

## Une transformée en ondelettes rapide

### *A fast wavelet transform*



#### Pierre BONNET

Laboratoire CASM, Département  
Génie Mécanique, Développement —  
INSA de LYON, 20 avenue Albert  
Einstein, 69621 VILLEURBANNE Cedex

Équipe d'Analyse Harmonique,  
Laboratoire d'Analyse et probabilités ;  
Institut des Sciences de la Matière  
Université Claude Bernard (LYON I),  
43 bd du 11 Novembre 1918,  
69622 VILLEURBANNE Cedex

Enseignant-chercheur en mathématiques, Maître de conférences à l'INSA de LYON. Principaux centres d'intérêts : analyse harmonique commutative et non commutative, groupes de Lie, application à la physique



#### Didier REMOND

Laboratoire CASM, département Génie  
Mécanique, Développement — INSA  
de LYON, 20 avenue Albert Einstein,  
69621 VILLEURBANNE Cedex

Ingénieur INSA (Mécanique), Chercheur doctorant à l'INSA. Principaux centres d'intérêts : analyse expérimentale sur le bruit d'engrènement, nouvelles techniques de traitement du signal et leurs applications.

### RÉSUMÉ

L'analyse par ondelettes a suscité ces dernières années un intérêt considérable et trouve des applications dans de nombreuses disciplines. Partant du rapprochement entre une technique particulière d'analyse par ondelettes, l'analyse par octaves, et de la technique bien connue de la Transformée de Fourier Rapide (T.F.R.), on définit une notion d'ondelettes discrètes et on construit différentes bases orthonormales d'ondelettes répondant à cette définition. On décrit un algorithme de transforma-

tion en ondelettes rapide (T.O.R.) calqué sur l'algorithme de T.F.R. Construction de bases et algorithmes sont intimement liés.

#### MOTS CLÉS

Représentation temps-échelle, ondelettes, discrétisation, transformée rapide, algorithme.

### SUMMARY

*The Wavelet analysis is of most interest since last years and the possible applications of this theory are effective in numerous disciplines. From the comparison between a particular technique of wavelet analysis (the octave analysis) and the well-known technique of Fast Fourier Transform (F.F.T.), this paper define the notion of discrete wavelets and different orthonormal bases that are developped in agreement with this definition. We describe an algorithm of fast Wavelet Transform (F.W.T.) based on*

*the F.F.T. algorithm. The construction of wavelet bases and the algorithm are deeply linked.*

#### KEY WORDS

*Time-scale representation, wavelets, discretization, fast transform, algorithm.*

### Introduction

Le présent travail est fondé sur le rapprochement de deux méthodes :

— la transformée de Fourier rapide ou T.F.R. (F.F.T. en anglais),

— la construction de bases d'ondelettes à partir d'analyses multi-échelles.

Rappelons brièvement le principe de ces deux méthodes :

— La transformée de Fourier rapide est utilisée pour l'analyse en fréquence d'un signal lorsque ce signal et sa transformée de Fourier peuvent tous deux être raisonnablement approchés par des fonctions d'une variable dis-

crète. Dans ces conditions, la transformée de Fourier continue (i.e. la transformée de Fourier sur le groupe  $\mathbb{R}$ ) peut être remplacée par la transformée de Fourier sur le groupe  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Lorsque  $N$  est une puissance de 2, il existe un algorithme extrêmement rapide de calcul de cette transformée de Fourier par dichotomies successives. Le calcul de la transformée de Fourier se réduit finalement à une suite de multiplications par des matrices  $2 \times 2$ .

— L'analyse multi-échelles ou analyse multi-résolutions ([2], [4], [8], [9], [10]) consiste, dans le cas de signaux continus, à se donner une suite croissante  $(H_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces vectoriels fermés de  $L_2(\mathbb{R})$ ; cette suite est telle qu'on passe de  $H_j$  à  $H_{j+1}$  au moyen d'une dilatation de rapport égal à deux. Chaque espace  $H_j$  est stable par les translations d'amplitude  $2^{-j}$ , et il existe une fonction  $\phi$  dans  $H_0$  telle que, pour chaque  $j$ , les fonctions  $\phi_{jk}$  déduites de  $\phi$  par les dilatations de rapport  $2^j$  et par les translations d'amplitude  $k \times 2^{-j}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) forment une base hilbertienne de  $H_j$ . On sait alors, à partir d'une telle analyse multi-échelles, construire une fonction  $\psi$  de  $H_1$  orthogonale à  $H_0$  telle que les fonctions  $\psi_{jk}$  déduites de  $\psi$  par les dilatations de rapport  $2^j$  et par les translations d'amplitude  $k \times 2^{-j}$  forment une base hilbertienne de  $L_2(\mathbb{R})$  appelée **base d'ondelettes**. La fonction  $\psi$ , quant à elle, est l'**ondelette analysante**. La décomposition d'un signal sur la base  $\psi_{jk}$  s'interprète comme une **analyse en temps-échelle** :

— pour chaque  $j$ , la projection sur  $H_j$  correspond à une partie du signal concentrée autour d'une gamme de fréquences (les fréquences doublant quand on passe de  $j$  à  $j+1$ , on parle d'analyse en octave);

— pour chaque  $j$ , la décomposition sur les  $\psi_{jk}$  correspondants décrit une analyse en temps de pas  $2^{-j}$ .

Des rapprochements sont à effectuer entre les deux méthodes :

— d'une part, toutes deux font intervenir un processus de dichotomie,

— d'autre part, lorsqu'on construit des ondelettes à l'aide d'une analyse multi-échelles, ce ne sont, en général, pas ces ondelettes elles-mêmes mais leurs transformées de Fourier qui sont données explicitement. Ainsi, tout calcul effectif des « coefficients d'ondelettes » d'un signal fait intervenir, à un moment ou à un autre, une transformée de Fourier que, numériquement, on détermine par transformée de Fourier rapide.

Ces rapprochements nous ont conduit à nous poser la question suivante :

ne pourrait-on pas construire directement des familles d'ondelettes discrétisées à partir d'analyses multi-échelles sur le groupe  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , et associer à de telles familles une méthode rapide de calcul des coefficients d'ondelettes ?

On montre ici que la réponse à cette question est positive : on donne une définition des analyses multi-échelles et des ondelettes discrètes, on obtient un procédé de construction de toutes les familles d'ondelettes possibles, ainsi qu'un algorithme de calcul des coefficients d'ondelettes calqué sur l'algorithme de T.F.R., algorithme qui n'est pas sans lien avec les algorithmes d'analyse par ondelettes cons-

truits par S. MALLAT [12] à partir des travaux de I. DAUBECHIES [1].

Bien entendu, l'algorithme que nous allons décrire n'est, comme l'algorithme de T.F.R., applicable qu'à des signaux pour lesquels la contribution des fréquences supérieures à  $N/2$  est négligeable (signaux vérifiant la condition de Shannon).

La section 1 donne les principaux rappels sur la T.F.R. nécessaires à la compréhension de la suite de l'article. La partie 2 définit la version périodique discrète des analyses multi-échelles et des ondelettes. La partie 3 introduit la transformée en ondelettes rapide directe et inverse. Elle décrit l'algorithme de calcul directement déduit des démonstrations de 2. Dans la partie 4, nous présentons des exemples qui nous ont permis de vérifier la validité de l'algorithme et qui, contenant des aspects simples d'un signal, peuvent servir à obtenir un « dictionnaire ».

## 1. Rappels sur la T.F.R.

Nous présentons ici les aspects de la T.F.R. qui motivent notre démarche et peuvent aider à sa compréhension.

Pour une approche plus approfondie, on pourra se référer à [2]. Concernant l'analyse harmonique commutative et les représentations de groupes commutatifs, le lecteur pourra se référer à [6].

### 1.1. TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

Étant donné un entier  $N$  strictement supérieur à 1, considérons le groupe fini  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  muni comme mesure de Haar de sa mesure dénombrement. L'espace hermitien  $L_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  n'est autre que  $\mathbb{C}^N$  muni de son produit scalaire hermitien canonique défini par :

$$(1) \quad \langle f | g \rangle = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \overline{f(\ell)} \cdot g(\ell).$$

Un élément de  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  sera noté

$\ell$  (ou  $k$ ) lorsqu'il représente un temps discrétisé,  
 $m$  (ou  $\rho$ ) lorsqu'il représente une fréquence discrétisée.

Dans la suite de l'exposé, les variables  $\ell$  ou  $m$  seront représentées par un entier compris entre 0 et  $N-1$  (bien qu'il soit physiquement plus satisfaisant de centrer la variable fréquentielle  $m$  en 0).

On notera  $\delta = (\delta_\ell)_{0 \leq \ell \leq N-1}$  la base de  $L_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  définie par :

$$(2) \quad \delta_\ell(\ell') = \delta_{\ell\ell'} \quad (\text{symbole de Kronecker}),$$

et  $\varepsilon = (\varepsilon_m)_{0 \leq m \leq N-1}$  la base orthonormale de  $L_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  définie par :

$$(3) \quad \varepsilon_m(\ell) = N^{-1/2} \cdot e^{2\pi i \ell m / N}.$$

La transformée de Fourier (discrète) d'une fonction  $f(\ell)$  de  $L_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  est la fonction  $Ff(m)$  définie par :

$$(4) \quad Ff(m) = N^{-1/2} \cdot \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \cdot e^{-2\pi i \ell m/N}$$

tandis que  $f$  se déduit de  $Ff$  au moyen de la transformée de Fourier inverse par :

$$(5) \quad f(\ell) = N^{-1/2} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} Ff(m) \cdot e^{2\pi i \ell m/N}$$

Le facteur de normalisation  $N^{-1/2}$  est tel que la transformation de Fourier et la transformation de Fourier inverse sont des isométries de l'espace  $L_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  sur lui-même.

