

## Localisation de sources par le propagateur monocoup à diversité d'espace

### *Source localization by means of the space diversity snap-shot propagator*



**Jacques MUNIER**

Centre d'Étude des Phénomènes  
Aléatoires et Géophysiques (CEPHAG),  
Domaine Universitaire de Grenoble,  
BP 46, 38042 St-Martin-d'Hères Cedex

Directeur de recherche du CNRS au CEPHAG. Domaine de recherche :  
Traitement d'antenne, modèles de propagation en acoustique  
aérienne ou sous-marine, analyse paramétrique de signaux.

#### RÉSUMÉ

Par une technique de diversité d'espace consistant à utiliser plusieurs sous-réseaux identiques (par exemple appartenant à un seul réseau rectiligne de capteurs équidistants), il est possible d'extraire le propagateur à partir d'une seule épreuve de courte durée et, par suite, de procéder à la goniométrie de sources lointaines. De la sorte peuvent être traités le cas de situations non stationnaires ou celui de fronts d'onde incidents totalement cohérents, puisqu'on exploite seulement le vecteur des signaux reçus et non pas leur matrice interspectrale. La méthode exige un rapport signal à bruit par source au moins égal à 0 dB ; toutefois, s'il existe une certaine cohérence temporelle des sources sur

une durée correspondant à trois ou quatre dizaines d'épreuves, la robustesse vis-à-vis du bruit peut être grandement accrue en employant une technique de mémoire consistant à appliquer un facteur d'oubli au vecteur des signaux reçus. Il s'agit d'une méthode superdirective qui a la propriété de fournir la phase des fronts d'onde incident, ce qui permet éventuellement des mesures de Doppler.

#### MOTS CLÉS

Traitement d'antenne, analyse spatiale, sources corrélées.

#### SUMMARY

*By means of a space-diversity technique which consists in using several identical subarrays (e.g. belonging to a single linear arrays composed of equispaced sensors), the propagator can be extracted from a single short data record and then performs goniometry of remote sources. Thus the cases of non-stationary situations and fully correlated incident wavefronts can be handled, given that only the vector of the received signals is exploited, not their cross-spectral matrix. In this method, a SNR per source at least equal to 0 dB is required. Nevertheless, if a certain temporal coherence exists for the sources during a time interval corresponding to*

*about thirty or forty snapshots, then the robustness can be greatly improved with respect to noise, using a technique which consists in applying an exponential memory to the vector of the received signals. This superdirective method provides the phase of the incident wavefronts which can be used to estimate Doppler shifts.*

#### KEY WORDS

*Antenna processing, spatial analysis, correlated sources.*

## 1. Introduction

De nombreux algorithmes à haute résolution ont été développés ces dernières années dans le but d'identifier des fronts d'onde multiples à partir des signaux reçus sur un réseau de capteurs. Généralement, ils nécessitent l'estimation de la matrice interspectrale de ces signaux, ce qui suppose un temps d'observation assez long et une stationnarité temporelle suffisante. La plupart d'entre

eux, typiquement le goniomètre (algorithme MUSIC) [1, 2], incluent le calcul des éléments propres de la matrice, ce qui peut dans certains cas constituer une charge de calcul excessive. D'autre part, il est connu que ces algorithmes s'avèrent inefficaces dans le cas de cohérences totales entre sources, ce qui oblige à appliquer des techniques particulières comme le « spatial smoothing » [3] ou TAM (Toeplitz approximation method) [4].

Le but de cet article est de décrire un algorithme rapide opérant directement à partir du vecteur des signaux reçus

