omega)\, d\omega$$

soit

$$E[A(t)\,A(t+\tau)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-i\tau\omega - 2i\pi k(\omega)\tau}\, d\omega$$

quantité indépendante de t. Donc, le processus $\{A(t), t \in \mathcal{R}\}$ est stationnaire au sens large. Si l'on suppose que A_0 est normale, il en est de même pour tout $n \in \mathcal{Z}$. Le fait que les A_n sont mutuellement indépendantes implique alors que A est un processus gaussien. Dans ce cas, il est bien connu que la stationnarité au sens large équivaut à la stationnarité stricte à tous les ordres. Ce qui fait que la condition du théorème est suffisante.

4.3. Supposons que $A(t)$ existe en moyenne quadratique et, de plus, est stationnaire.

On a toujours :

$$(5) \quad E[A(t)\,A(t+\tau)] = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \mu(t-n)\,\mu(t+\tau-n)$$

qui doit être indépendante de t. En faisant $t = 0$, on obtient :

$$(6) \quad E[A(t)\,A(t+\tau)] = \mu(\tau)$$

puisque $\mu(n) = 0$, $n \in \mathcal{Z}^*$ et $\mu(0) = 1$. Comme μ est continue par hypothèse, le théorème de Bochner-Khinchine [5] implique l'existence de $S(\omega)$ réelle, non décroissante telle que $S(-\infty) = 0$, $S(+\infty) = 2\pi$ et telle que :

$$(7) \quad \mu(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dS(\omega).$$

$S(\omega)/2\pi$ est le spectre de puissance de A. De (7), on tire :

$$\mu(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\omega} \sum_{j \in \mathcal{Z}} dS(\omega + 2j\pi) \quad n \in \mathcal{Z}$$

$\mu(n) = 0$ pour $n \in \mathcal{Z}^*$ et $\mu(0) = 1$, impliquent (unité des transformées de Fourier des mesures bornées [5] p. 45) :

$$(8) \quad \sum_{n \in \mathcal{Z}} dS(\omega + 2n\pi) = d\omega.$$

Il s'ensuit que le spectre de puissance du processus A est absolument continu et que sa dérivée (après rectification sur un ensemble de mesure nulle) :

$$\sum_{n \in \mathcal{Z}} s(\omega + 2n\pi) = 1 \qquad s(\omega) = \frac{dS}{d\omega} \qquad \forall \omega \in \mathcal{R}.$$

On voit que la condition énoncée dans le théorème (celle portant sur s) sera nécessaire si l'on démontre que s ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. On trouvera dans [6] une démonstration plus générale que celle qui suit.

4.4. Posons :

$$(9) \quad f(t, \omega) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \mu(t-n)\, e^{in\omega}$$

ou ce qui est équivalent :

$$(10) \quad \mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t, \omega)\, d\omega$$

comme il est montré dans § 3, (9) étant défini au sens L^2 pour tout t d'après la condition C_2. Le théorème de Plancherel, (5) et (6) permettent d'écrire :

$$\mu(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t, \omega)\, f^*(t+\tau, \omega)\, d\omega$$

ou encore :

$$\mu(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\underline{t}, \omega)\, f^*(\underline{t+\tau}, \omega)\, e^{i(\bar{t} - \overline{t+\tau})}\, d\omega$$

$$(11)\quad \mu(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\underline{t},\omega)\,f^{*}(\underline{t+\tau},\omega)\,e^{i(\bar{t}-\overline{t+\tau})}\,d\omega$$

puisque $f(t,\omega)=f(\underline{t},\omega)\,e^{i\bar{t}\omega}$, $\underline{t}=\bar{t}+\underline{t}$.