Notons  $T(k)$  l'opérateur de translation d'amplitude  $k$  dans  $L_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ , de sorte que  $T$  est une représentation du groupe  $\mathbb{Z}$  (ou du groupe  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  si l'on considère  $k$  comme un entier modulo  $N$ ) dans  $L_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ . Alors  $\varepsilon_m$  est une fonction propre de  $T(k)$  pour la valeur propre  $e^{-2\pi i k m/N}$ , tandis que la transformée de Fourier de  $T(k)f$  est donnée par :

$$(6) \quad FT(k)f(m) = e^{-2\pi i k m/N} \cdot Ff(m)$$

## 1.2. PRINCIPE DE DICHOTOMIE

Supposons  $N$  pair, et posons  $N = 2N'$ ; posons également, pour  $r = 0$  ou  $1$  :

$$(7) \quad F'f(m', r) = \sum_{\ell'=0}^{N'-1} f(2\ell' + r) \cdot e^{-2\pi i \ell' m'/N'}$$

ainsi, au facteur de normalisation près,  $F'f(\cdot, r)$  est la transformée de Fourier discrète sur  $\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}$  de la fonction  $f(2\cdot + r)$ . En omettant les facteurs de normalisation, il vient alors, pour  $0 \leq m' \leq N' - 1$  et  $s = 0$  ou  $1$  :

$$(8) \quad Ff(m' + sN') = \sum_{r=0}^1 (-1)^{rs} e^{-\pi i r m'/N'} F'f(m', r)$$

ce qui matriciellement s'écrit :

$$(9) \quad \begin{pmatrix} Ff(m') \\ Ff(m' + N') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^{m'} \\ 1 & \omega^{m'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'f(m', 0) \\ F'f(m', 1) \end{pmatrix}$$

avec

$$(10) \quad \omega = e^{-\pi i/N'}$$

et se symbolise au moyen du « papillon élémentaire » de la figure 1 :

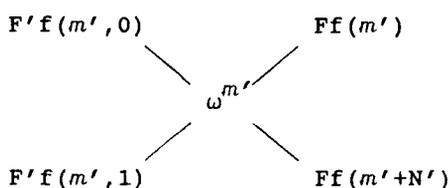


Figure 1.

On a de même, toujours au facteur de normalisation près :

$$(11) \quad \begin{pmatrix} F'f(m', 0) \\ F'f(m', 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^{m'} & -\omega^{m'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ff(m') \\ Ff(m' + N') \end{pmatrix}$$

## 1.3. TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE

On suppose désormais  $N = 2^J$  ( $J \in \mathbb{N}^*$ ).

On peut alors réitérer le procédé de dichotomie et remonter ainsi jusqu'à  $f(\ell)$ . La transformée de Fourier discrète se ramène ainsi à une suite de « papillons élémentaires » qu'on représente par le papillon de T.F.R.

Dans ce papillon, on pose :

$$\omega_j = e^{-2\pi i / 2^j}$$

La figure 2 illustre le « papillon » de T.F.R. dans le cas  $J = 3$ .

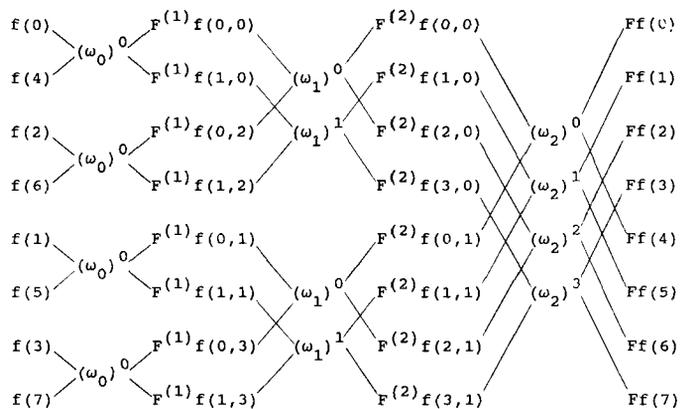


Figure 2.

Bien entendu, on peut former un papillon analogue pour la transformée de Fourier inverse ; il se déduit de celui de la figure 2 en remplaçant partout  $\omega_j$  par son conjugué.

## 2. Analyses multi-échelles discrètes

Le passage du cas continu au cas discret introduit une difficulté dans la définition des analyses multi-échelles et des bases d'ondelettes. En effet, comme il n'existe pas d'opérateurs inversibles de dilatation, on ne peut imposer une forme a priori aux changements d'échelles, ni par conséquent déduire toutes les ondelettes  $\psi_{jk}$  d'une même ondelette analysante. Nous définirons donc, dans un premier temps, des « analyses multi-échelles sans dilatation » que nous appellerons analyses par dichotomies et des « ondelettes sans dilatation » que nous appellerons pré-ondelettes. Ce n'est qu'après avoir défini ces objets et

après les avoir construits explicitement, que nous leurs imposerons une forme particulière pour obtenir les analyses multi-échelles et les ondelettes proprement dites, palliant ainsi l'absence de dilatations.

## 2.1. DÉFINITIONS

Un entier  $J$  strictement supérieur à 1 étant choisi, nous appellerons analyse par dichotomies toute suite  $(H_j)_{0 \leq j \leq J}$  de sous-espaces vectoriels de  $L_2(\mathbb{Z}/2^J \mathbb{Z})$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (E<sub>1</sub>)  $\dim \{H_j\} = 2^j$  (en particulier  $H_J = L_2(\mathbb{Z}/2^J \mathbb{Z})$ ),  
 (E<sub>2</sub>) la suite  $(H_j)$  est (strictement) croissante,  
 et  
 (E<sub>3</sub>) il existe pour chaque  $j < J$  une fonction  $\phi_j$  dans  $H_j$  telle que les fonctions  $\phi_{jk}$  ( $0 \leq k \leq 2^j - 1$ ) déduites de  $\phi$  par les translations d'amplitude  $k \times 2^{J-j}$  forment une famille orthonormale.

Il résulte des conditions (E<sub>1</sub>) et (E<sub>3</sub>) que pour chaque  $j$ ,  $(\phi_{jk})_{0 \leq k \leq 2^j - 1}$  est une base orthonormale de  $H_j$ , et que  $H_j$  est stable par les translations d'amplitude  $k \times 2^{J-j}$ .

Notons  $K_j$  le supplémentaire orthogonal de  $H_j$  dans  $H_{j+1}$ . Nous verrons que, moyennant (E<sub>1</sub>) et (E<sub>2</sub>), la condition (E<sub>3</sub>) est équivalente à :

- (E<sub>3</sub>') il existe pour chaque  $j < J$  une fonction  $\psi_j$  dans  $K_j$  telle que les fonctions  $\psi_{jk}$  ( $0 \leq k \leq 2^j - 1$ ) déduites de  $\psi$  par les translations d'amplitude  $k \times 2^{J-j}$  forment une famille orthonormale.

*Remarque :* Il est naturel de se demander si la condition (E<sub>3</sub>) imposée à  $H_j$  pour  $j < J$  est vérifiée par  $H_j$  lui-même. Déjà, la réponse est positive, puisqu'il suffit de choisir  $\phi_j = \delta_j$ . Il est par ailleurs intéressant pour la suite de l'exposé de rechercher toutes les fonctions  $\phi_j$  possibles. Pour cela, on remarque tout d'abord que, le produit scalaire (1) étant invariant par translation, la condition d'orthonormalité (E<sub>3</sub>) est équivalente au système de  $2^j$  équations :

$$(12) \quad \langle \phi_{jk} | \phi_j \rangle = \delta_{k0} \quad 0 \leq k \leq J - 1,$$

ce qui par transformée de Fourier devient, compte-tenu de (6) :

$$(13) \quad \sum_{m=0}^{2^j-1} e^{2\pi i k m / N} |F\phi_j(m)|^2 = \delta_{k0} \quad 0 \leq k \leq J - 1.$$

Le système (13) signifie que les nombres positifs  $|F\phi_j(m)|^2$  sont les valeurs en  $m$  de la transformée de Fourier discrète de  $\delta_0$ , l'équation conduit à :

$$(14) \quad |F\phi_j(m)| = 2^{-J/2}.$$

## 2.2. DÉTERMINATION DE $H_{J-1}$ , $K_{J-1}$ , $\phi_{J-1}$ ET $\psi_{J-1}$

Nous noterons désormais  $F^J$  au lieu de  $F$  la transformation de Fourier discrète d'ordre  $2^J$ ,  $\epsilon^J$  au lieu de  $\epsilon$  la base de

$H_J$  définie par (3),  $T^J$  au lieu de  $T$  la représentation de  $\mathbb{Z}$  dans  $L_2(\mathbb{Z}/2^J \mathbb{Z})$ .

Pour déterminer  $H_{J-1}$  et  $K_{J-1}$ , rappelons tout d'abord que, d'après (E<sub>2</sub>), ces deux sous-espaces sont stables par la translation  $T(2)$ . En tant qu'opérateur de  $H_J$ , cette translation admet les  $2^{J-1}$  valeurs propres doubles :

$$\lambda_\rho = e^{-2\pi i \rho / 2^{J-1}} \quad 0 \leq \rho \leq 2^{J-1} - 1,$$

le sous-espace propre  $U_\rho$  associé à  $\lambda_\rho$  admettant  $(\epsilon_\rho^J, \epsilon_{\rho+2^{J-1}}^J)$  comme base orthonormale.

Notons  $V_\rho$  (respectivement  $W_\rho$ ) l'intersection de  $H_{J-1}$  (respectivement  $K_{J-1}$ ) avec  $U_\rho$ . La stabilité par  $T(2)$  entraîne alors :

$$(15) \quad H_{J-1} = \sum_{\rho=0}^{2^{J-1}-1} V_\rho,$$

et

$$(15') \quad K_{J-1} = \sum_{\rho=0}^{2^{J-1}-1} W_\rho.$$

Par ailleurs, il résulte de (E<sub>1</sub>) que la somme des dimensions des  $V_\rho$  (respectivement des  $W_\rho$ ) est  $2^{J-1}$ . Bien entendu, pour chaque  $\rho$ , on est dans l'une des trois situations suivantes :

- $\dim \{U_\rho\} = 2$  et  $\dim \{V_\rho\} = 0$ ,
- $\dim \{U_\rho\} = 1$  et  $\dim \{V_\rho\} = 1$ ,
- $\dim \{U_\rho\} = 0$  et  $\dim \{V_\rho\} = 2$ .

Nous allons voir que, de ces trois possibilités, seule la deuxième est compatible avec (E<sub>3</sub>).