en représentation fréquentielle, ce vecteur étant obtenu à partir d'une seule observation de courte durée. Comme les intercorrélations entre capteurs ne sont pas utilisées, la méthode s'applique indifféremment à des sources cohérentes ou non. Cette méthode exploite les propriétés du propagateur [5, 6, 7], lequel contient l'information nécessaire permettant d'identifier les fronts d'onde incidents. Pour pouvoir estimer le propagateur à partir d'une seule observation, il faut disposer d'un nombre suffisant de données expérimentales. La solution proposée consiste à utiliser une méthode de diversité d'espace nécessitant plusieurs sous-réseaux identiques pour lesquels le propagateur est supposé avoir la même valeur. Ces sous-réseaux peuvent appartenir à un seul réseau rectiligne d'ensemble, ce qui implique alors une hypothèse de « stationnarité spatiale ». D'une façon similaire, en analyse spectrale, on estime la matrice de corrélation avec une hypothèse de stationnarité temporelle à partir d'un signal échantillonné périodiquement [8, 9]. La « stationnarité spatiale » évoquée ici est un cas particulier de la propriété de « translational equivalent arrays » décrite par Cadzow [10] et utilisée dans la méthode ESPRIT [11] ; elle correspond au cas d'ondes planes reçues sur un réseau rectiligne de capteurs équidistants. Il est à noter que cette propriété est également exploitée dans le procédé « spatial smoothing », mais dans un but différent.

Lorsque le propagateur a été identifié, une procédure semblable à celle utilisée en analyse spectrale peut être mise en œuvre pour localiser les sources, à savoir la recherche des racines d'un polynôme. Finalement, on verra qu'il est possible d'estimer non pas seulement les puissances des ondes incidentes, mais leurs amplitudes complexes et, par conséquent, leurs phases respectives, ce qui est une information précieuse, par exemple pour l'étude des points brillants en technique radar ou pour l'estimation du Doppler en détection active.

En fait, le propagateur dit « monocoup », s'il permet d'opérer à partir d'une seule épreuve de courte durée, a en contrepartie l'inconvénient d'être peu robuste relativement au bruit. Cette robustesse peut être grandement accrue lorsque les fronts d'onde incidents présentent une forte cohérence temporelle, ce qui est souvent le cas lorsque ces fronts correspondent à des trajets multiples ou à des échos radar ou sonar. Pour exploiter cette cohérence temporelle, une méthode mettant en œuvre une mémoire exponentielle appliquée au vecteur des signaux reçus sera proposée à la section 4.

## 2. Le propagateur et son estimation par une méthode de diversité d'espace

Dans la méthode du propagateur, les vecteurs directionnels en représentation fréquentielle  $\mathbf{u}_i$  de dimension  $N$  (pour  $N$  capteurs) ainsi que la matrice  $\mathbf{U}$  dont les  $n$  colonnes (pour  $n$  sources,  $n < N$ ) sont formées par les  $\mathbf{u}_i$  sont partitionnés comme suit

$$(1) \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix},$$

les vecteurs  $\mathbf{x}_i$  et la matrice carrée  $\mathbf{X}$  ayant un nombre de lignes égal au nombre  $n$  de sources. La matrice  $\mathbf{X}$  est supposée non singulière, ce qui implique que les vecteurs directionnels  $\mathbf{x}_i$  correspondant aux  $n$  premiers capteurs soient linéairement indépendants. Alors le propagateur  $\mathbf{P}$  est l'opérateur linéaire de dimension  $n \times (N - n)$  défini par

$$(2) \quad \mathbf{P}^+ = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{y}_i = \mathbf{P}^+ \mathbf{x}_i, \quad \forall i.$$

De (1) et (2), on dérive

$$(3) \quad \mathbf{Q}^+ \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Q}^+ \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad \forall i,$$

avec

$$(4) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{I}$  étant la matrice identité de dimension  $N - n$ .

L'équation (3) est à la base du processus d'identification de fronts d'onde correspondant à un modèle de propagation donné  $\mathbf{u}(\varphi)$  à partir d'une estimation de l'opérateur matriciel  $\mathbf{P}$ . On considère ici le cas d'ondes planes reçues sur un réseau rectiligne de  $N$  capteurs équidistants pour lequel le vecteur directionnel modèle s'écrit

$$(5) \quad \mathbf{u}(\varphi) = [1, z, \dots, z^{N-1}]^T, \quad z = e^{j\varphi},$$

$\varphi$  étant le déphasage incrémental entre capteurs caractérisant la direction de la source. Il est à noter que dans la méthode ESPRIT le principe est radicalement différent : les matrices  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  ont même nombre de lignes et on pose  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}$  étant une matrice diagonale contenant l'information sur les directions des sources. Les opérateurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{D}$  ne peuvent être reliés de manière simple.