Pour τ entier, (11) s'écrit :

$$\mu(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(\underline{t},\omega)|^{2}\,e^{-in\omega}\,d\omega\quad \forall n\in\mathscr{Z}$$

donc $|f(t,\omega)|^2$ doit être indépendante de $\underline{t}$. En conséquence :

$$f(\underline{t},\omega)=g(\omega)\,e^{i\alpha(\underline{t},\omega)}$$

où $g(\omega)\geqslant 0$ et $\alpha(\underline{t},\omega)$ est réelle. Cette représentation implique (§ 3.2*d*) :

$$g(\omega)=1\qquad \alpha(0,\omega)=0\quad (p\,.\,p)$$

d'où :

(12)

$$f(t,\omega)=e^{i\alpha(t,\omega)}\ \text{ avec }\ \begin{cases}\alpha(0,\omega) & =0\\ \alpha(t,\omega) & =\alpha(\underline{t},\omega)+\bar{t}\,\omega\,.\end{cases}$$

On a donc, à la fois, d'après (10), et (12) et (7) :

$$\mu(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i\alpha(t,\omega)}\,d\omega$$

$$\mu(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i\omega t}\sum_{k\in\mathscr{Z}}e^{2i\pi kt}\,s(\omega+2\,k\pi)\,d\omega$$

ou encore :

$$\mu(t+n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i\alpha(t,\omega)+in\omega}\,d\omega$$

$$\mu(t+n)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{in\omega}\left[e^{i\omega t}\sum_{k\in\mathscr{Z}}e^{2\,i\pi kt}\,s(\omega+2\,k\pi)\right]d\omega$$

ce qui implique, pour tout t (preqeue partout /ω) :

$$e^{i\alpha(t,\omega)}=e^{i\omega t}\sum_{k\in\mathscr{Z}}e^{2\,i\pi kt}\,s(\omega+2\,k\pi)$$

soit :

$$(13)\qquad \left|\sum_{k\in\mathscr{Z}}e^{2\,i\pi kt}\,s(\omega+2\,k\pi)\right|=1\,.$$

L'expression dont on prend le module est, à ω fixé quelconque, une fonction caractéristique, celle d'une variable aléatoire prenant la valeur $2\,\pi k$ avec la probabilité $s(\omega+2\,k\pi)$. L'égalité (13) implique qu'elle est dégénérée ([4] p. 19). Donc, à chaque ω, correspond un entier $k(\omega)$ tel que $s(\omega+2\,k(\omega)\,\pi)=1$ d'où $s(\omega+2\,j\pi)=0$ pour j entier différent de $k(\omega)$. En conséquence, s ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, ce qui achève la démonstration.

4.5. REMARQUE

Sous les hypothèses du théorème 2 (en particulier l'indépendance des A_n) le seul processus $A(t)=\sum_{n\in\mathscr{Z}}A_n\,\mu(t-n)$ stationnaire à l'ordre 2 et à spectre nul à l'extérieur de $(-\pi,+\pi)$, est gaussien et « blanc », ($s(\omega)=1$ sur $(-\pi,+\pi)$, et 0 à l'extérieur). Dans ce cas, on a obligatoirement $\mu(t)=\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$, d'après (7).

On obtiendra un exemple simple de processus $A(t)$ stationnaire à l'ordre 1 mais pas à l'ordre 2 en prenant $\mu(t)=\cos\dfrac{\pi t}{2}$ sur $(-1,1)$ et 0 ailleurs.

5. Conclusion

Les transformations numériques analogiques faisant passer du temps discret au temps continu interviennent constamment en théorie et en pratique de la communication. Dans la plupart des cas, elles amènent à des processus de la forme $A(t)=\sum_{n\in\mathscr{Z}}\mu_n(t)\,A_n$, avec, le plus souvent $\mu_n(t)=\mu(t-n)$ ce qui exprime une certaine permanence du dispositif de transformation. Dans un certain nombre de situations, on considère que les v.a. A_n ne sont pas liées statistiquement, ce qui s'exprime par leur indépendance (deux à deux ou mutuelle) ou leur non-corrélation. C'est le cas dans les problèmes de prédiction (décomposition de Wold par exemple) ou lorsque l'on utilise des processus ARMA (et les processus connexes).