Supposons qu'il existe dans  $H_{J-1}$  une fonction  $\phi_{J-1}$  telle que les  $\phi_{J-1,k} = T(2k)\phi_{J-1}$  ( $0 \leq k \leq 2^{J-1} - 1$ ) forment une base orthonormale de  $H_{J-1}$ . On définit une application unitaire  $\theta$  de  $H_{J-1}$  dans  $L_2(\mathbb{Z}/2^J \mathbb{Z})$  en associant à la fonction

$$f = \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} g(k) \phi_{J-1,k}$$

la fonction  $g$ . Cet opérateur est une équivalence des représentations de  $\mathbb{Z}$  (ou  $\mathbb{Z}/2^{J-1}\mathbb{Z}$ ) dans  $H_{J-1}$  et  $L_2(\mathbb{Z}/2^{J-1}\mathbb{Z})$  qui à  $k$  associe respectivement  $T^J(2k)$  et  $T^{J-1}(k)$ . Si nous posons alors :

$$(16) \quad \epsilon_\rho^{J-1} = 2^{-(J-1)/2} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} e^{-2\pi i k \rho / 2^{J-1}} \phi_{J-1,k},$$

nous obtenons une base orthonormale  $\epsilon^{J-1} = (\epsilon_\rho^{J-1})$  de  $H_{J-1}$ , telle que chaque  $\epsilon_\rho^{J-1}$  appartient à  $V_\rho$ . De ceci, il résulte que chaque espace  $V_\rho$  est de dimension 1.

Réciproquement, supposons que  $\dim \{V_\rho\} = 1$  pour tout  $\rho$ , et soit  $\epsilon_\rho^{J-1}$  un vecteur unitaire de  $V_\rho$ . Ces vecteurs forment une base orthonormale  $\epsilon^{J-1}$  de  $H_{J-1}$ .

Nous cherchons à déterminer  $\phi_{J-1,\rho}$  par ses composantes

$h_\rho$  dans la base  $\varepsilon^{J-1}$ . Raisonnant comme pour  $\phi_j$ , on caractérise les  $h_\rho$  comme solutions d'un système analogue à (13) et que l'on traite de la même façon. On aboutit ainsi à la solution :

$$(17) \quad |h_\rho| = 2^{-(J-1)/2}.$$

Quitte à modifier  $\varepsilon_\rho^{J-1}$ , on peut toujours supposer  $h_\rho$  positif. On obtient donc :

$$(18) \quad \phi_{J-1} = 2^{-(J-1)/2} \cdot \sum_{\rho=0}^{2^{J-1}-1} \varepsilon_\rho^{J-1}.$$

Un raisonnement analogue peut être appliqué à  $K_{j-1}$ , prouvant que :

— (E<sub>3</sub>) n'est possible que si  $\dim \{W_\rho\} = 1$ ,  
—  $\psi_{j-1}$  est alors de la forme :

$$(18') \quad \psi_{j-1} = 2^{-(J-1)/2} \cdot \sum_{\rho=0}^{2^{J-1}-1} \varepsilon_\rho^{J-1}.$$

où  $\varepsilon_\rho^{J-1}$  est un vecteur de  $W_\rho$ .

Nous sommes désormais en présence de deux bases orthonormales de  $U_\rho$  : la base  $(\varepsilon_\rho^J, \varepsilon_{\rho+2^{J-1}}^J)$  et la base  $(\varepsilon_\rho^{J-1}, \varepsilon_{\rho+2^{J-1}}^{J-1})$ . Nous noterons  $\Omega_\rho^{J-1}$  la matrice de passage. Cette matrice, étant unitaire, peut s'écrire :

$$(19) \quad \Omega_\rho^{J-1} = \begin{pmatrix} a_\rho^{J-1} & b_\rho^{J-1} \\ a_{\rho+2^{J-1}}^{J-1} & b_{\rho+2^{J-1}}^{J-1} \end{pmatrix}.$$

*Remarque* : Bien sûr, c'est la même condition d'unitarité des transformations effectuées qui apparaît dans les relations similaires obtenues par I. DAUBECHIES et S. MALLAT [12] dans le cas continu et apériodique.

Dans cette écriture,  $a^{J-1}$  et  $b^{J-1}$  sont des fonctions de période  $2^J$  de la variable discrète  $\rho$  vérifiant les relations :

$$(20) \quad |a_\rho^{J-1}|^2 + |a_{\rho+2^{J-1}}^{J-1}|^2 = 1,$$

$$(20') \quad |b_\rho^{J-1}|^2 + |b_{\rho+2^{J-1}}^{J-1}|^2 = 1$$

et

$$(21) \quad \overline{a_\rho^{J-1}} \cdot b_\rho^{J-1} + \overline{a_{\rho+2^{J-1}}^{J-1}} \cdot b_{\rho+2^{J-1}}^{J-1} = 0.$$

Il vient ainsi :

$$(22) \quad \phi_{j-1} = 2^{-(J-1)/2} \cdot \sum_{\rho=0}^{2^{J-1}-1} a_\rho^{J-1} \cdot \varepsilon_\rho^J,$$

et

$$(22') \quad \psi_{j-1} = 2^{-(J-1)/2} \cdot \sum_{\rho=0}^{2^{J-1}-1} b_\rho^{J-1} \cdot \varepsilon_\rho^J.$$

### 2.3. CONSTRUCTION DE $H_j$ , $K_j$ , $\phi_j$ ET $\psi_j$ .

On réitère les raisonnements et les constructions qui précèdent pour passer de l'ordre  $j+1$  à l'ordre  $j$ . Ainsi,

ayant défini l'espace  $H_{j+1}$  par une base orthonormale  $\varepsilon^{j+1} = (\varepsilon_m^{j+1})$   $0 \leq m \leq 2^{j+1} - 1$  où  $\varepsilon_m^{j+1}$  est un vecteur propre de  $T(2^{j-(j+1)})$  pour la valeur propre  $e^{-2\pi i m/2^j}$ , on se donne des fonctions  $2^{j+1}$ -périodiques  $a^j = (a_\rho^j)$  et  $b^j = (b_\rho^j)$  de la variable discrète  $\rho$  satisfaisant aux conditions :

$$(23) \quad |a_\rho^j|^2 + |a_{\rho+2^j}^j|^2 = 1,$$

$$(23') \quad |b_\rho^j|^2 + |b_{\rho+2^j}^j|^2 = 1,$$

$$(24) \quad \overline{a_\rho^j} \cdot b_\rho^j + \overline{a_{\rho+2^j}^j} \cdot b_{\rho+2^j}^j = 0.$$

On pose alors, pour  $0 \leq \rho \leq 2^j - 1$  :

$$(25) \quad \Omega_\rho^j = \begin{pmatrix} a_\rho^j & b_\rho^j \\ a_{\rho+2^j}^j & b_{\rho+2^j}^j \end{pmatrix},$$

$$(26) \quad \varepsilon_\rho^j = a_\rho^j \cdot \varepsilon_{\rho+2^j}^{j+1} + a_{\rho+2^j}^j \cdot \varepsilon_{\rho+2^j}^j,$$

$$(26') \quad \varepsilon_\rho^{j+1} = b_\rho^j \cdot \varepsilon_{\rho+2^j}^{j+1} + b_{\rho+2^j}^j \cdot \varepsilon_{\rho+2^j}^j,$$

puis on définit un espace  $H_j$  (respectivement  $K_j$ ) par sa base orthonormale  $\varepsilon^j = (\varepsilon_\rho^j)$   $0 \leq \rho \leq 2^j - 1$  (respectivement  $\varepsilon^{j+1} = (\varepsilon_\rho^{j+1})$   $0 \leq \rho \leq 2^j - 1$ ), et une fonction  $\phi_j$  (respectivement  $\psi_j$ ) par :

$$(27) \quad \phi_j = 2^{-j/2} \cdot \sum_{\rho=0}^{2^j-1} \varepsilon_\rho^j,$$

et

$$(27') \quad \psi_j = 2^{-j/2} \cdot \sum_{\rho=0}^{2^j-1} \varepsilon_\rho^{j+1}.$$

On en déduit :

$$(28) \quad \phi_{jk} = 2^{-j/2} \cdot \sum_{\rho=0}^{2^j-1} e^{-2\pi i k \rho/2^j} \varepsilon_\rho^j,$$

et

$$(28') \quad \psi_{jk} = 2^{-j/2} \cdot \sum_{\rho=0}^{2^j-1} e^{-2\pi i k \rho/2^j} \varepsilon_\rho^{j+1}.$$

Finalement, les fonctions  $\phi_j$ ,  $\psi_j$ ,  $\phi_{jk}$  et  $\psi_{jk}$  sont déterminées biunivoquement par les fonctions  $2^{j+1}$ -périodiques  $a^j$  et  $b^j$  vérifiant (23), (23'), et (24), au moyen des relations :

$$(29) \quad F^J \phi_j(m) = 2^{-j/2} \cdot a_m^{j-1} \cdot a_m^{j-2} \dots a_m^{j+1} \cdot a_m^j,$$

$$(29') \quad F^J \psi_j(m) = 2^{-j/2} \cdot a_m^{j-1} \cdot a_m^{j-2} \dots a_m^{j+1} \cdot b_m^j,$$

$$(30) \quad F^J \phi_{jk}(m) = 2^{-j/2} \cdot a_m^{j-1} \cdot a_m^{j-2} \dots a_m^{j+1} \cdot a_m^j \cdot e^{-2\pi i k m/2^j},$$

$$(30') \quad F^J \psi_{jk}(m) = 2^{-j/2} \cdot a_m^{j-1} \cdot a_m^{j-2} \dots a_m^{j+1} \cdot b_m^j \cdot e^{-2\pi i k m/2^j}.$$

## 2.4. UN SUBSTITUT AUX DILATATIONS

Les objets que nous venons de construire ne sont pas, nous l'avons vu, de vraies analyses multi-échelles, ni de vraies ondelettes (nous les avons qualifiés respectivement d'analyses par dichotomies et de pré-ondelettes) : il leur manque l'aspect « effet de zoom » que les ondelettes continues ont grâce au rôle joué par les dilatations (cf. rappel p. 2 et début de la section 2, p. 7). Cependant, la construction que nous venons de décrire nous laisse la possibilité d'introduire a posteriori une notion approchée de dilatation.

Supposons que les coefficients  $a_m^j$  et  $b_m^j$  vérifient la condition supplémentaire :

(E<sub>4</sub>) | il existe des fonctions A et B de période 1, dont les modules tendent respectivement vers 0 et 1 quand  $x$  tend vers 0, et telles que, pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ , on ait :

$$(31) \quad a_m^j = A(2^{-j} m) \quad \text{et}$$

$$(31') \quad b_m^j = B(2^{-j} m).$$

*Remarque* : la variable  $x$  des fonctions A et B pourra suivant les besoins, être un réel, un rationnel ayant une puissance de deux comme dénominateur, ou simplement (tant qu'on ne fait pas varier J) le produit de  $2^{-j}$  par un entier relatif.

La condition (E<sub>4</sub>) implique :

$$(32) \quad a_{2m}^{j+1} = a_m^j \quad \text{et}$$

pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$

$$(32') \quad b_{2m}^{j+1} = b_m^j.$$

Il vient alors, compte-tenu de (29) et (29'),

$$(33) \quad F^j \phi_{j+1}(2m) = 2^{-1/2} (a_m^{j-1})^{-1} \phi_j(m)$$

et

$$(33') \quad F^j \psi_{j+1}(2m) = 2^{-1/2} (a_m^{j-1})^{-1} \psi_j(m),$$

relations qui peuvent être interprétées comme l'effet d'une « dilatation approchée » lorsque  $2^j$  devient grand par rapport à  $m$ .

Nous appellerons analyses multi-échelles les analyses par dichotomies vérifiant la condition (E<sub>4</sub>).

*Remarque* : on remarquera la similitude entre la construction d'ondelettes discrètes que nous donnons ici et la construction des ondelettes continues qu'obtient S. MALLAT dans [12].

*Remarque* : concernant notre point de vue, on peut se poser la question du passage à la limite quand J tend vers l'infini, ce qui revient à se demander si certaines de nos ondelettes sont la discrétisation d'ondelettes continues périodiques. Nous donnons en fin d'exposé un exemple qui va dans ce sens avec une discrétisation des ondelettes de Franklin.

## 3. La transformée en ondelettes rapide et son algorithme

### 3.1. L'ANALYSE EN ONDELETTES

Il résulte des propriétés (E<sub>1</sub>), (E<sub>2</sub>) et (E<sub>3</sub>) (et éventuellement (E<sub>4</sub>)) des objets  $H_j$ ,  $K_j$ ,  $\phi_j$  et  $\psi_j$ , que les  $\psi_{jk}$  ( $0 \leq j \leq J-1$  et  $0 \leq k \leq 2^j-1$ ) forment avec  $\phi_0$  une base orthonormale de  $H_J = L_2(\mathbb{Z}/2^J\mathbb{Z})$ , base que nous noterons donc  $(\phi_0, \psi)$  et que nous appellerons base d'ondelettes (ou de pré-ondelettes). Nous noterons

$$(34) \quad f = f_0 \phi_0 + \sum_{\substack{0 \leq j \leq J-1 \\ 0 \leq k \leq 2^j-1}} f_j'(k) \psi_{jk}$$

la décomposition de  $f$  sur cette base, et  $\mathcal{O}f$  la famille des coefficients  $f_0$  et  $f_j'(k)$ .  $\mathcal{O}f$  sera appelée la transformée en ondelettes de  $f$ .

Le coefficient  $f_0$  joue bien entendu un rôle particulier et sera d'ailleurs la plupart du temps omis dans les représentations de  $\mathcal{O}f$ . Dans cette optique, on a avantage à ce que (à un facteur de normalisation près)  $f_0$  représente la moyenne de la fonction  $f$ , ce qui équivaut à :

$$(35) \quad F^j \phi_0(m) = \delta_{0m}.$$

Il résulte de (29) que ceci a lieu si et seulement si on a, pour tout  $j$  :

$$(36) \quad \begin{cases} |a_0^j| = 1, & b_0^j = 0, \\ a_{2^j}^j = 0, & |b_{2^j}^j| = 1. \end{cases}$$

(il résulte évidemment de (23), (23') et (24) que chacune de ces quatre conditions implique les trois autres).

### 3.2. L'ALGORITHME DE T.O.R.

En nous appuyant sur les raisonnements et les constructions des paragraphes 2.2 et 2.3, nous allons pouvoir décrire un algorithme de transformée en ondelettes rapide ou T.O.R. de même type que l'algorithme de T.F.R.

Cet algorithme est décrit au moyen d'un papillon de T.O.R. que nous présentons sur la figure 3 dans le cas  $J=3$  et que nous allons commenter.

Les notations  $PF_j$  (respectivement  $PF_j^*$ ) symbolisent un papillon de T.F.R. (respectivement un papillon de T.F.R. inverse) d'ordre  $2^j$ .

On effectue d'abord une T.F.R. d'ordre  $2^J$ , ce qui revient à passer de la base  $\delta$  à la base  $\epsilon^J$  de  $H_J$ .

L'étape suivante consiste à décomposer  $f$  entre les espaces  $H_{j-1}$  et  $K_{j-1}$ , ce qui s'effectue en passant de la base  $\epsilon^j$  à la base  $(\epsilon^{j-1}, \epsilon^{j-1})$  au moyen des différentes matrices  $\Omega_m^{*j-1}$ , adjointes et inverses des  $\Omega_m^{j-1}$ .

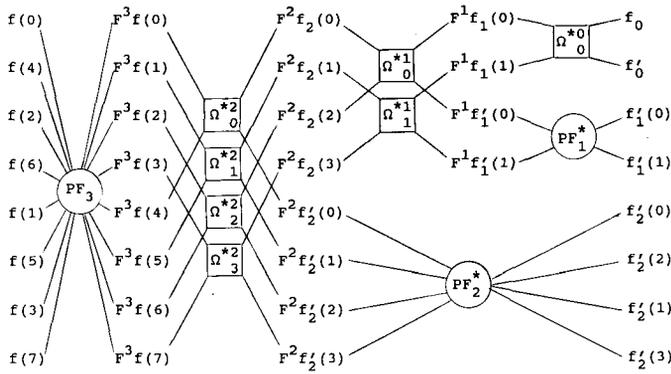


Figure 3.

A partir de là, le papillon de T.O.R. se scinde en deux :

- la partie inférieure correspond à la projection  $f'_{J-1}$  sur le sous-espace  $K_{J-1}$ , projection dont on vient d'obtenir les coordonnées dans la base  $\varepsilon^{jJ-1}$ . Il résulte de (30') que ces coordonnées sont fournies par la T.F.R. d'ordre  $2^{J-1}$  des coefficients d'ondelettes  $f'_{J-1}(k)$ . Il suffit donc d'effectuer une T.F.R. inverse d'ordre  $2^{J-1}$  pour obtenir ces coefficients ;

- la partie supérieure correspond à la projection  $f_{J-1}$  sur le sous-espace  $H_{J-1}$ , projection dont on vient d'obtenir les composantes dans la base  $\varepsilon^{jJ-1}$ . Ces coordonnées constituent d'après (30) la T.F.R. d'ordre  $2^{J-1}$  des coordonnées dans la base  $(\Phi_{J-1,k})$ , que, par analogie avec les coefficients d'ondelettes, nous noterons  $f_{J-1}(k)$ .

Réitérant l'étape précédente, on décompose  $f_{J-1}$  entre les sous-espaces  $H_{J-2}$  et  $K_{J-2}$  en passant de la base  $\varepsilon^{jJ-1}$  de  $H_{J-1}$  à la base  $(\varepsilon^{jJ-2}, \varepsilon^{jJ-2})$ .

On réitère ensuite en faisant décroître les valeurs de  $j$ . A chaque étape, le papillon se scinde en deux :

- la partie inférieure correspond à la projection  $f'_j$  de  $f_{j+1}$  sur  $K_j$ , exprimée dans la base  $\varepsilon^{ij}$ , projection dont on déduit les coefficients d'ondelettes  $f'_j(k)$  par T.F.R. d'ordre  $2^j$  ;

- la partie supérieure correspond à la projection  $f_j$  sur  $H_j$  exprimée dans la base  $\varepsilon^j$ , projection à partir de laquelle on réitère.

Arrivé à  $f_1$ , une dernière décomposition permet de séparer les coefficients  $f'_0$  et  $f_0$ .

Bien entendu, il existe également un algorithme de T.O.R. inverse, dont le papillon s'obtient en lisant le papillon de T.O.R. de droite à gauche, en remplaçant les matrices  $\Omega_m^{*j}$  par leurs adjointes  $\Omega_m^j$ , et en échangeant T.F.R. et T.F.R. inverse.

### 3.3. CHOIX DE LA BASE D'ONDELETTES

L'algorithme que nous venons de décrire permet de déterminer la T.O.R. d'un signal échantillonné sur  $2^J$  valeurs, respectant les conditions de Shannon, et ceci dans n'importe quelle base d'ondelettes. Il faut donc, en

plus du signal, entrer la base d'ondelettes dans laquelle on veut travailler, autrement dit entrer les coefficients  $a_m^j$  et  $b_m^j$ .

Nous nous sommes d'abord limités au cas d'ondelettes réelles ce qui, d'après (30) et (30'), et les propriétés de la transformée de Fourier revient, à imposer les conditions supplémentaires suivantes :

$$(37) \quad \alpha_{-m}^j = \overline{\alpha_m^j}, \quad b_{-m}^j = \overline{b_m^j}.$$

Étant donné par ailleurs la périodicité des fonctions  $a^j$  et  $b^j$ , il suffit donc d'en fixer les valeurs pour  $0 \leq m \leq 2^j$ . Il résulte de (23), (23') et (24) qu'on peut écrire :

$$(38) \quad \begin{cases} |\alpha_m^j| = \cos(\theta_m^j) & \text{et} \\ |b_m^j| = \sin(\theta_m^j), \end{cases}$$

où  $\theta_m^j$  est un angle variant de 0 à  $\pi/2$  lorsque  $m$  varie de 0 à  $2^j$ . En fait, pour avoir une concentration en fréquence des ondelettes la plus satisfaisante possible, nous supposons en général  $\theta_m^j$  croissante entre  $m = 0$  et  $2^j$ .