Le but de cet article était de faire apparaître que les hypothèses de stationnarité du processus $A=\{A(t),\,t\in\mathscr{R}\}$ associées à l'indépendance (mutuelle) des A_n pouvaient être contraignantes et par exemple imposer la loi de ces dernières v.a.

Plus précisément, si le processus aléatoire $A(t)=\sum_{n\in\mathscr{Z}}A_n\,\mu(t-n)$ est une interpolation de la suite $\{A_n,\,n\in\mathscr{Z}\}$ où les A_n sont indépendantes (mutuellement), de même loi, possédant deux moments finis, et si $\mu(t)$ prend au moins une valeur différente de 0, ± 1, alors la loi de probabilité de $A(t)$ est indépendante de t si et seulement si les A_n (et donc $A(t)$) sont des variables aléatoires normales. Dans ce cas, le processus $\{A(t),\,t\in\mathscr{R}\}$ est gaussien.

De plus, qu'il soit gaussien stationnaire implique que son spectre de puissance a la forme particulière indiquée dans le théorème 2.

Manuscrit reçu le 19 novembre 1991.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Renyi, Calcul des probabilités, Dunod, 1966.
[2] E. Lukacs, Stochastic convergence, Heath Math Mono, 1968.

[3] R. G. Laha, E. Lukacs, On a linear form whose distribution is identical with that of a monomial, *Pacific J. Math.*, 15 (1965), 207-214.

[4] E. Lukacs, Characteristic functions, Griffin, 1970.

[5] J. Lamperti, Stochastic processes, Springer-Verlag, 1977.

[6] S. P. Lloyd, A sampling theorem for stationary (Wide Sense) stochastic processes, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 92 (1959) 1-12.

[7] A. P. Sage, J. L. Melsa, Estimation theory with applications to communication and control, Mac Graw Hill, 1971.

[8] M. Arnaudies, Analyse, 4ᵉ édition Dunod, 1977.

Annexe

a) On suppose que les v.a. réelles A_n, $n \in \mathscr{Z}$, sont indépendantes (mutuellement), de même loi, telle que $E(A_0) = 0$ et $E(A_0^2) = 1$.

De plus, μ est une application de $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{R}$ possédant deux dérivées et qui vérifie :

H_1 $\mu(0) = 1, \quad \mu(n) = 0, \quad n \in \mathscr{Z}^*$

H_2 $\sum_{n \in \mathscr{Z}} \mu^2(t-n) = 1 \qquad t \in \mathscr{R}$

H_3 $\mu''(0) \neq 0$ et pour un certain $a > 0$,

$$|\mu(t)| < \frac{a}{t}, \quad |\mu'(t)| < \frac{a}{t}, \quad |\mu''(t)| < \frac{a}{t}.$$

Alors $A(t) = \sum_{n \in \mathscr{Z}} A_n \mu(t-n)$ a même loi de probabilité que A_0 si et seulement si A_0 est normale.

b) H_1 est la propriété commune à toute fonction d'interpolation : H_1 fait que $A(n) = A_n$, $n \in \mathscr{Z}$. La condition H_2 assure l'existence de $A(t)$ et l'indépendance de ses deux premiers moments par rapport à t. H_3 permet de dériver terme à terme $\sum_{n \in \mathscr{Z}} \mu^2(t-n)$, et implique en particulier que $\mu'(0) = 0$. On utilisera cette hypothèse pour dériver d'autres séries qui apparaissent dans la suite. On remarquera que H_1, H_2 et H_3 sont vérifiées pour $\mu(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ et aussi pour l'exemple du § III.2.b.

c) Le problème, comme indiqué dans le § II, est de démontrer que la condition est nécessaire : pour que $A(t)$ soit de même loi que A_0, il faut que A_0 soit normale. Soit $\varphi(\omega) = E[e^{i\omega A_0}]$ la fonction caractéristique commune des A_n (et de $A(t)$). Comme il s'agit de variables aléatoires mutuellement indépendantes :

$$\varphi(\omega) = \prod_{k \in \mathscr{Z}} \varphi[\omega\mu(t-k)]. \tag{14}$$

On démontre d'abord que φ ne peut pas s'annuler. Supposons le contraire et soit ω_0 le plus petit des $\omega > 0$ tels que $\varphi(\omega) = 0$ (si φ s'annule, ω_0 est parfaitement défini et non nul car φ est continue et $\varphi(0) = 1$).