Nous noterons par ailleurs  $\alpha_m^j$  et  $\beta_m^j$  les arguments de  $a_m^j$  et  $b_m^j$ . La condition (24) implique alors, compte tenu de (37) et des périodicités :

$$(39) \quad \alpha_m^j - \beta_m^j + \alpha_{2^j-m}^j - \beta_{2^j-m}^j = (2K+1)\pi.$$

Cependant, les ondelettes réelles présentent le grave désavantage de donner des transformées en ondelettes dont l'allure peut totalement changer lorsqu'on déphase le signal analysé. Pour pallier cet inconvénient, nous modifions les ondelettes et le début de l'algorithme de la manière suivante :

- on décompose tout d'abord  $H_j$  en deux sous-espaces  $H_j^+$  et  $H_j^-$  correspondant respectivement à des fréquences « positives » et « négatives ». Pour cela, on modifie les  $\Omega_\rho^j$  en posant :

$$\Omega_0^j = 2^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_\rho^j = I \text{ (matrice identité), pour } 0 < \rho < 2^{j-1}.$$

- on applique un papillon de T.O.R. d'ordre  $J-1$  indépendamment à chacune des deux parties « fréquences positives » et « fréquences négatives ».

*Remarque 1 :* la modification revient à remplacer les ondelettes réelles  $\psi_{jk}$  ( $0 \leq j \leq J$ ) par une double famille  $(\psi_{jk}^+, \psi_{jk}^-)$  ( $0 \leq j \leq J-1$ ) telle que  $\psi_{jk}^+$  et  $\psi_{jk}^-$  soient conjuguées l'une de l'autre avec  $2^{-1/2} \psi_{jk}$  comme partie réelle commune.

*Remarque 2 :* bien entendu, les termes « fréquences positives », et « négatives » doivent être manipulés avec précaution étant donné la périodisation en fréquence résultant de la discrétisation en temps. Une garantie est que la contribution au signal des fréquences supérieures à  $2^{J-2}$  soit négligeable. Pour un signal donné, cela revient à

diviser par deux la période d'acquisition, ou encore à discrétiser suivant un maillage deux fois plus fin, de façon à obtenir la même résolution temporelle sur l'analyse en ondelettes. Dans tous les cas, les conditions d'échantillonnage de Shannon sont respectées.

*Remarque 3 :* pour un signal réel, les composantes de fréquences positives et de fréquences négatives sont conjuguées l'une de l'autre. Il suffit donc de calculer la moitié des coefficients d'ondelettes, ce qui divise pratiquement par deux le nombre des opérations effectuées et compense la nécessité d'utiliser un maillage deux fois plus fin.

Nous présentons ici la comparaison en temps et en fréquence de cinq bases d'ondelettes vérifiant (E<sub>4</sub>). Pour chacune de ces bases, nous avons choisi :

$$\alpha_m^j = 0, \quad \beta_m^j = m\pi/2^j.$$

Les cinq bases diffèrent donc par les valeurs de  $\theta_m^j$  :

$$(I) \quad \theta_m^j = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq m \leq 2^{j-1} - 1, \\ 1 & \text{pour } 2^{j-1} + 1 \leq m \leq 2^j. \end{cases}$$

$$(II) \quad \theta_m^j \text{ croît linéairement de } 0 \text{ à } \pi/2 \text{ pour } 0 \leq m \leq 2^j.$$

$$(III) \quad \theta_m^j = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq m \leq 2^{j-2}, \\ 1 & \text{pour } 3 \times 2^{j-2} \leq m \leq 2^j, \end{cases}$$

et  $\theta_m^j$  croît linéairement de 0 à  $\pi/2$  pour  $2^{j-2} \leq m \leq 3 \times 2^{j-2}$ .

$$(IV) \quad \theta_m^j \text{ est une fonction du } 3^{\text{e}} \text{ degré croissant de } 0 \text{ à } \pi/2 \text{ pour } 0 \leq m \leq 2^j, \text{ avec tangente horizontale en } m = 0 \text{ et en } m = 2^j \text{ et point d'inflexion en } m = 2^{j-1}.$$

et enfin

$$(V) \quad \theta_m^j = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq m \leq 2^{j-2}, \\ 1 & \text{pour } 3 \times 2^{j-2} \leq m \leq 2^j, \end{cases}$$

$\theta_m^j$  est une fonction du 3<sup>e</sup> degré croissant de 0 à  $\pi/2$  lorsque  $m$  croît de  $2^{j-2}$  à  $3 \times 2^{j-2}$ , avec tangente horizontale en  $m = 2^{j-2}$  et  $m = 3 \times 2^{j-2}$  et point d'inflexion en  $m = 2^{j-1}$ .

Il faut noter que ces bases, dans lesquelles on ne reconnaît pas a priori des bases classiques d'ondelettes ont été choisies essentiellement pour la simplicité de leur description vis-à-vis de l'algorithme choisi.

Nous présentons par ailleurs une sixième base qui constitue une discrétisation des ondelettes de Franklin décrites par Y. MEYER dans [15], et qui sont des ondelettes périodiques affines par morceaux. Celles-ci ne sont pas décrites à l'aide de l'angle  $\theta$ , mais par la donnée directe des coefficients  $a_m^j$  et  $b_m^j$ . Il est à remarquer que les ondelettes de Franklin ne semblent pas, d'après les essais que nous avons effectués, présenter un grand avantage par rapport aux cinq autres familles décrites ici. Dans cette optique, il serait sans doute intéressant de tester également des ondelettes splines périodiques d'ordres supérieurs.

## 4. Mise en œuvre pratique

La complexité de notre algorithme peut être estimée en majorant le nombre d'opérations effectuées. Étant en  $2 \times N \times \log_2(N)$ , elle est du même ordre de grandeur que celle de la T.F.R. ( $N \times \log_2(N)$ ), mais l'objectif est différent.

La comparaison avec l'algorithme de S. MALLAT est moins évidente puisque la complexité de ce dernier, étant  $2 \times N \times r$  pour une ondelette à support compact d'ordre  $r$ , fait intervenir un deuxième paramètre qui n'existe pas chez nous.

Les algorithmes de T.O.R. et de T.O.R. inverse ont été programmés en langage Pascal sur micro-ordinateur compatible PC. Le programme est composé de trois modules de calcul :

- un premier module de construction de la base d'ondelettes (calcul des coefficients  $a_m^j$  et  $b_m^j$  des matrices de passage  $\Omega_m^j$ ), n'intervenant pas directement dans le calcul de la transformée en ondelettes,
- un second module de T.F.R. directe et inverse,
- enfin, un troisième module de T.O.R. directe et inverse.

Les temps de calcul pour une décomposition en ondelettes réelles sont de 16,77 secondes, alors qu'ils tombent à 11,86 secondes pour une décomposition en ondelettes complexes, ceci pour un maillage de 1 024 points. Ces temps peuvent être également comparés au temps nécessaire à une T.F.R. classique, programmée suivant les mêmes caractéristiques que la T.O.R., qui est de l'ordre de 7,69 secondes avec le matériel utilisé. Un autre avantage de notre algorithme réside dans le fait que sa structure est identique à celle d'un algorithme de T.F.R., et donc que son intégration est relativement aisée (soit en programmation classique, soit en logique câblée) de façon à obtenir un processeur de T.O.R. en temps réel.

Nous avons testé la validité de l'algorithme et de sa programmation sur des signaux périodiques, échantillonnés en temps sur 1 024 valeurs (nous avons donc travaillé avec  $J = 10$ ). Les fonctions du temps, de la forme  $f(\ell)$ , et leurs transformées de Fourier ont été représentées de façon classique, avec  $\ell$  (respectivement  $m$ ) en abscisse et  $f(\ell)$  (respectivement  $F_j f(m)$ ) en ordonnée.

Quant aux transformées en ondelettes  $O_f$ , elles sont représentées de la manière suivante :

- on ne représente pas la « moyenne »  $f_0$ ,
- le schéma comporte dix bandes horizontales correspondant de bas en haut aux valeurs de  $j$  comprises entre 0 et  $J - 1$  ; la valeur de  $j$  correspond à une bande centrée autour de la fréquence  $2^{-j}$  ;
- sur la bande d'indice  $j$ , on a représenté les coefficients d'ondelettes  $f_j'(k)$  (en ordonnée), avec en abscisse les  $2^j$  valeurs de  $2^{j-j} k$  correspondant à une période, le pas étant de  $2^{j-j}$  unités. Ainsi,  $f(\ell)$  et les  $f_j'(k)$  sont représentés avec la même unité de temps ; chaque coefficient  $f_j'(k)$  est représenté par un parallélogramme noirci dont la largeur est de  $2^{j-j}$  et la hauteur algébrique représente l'amplitude du coefficient.

La figure 4 illustre ce mode de représentation dans le cas  $J = 4$ .

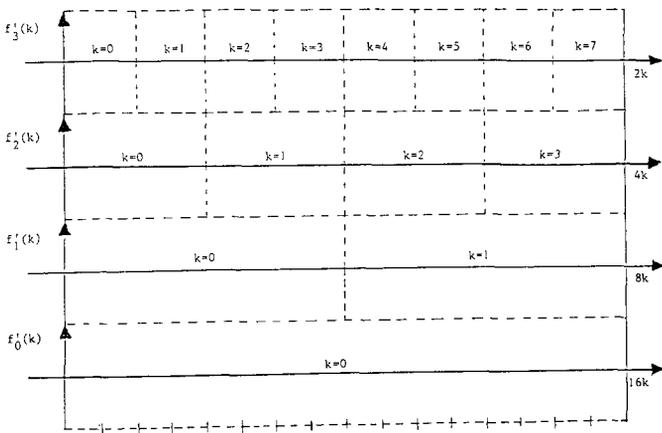


Figure 4.