Le produit infini (14) est convergent ([8] p. 291) car $\varphi(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{2} + o(\omega^2)$, $E(A_0) = 0$, $E(A_0^2) = 1$ et du fait de H_2. En conséquence, (14) s'annulera en ω_0 si au moins un de ses éléments s'annule. Donc, à tout t correspond un entier $k(t)$ tel que $\varphi[\omega_0 \mu(t - k(t))] = 0$.

Si $t - k(t)$ n'est pas bornée, on pourra trouver, puisque $\mu(t)$ tend vers 0 à l'infini, un α arbitrairement proche de 0 et tel que $\varphi[\omega_0 \alpha] = 0$ ce qui est contradictoire avec la continuité de φ et le fait que $\varphi(0) = 1$. Admettons à contrario que $|t - k(t)| \leq \beta < \infty$. Si l'on peut trouver t tel que $t - k(t)$ soit aussi proche que l'on veut d'un entier non nul, on se trouve dans la même situation que précédemment, puisque $\mu(n) = 0$, $n \in \mathscr{Z}^*$ et $\mu(t)$ est continue.

Dans le cas contraire, $\exists \varepsilon > 0$ tel que l'image de l'application $t \to t - k(t)$ contient l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Alors :

$$\varphi[\omega_0 \mu(x)] = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [-\varepsilon, +\varepsilon].$$

Par hypothèse, $\mu(0) = 1$, $\mu''(0) \neq 0$ et aussi $\mu'(0) = 0$, $\mu''(0) < 0$ (voir *b*).

Il s'ensuit que, dans un voisinage de 0 et pour $x \neq 0$, on a $|\mu(x)| < 1$. Soit x_0 un point de ce voisinage. On a $\varphi(\omega_1) = 0$ avec $\omega_1 = \omega_0 \mu(x_0) > 0$ et $\omega_1 > \omega_0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle ω_0 est le plus petit des $\omega > 0$ tel que $\varphi(\omega) = 0$. Donc φ ne s'annule pas.

d) On peut donc prendre son logarithme. Soit $\psi(\omega) = \ln \varphi(\omega)$ la partie principale de ce dernier. (14) s'écrit :

$$\psi(\omega) = \sum_{n \in \mathscr{Z}} \psi[\omega\mu(t-n)]. \tag{15}$$

De par l'existence de $E(A_0)$ et $E(A_0^2)$, ψ est deux fois dérivable et H_3 permet de dériver terme à terme deux fois par rapport à t l'expression (15) :

$$0 = \sum_{n \in \mathscr{Z}} [\mu''(t-n)\psi'(\omega\mu(t-n)) + \\ + \omega\mu'^2(t-n)\psi''(\omega\mu(t-n))]$$

soit pour t entier, en tenant compte de ce que $\mu'(0) = 0$, $i\psi'(0) = E(A_0) = 0$, $-\psi''(0) = E(A_0^2) = 1$:

$$0 = \mu''(0)\psi'(\omega) - \omega \sum_{n \in \mathscr{Z}} \mu'^2(n).$$

Enfin, puisque $\psi(0) = 0$, $\mu''(0) \neq 0$:

$$\psi(\omega) = \frac{\omega^2}{2\mu''(0)} \sum_{n \in \mathscr{Z}} \mu'^2(n)$$

soit obligatoirement (puisque $\varphi''(0) = -1$) :

$$\varphi(\omega) = e^{-\omega^2/2}$$

fonction caractéristique d'une loi normale réduite. En conséquence, si A_0 et $A(t)$ ont la même loi pour tout t, il s'agit de la loi normale.