Nous avons pu ainsi vérifier que la composition des transformées directe et inverse était bien équivalente à la transformation identité. Puis, nous avons procédé à la comparaison des six bases d'ondelettes sur les points suivants :

— allure de la courbe  $\psi_{jk}(\ell)$  dans les cas  $j = 2, k = 2$  (fig. 5) et  $j = 7, k = 32$  (fig. 6) ; les courbes sont obtenues par T.O.R. inverse, sachant que :

$$(40) \quad \psi_{jk}(j', k') = \delta_{jj'} \delta_{kk'}$$

(bien entendu,  $\mathbf{O}$  désigne ici la transformation en ondelettes dans la base considérée) ;

— allure de la courbe  $|F\psi_{jk}(m)|$  dans le cas  $j = 7, k = 32$ , (fig. 7), en utilisant une partie de l'algorithme de T.O.R. inverse (arrêt avant le dernier papillon de T.F.R. inverse) ;

Pour la présentation des exemples d'analyse, nous avons retenu les bases (III) et (IV), qui représentent deux compromis différents entre la précision en temps et la précision en fréquence. Les autres bases ne présentent pas d'avantages majeurs par rapport à ces deux dernières.

Les figures 8 et 9 comparent, sur les bases (III) et (IV), l'analyse en ondelettes réelles et l'analyse en ondelettes complexes (représentation du module uniquement) de sinusoides :

en figure 8, la sinusoidé définie par :

$$f(\ell) = \sin(2\pi\ell/64)$$

— en figure 9, la même sinusoidé déphasée d'un quart de période.

Ces figures mettent en évidence l'intérêt de la version complexe pour laquelle le déphasage ne modifie pas l'allure générale de la transformée.

Puis, nous présentons la T.O.R., toujours dans les bases (III) et (IV) et en version complexe uniquement, d'autres signaux :

— T.O.R. d'une sinusoidé de période 27, (cette période n'est pas un multiple en puissance de deux de la période d'échantillonnage) ;

— T.O.R. d'une sinusoidé modulée en amplitude avec un parasite basse fréquence localisé sur un intervalle de temps (fig. 11) ;

— T.O.R. d'une sinusoidé dont la fréquence évolue au cours du temps (fig. 12).

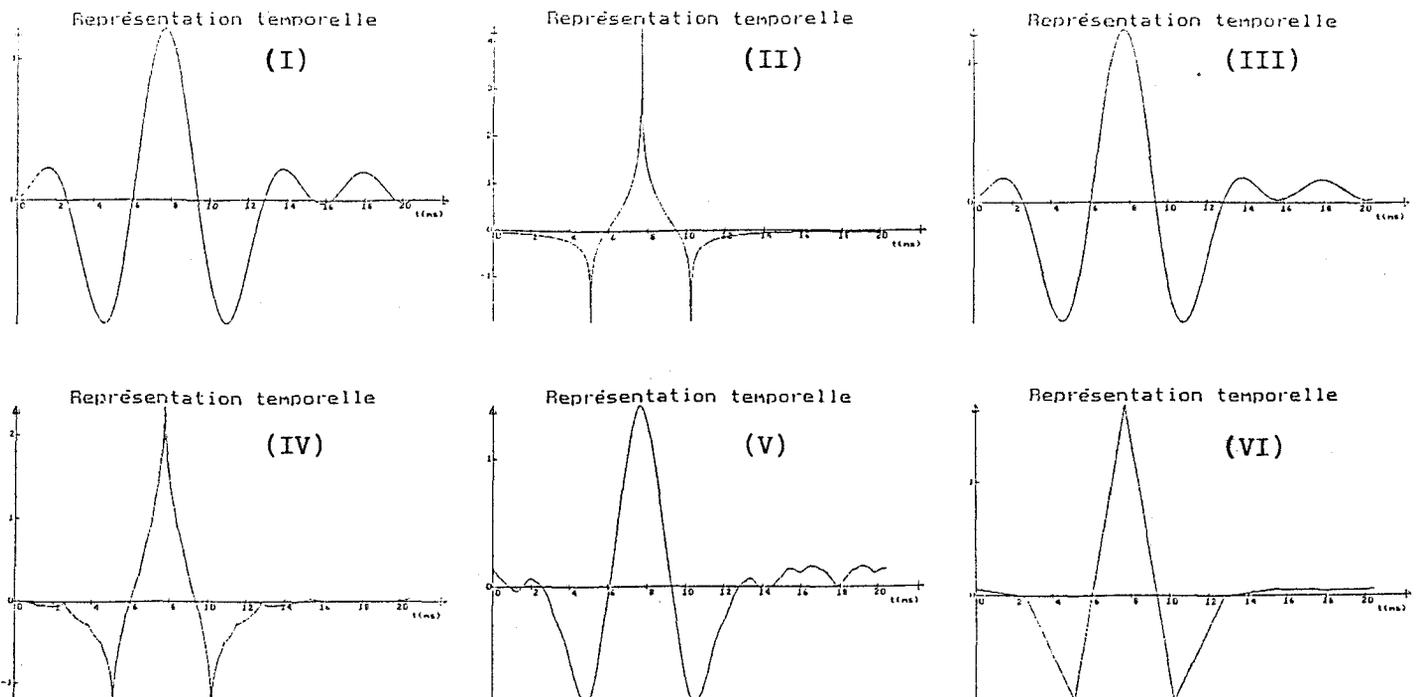


Figure 5.

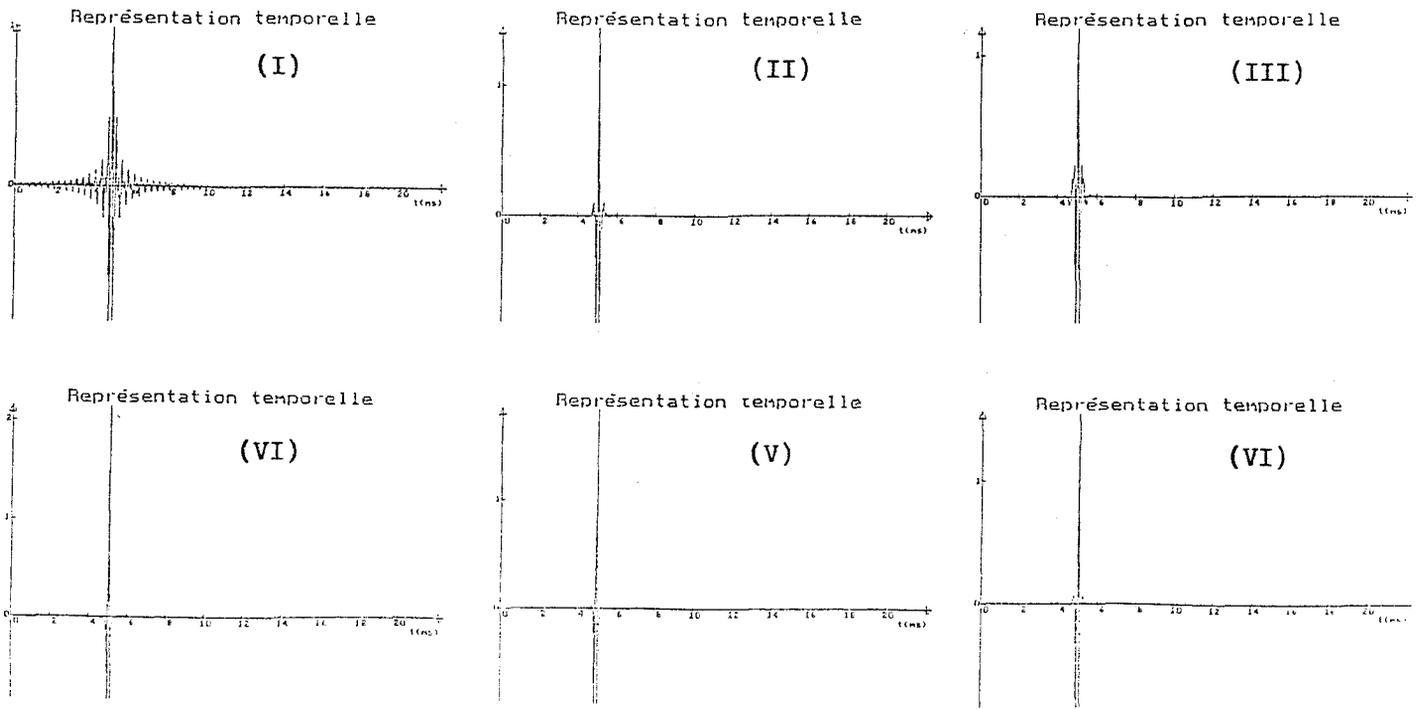


Figure 6.

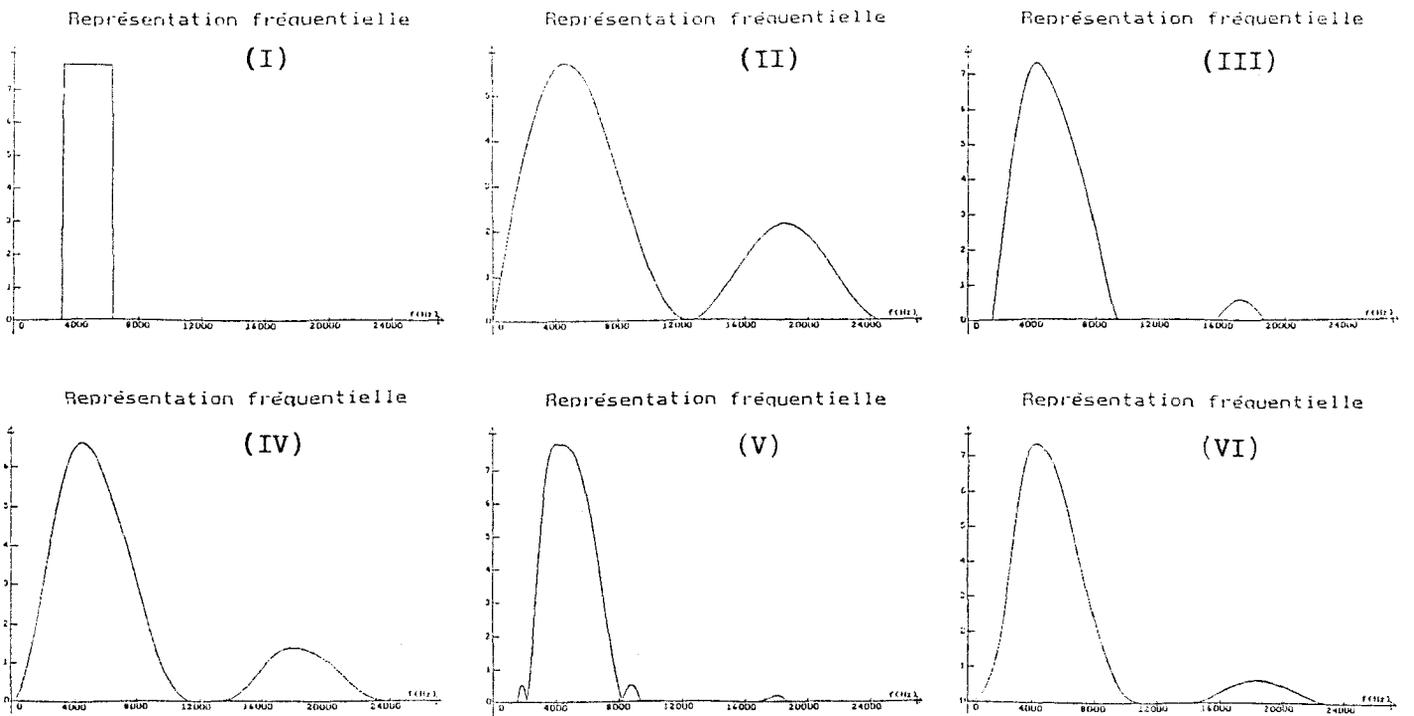


Figure 7.

# Applications

Une transformée en ondelettes rapide

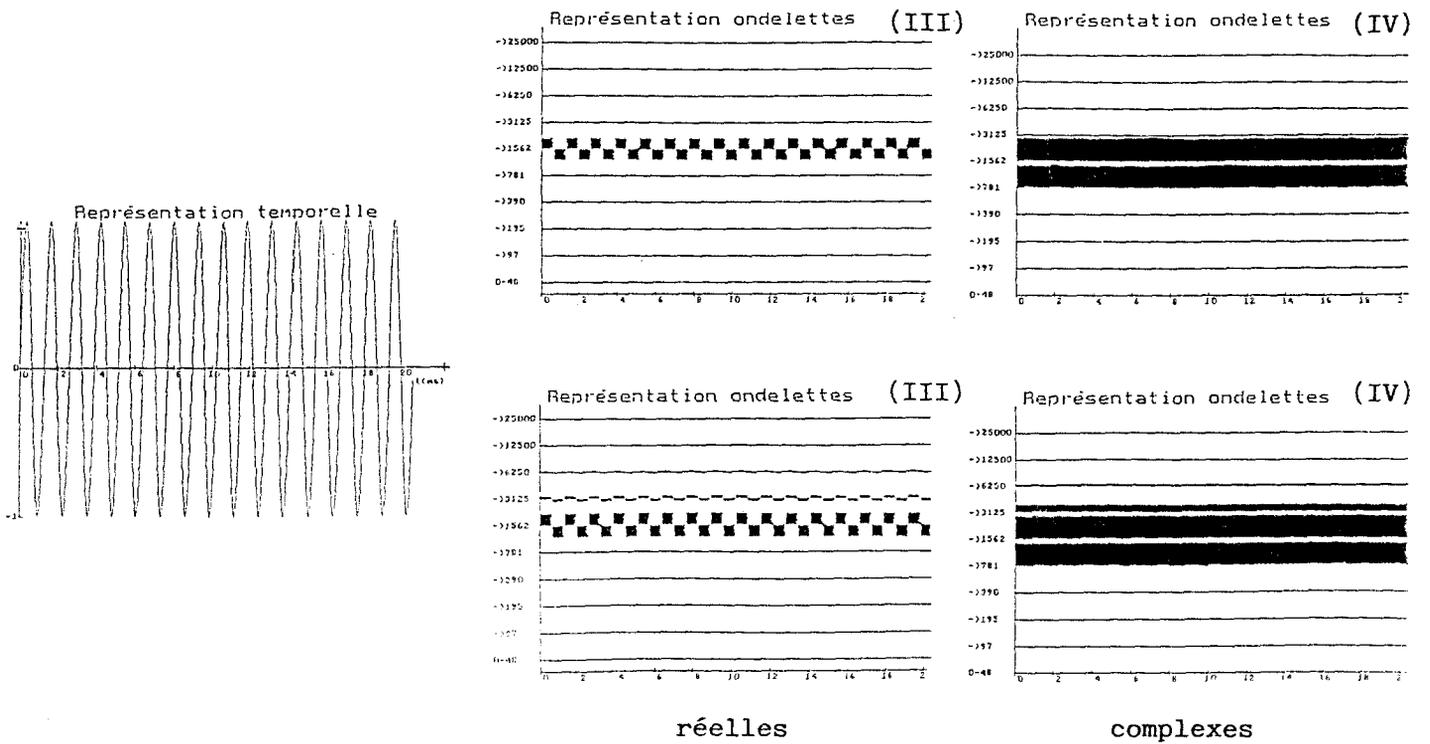


Figure 8.

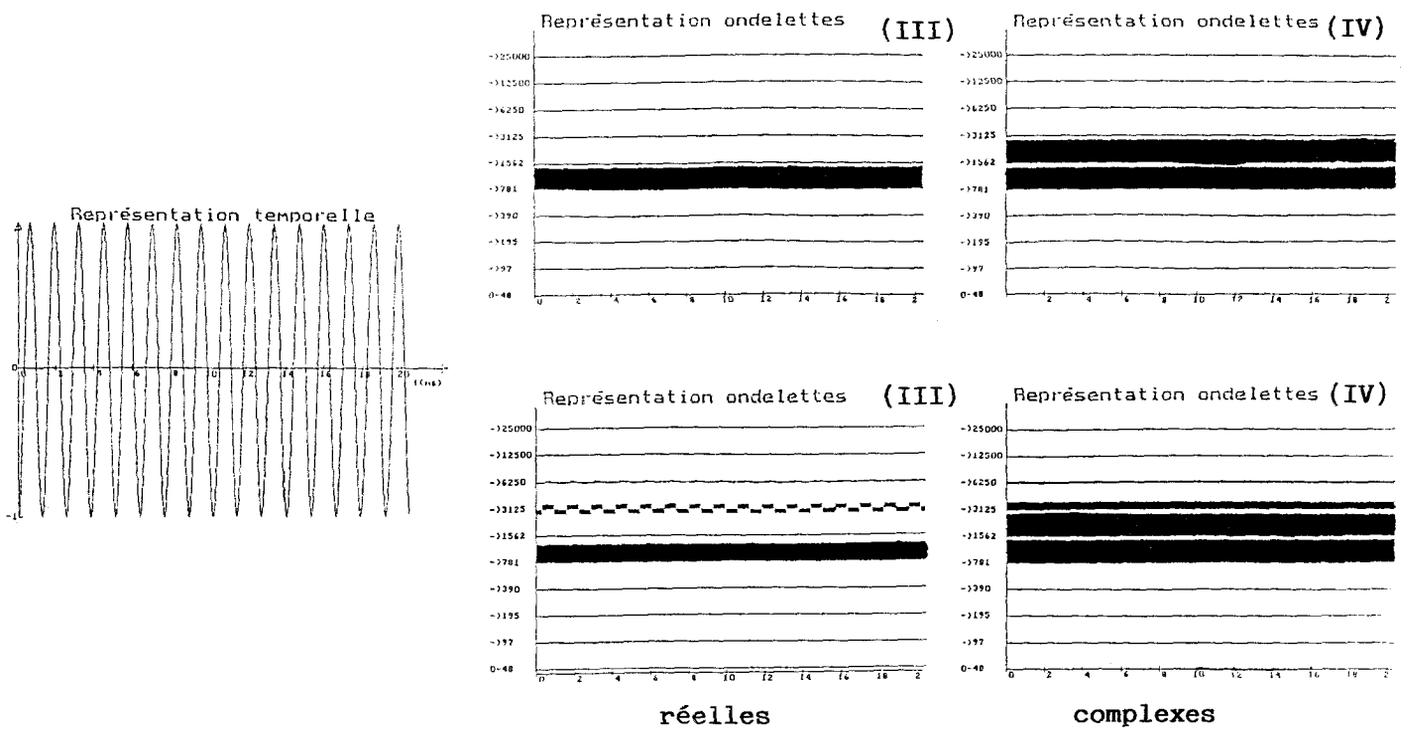


Figure 9.

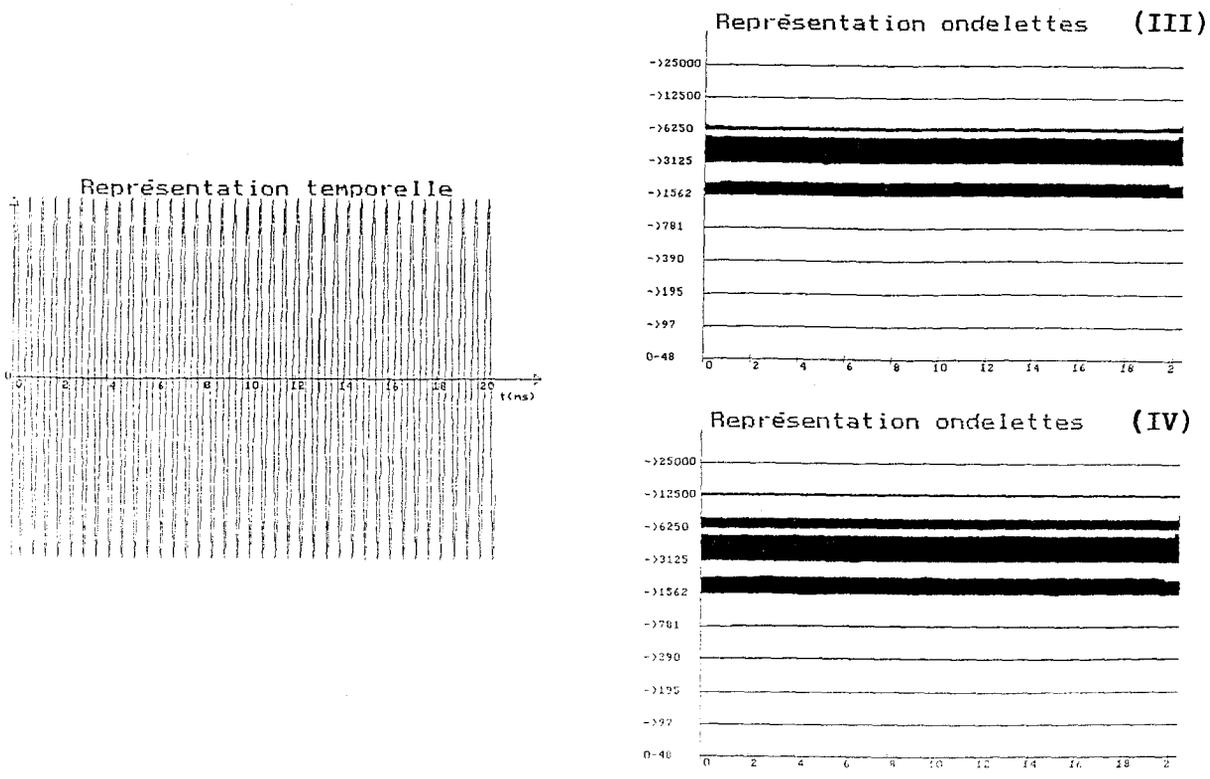


Figure 10.

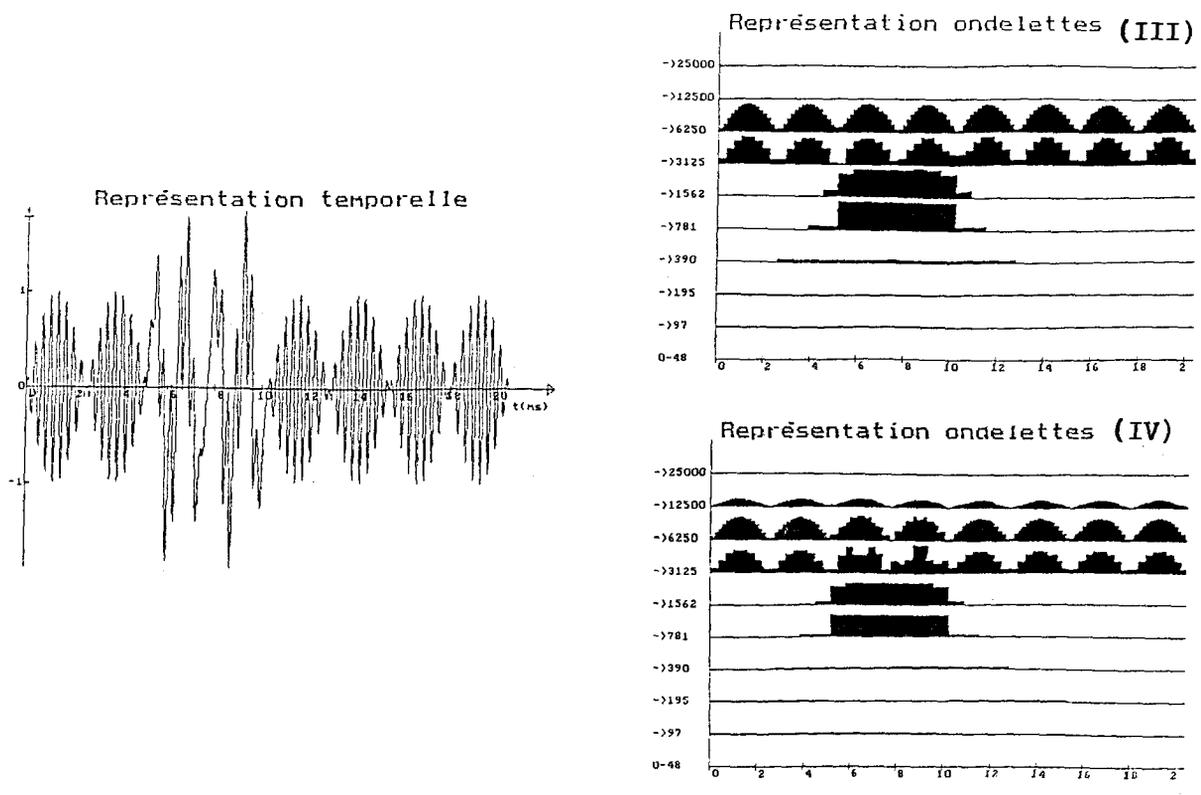


Figure 11.

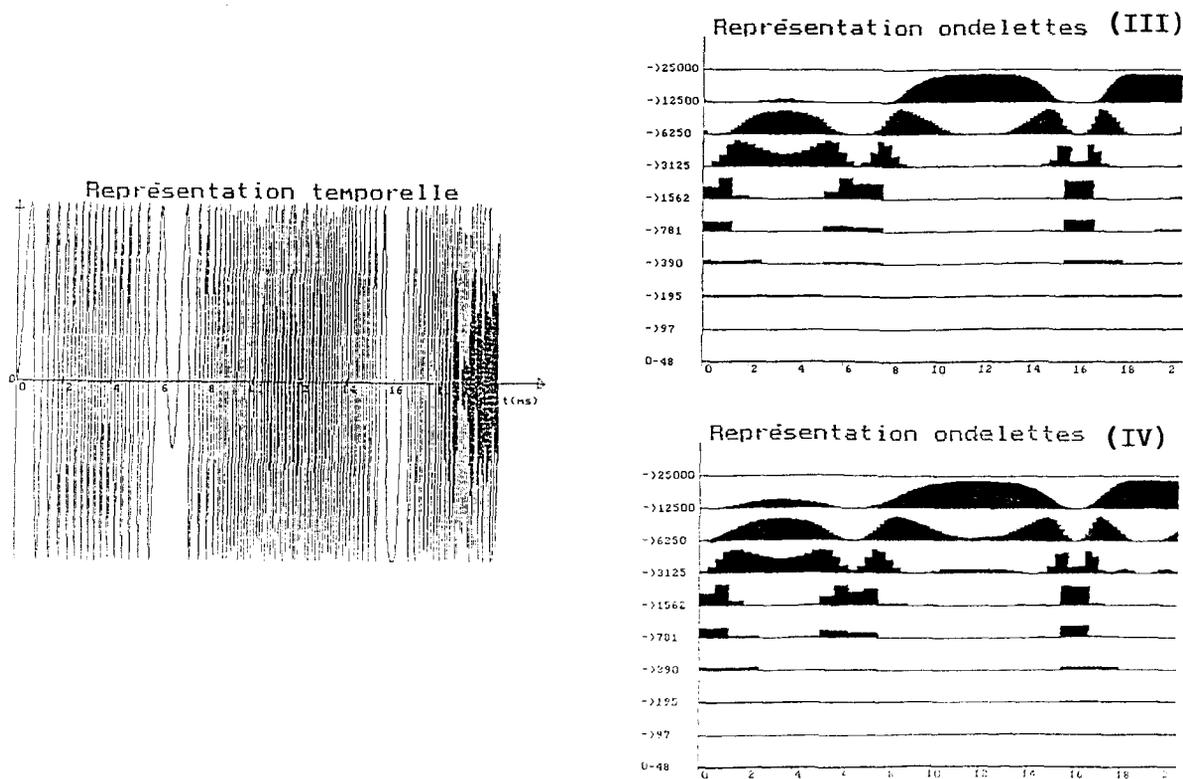


Figure 12.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. M. COMBES, A. GROSSMANN, Ph. TCHAMITCHIAN (Eds), *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Spaces*, Actes du Colloque International de Marseille, 14-18 décembre 1987, Springer Verlag.
- [2] J. W. COLLEY, J. V. TUKEY, *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Math. Comput. 19 (1965) 297-301.
- [3] I. DAUBECHIES, Orthonormal bases of Supported Wavelets, Comm. in Pure and Applied Math., Vol. XLI, n° 7 (1988) 909-996.
- [4] K. GROCHENIG, *Analyses Multi-échelles et Bases d'Ondelettes*, C. F. Académie des Sciences de Paris, T 305 (1987) 13-15.
- [5] A. GROSSMANN, J. MORLET, *Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape*, SIAM J. Math. Anal. 15 (1984) 723-736.
- [6] A. GUICHARDET, *Analyse Harmonique Commutative*, Monographies Universitaires Mathématiques, n° 28, Dunod 1968.
- [7] M. HOLSCHNEIDER, R. KRONLAND-MARTINET, J. MORLET, Ph. TCHAMITCHIAN, *A Real-time Algorithm for Signal Analysis with the Help of the Wavelet Transform*, Wavelets, Actes du Colloque International de Marseille, 14-18 décembre 1987, Springer Verlag.
- [8] S. JAFFARD, Y. MEYER, Bases d'ondelettes dans les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , à paraître dans J. Math. Pures et Appliquées.
- [9] P. G. LEMARIE, Y. MEYER, Ondelettes et Bases Hilbertiennes, Révista Iberoamericana, 2, 1 (1986), Volume dédié à A. Calderon.
- [10] S. MALLAT, *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : the Wavelet Representation*, Preprint GRASP, Lab. Dep. of Computer and Information Sciences, University of Penn. (May 1987).
- [11] S. MALLAT, *Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal Bases of  $L_2(\mathbb{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 3-15 (Septembre 1989) 68-87.
- [12] S. MALLAT, *Review of Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models*, I.E.E.E. Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, Dec. 1989.
- [13] Y. MEYER, *Principe d'Incertitude, Bases Hilbertiennes et Algèbres d'Opérateurs*, Séminaire Bourbaki, 38<sup>e</sup> année (1985-1986) n° 662.
- [14] Y. MEYER, *Ondelettes et Fonctions Splines*, Séminaire « Équations aux Dérivées Partielles » (1986-1987), École Polytechnique, exposé du 16 décembre 1986.
- [15] Y. MEYER, *Les Ondelettes*, Preprint, Ceremade, Université Paris-Dauphine (Décembre 1987).
- [16] V. PERRIER, C. BASDEVANT, *La Décomposition en Ondelettes Périodiques, un Outil pour l'Analyse de Champs Inhomogènes. Théorie et Algorithmes*, La Recherche Aérospatiale, mai 1989, n° 3, 53-67.

Manuscrit reçu le 23 mai 1990.