Considérons maintenant le vecteur des signaux reçus, en représentation fréquentielle, correspondant à une observation particulière de courte durée

$$(6) \quad \mathbf{v} = \mathbf{U}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b},$$

expression où  $\boldsymbol{\alpha}$  est le vecteur des amplitudes complexes des fronts d'onde incidents et  $\mathbf{b}$  un vecteur bruit. En partitionnant le vecteur  $\mathbf{v}$  comme  $\mathbf{u}_i$  et en supposant que le bruit est négligeable, on peut écrire

$$(7) \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{Y}\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{P}^+ \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix},$$

et, par suite, on a la relation suivante

$$(8) \quad \mathbf{h} = \mathbf{P}^+ \mathbf{g} \quad \text{ou} \quad \mathbf{g}^+ \mathbf{P} = \mathbf{h}^+,$$

où  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$  sont des données expérimentales. En procédant de la sorte, on élimine les inconnues  $\alpha_i$  (amplitudes complexes des sources) pour ne conserver que l'opérateur  $\mathbf{P}$  qui contient l'information relative aux paramètres de propagation (position des sources, forme de l'antenne). Le problème est d'estimer  $\mathbf{P}$ , mais les données  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$  ne suffisent pas ; à ce sujet, rappelons qu'une procédure a été indiquée antérieurement [5, 6] pour estimer  $\mathbf{P}$  à partir de la matrice interspectrale des signaux captés.

La nouvelle méthode proposée pour obtenir un nombre suffisant de données procède par diversité d'espace et consiste à prendre  $p$  sous-réseaux pour lesquels le propagateur est invariant. Par exemple, sur un réseau rectiligne de  $N + p - 1$  capteurs équidistants, on considèrera les  $p$  sous-réseaux 1 à  $N$ , 2 à  $N + 1$ , etc... Le propagateur est le même pour tous ces sous-réseaux si les ondes incidentes sont planes ; en effet, le décalage spatial des sous-réseaux se traduit par des valeurs différentes du vecteur  $\alpha$ , mais les matrices  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  demeurent inchangées. On peut donc écrire en opérant une partition sur chacun des  $p$  sous-réseaux et en utilisant (8)

$$(9) \quad \begin{cases} \mathbf{g}_1^+ \mathbf{P} = \mathbf{h}_1^+ \\ \vdots \\ \mathbf{g}_p^+ \mathbf{P} = \mathbf{h}_p^+ \end{cases}$$

ou encore, sous forme matricielle

$$(10) \quad \mathbf{GP} = \mathbf{H} \quad \text{avec} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^+ \\ \vdots \\ \mathbf{g}_p^+ \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^+ \\ \vdots \\ \mathbf{h}_p^+ \end{bmatrix},$$

$\mathbf{G}$  étant de dimension  $p \times n$  et  $\mathbf{H}$  de dimension  $p \times (N - n)$ .

Si  $p = n$ , on peut vérifier que le fait qu'il y ait effectivement  $n$  sources d'amplitudes non nulles est une condition suffisante pour que la matrice  $\mathbf{G}$  soit inversible et on obtient donc le propagateur par la formule

$$(11) \quad \mathbf{P} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}.$$

La présence de bruit a pour effet de perturber l'estimation de  $\mathbf{P}$ , mais la matrice  $\mathbf{G}$  demeure dans ce cas inversible même si le nombre réel de sources est inférieur à  $n$ .

Si maintenant on prend  $p > n$ , on peut procéder par les moindres carrés en cherchant l'estimée de  $\mathbf{P}$  qui minimise la norme de Frobenius de  $\mathbf{H} - \mathbf{GP}$ , ce qui a pour effet de réduire quelque peu l'influence du bruit ; on a alors

$$(12) \quad \mathbf{P} = (\mathbf{G}^+ \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^+ \mathbf{H}.$$

On remarquera que l'estimation de  $\mathbf{P}$  par (11) ou par (12) nécessite l'inversion d'une matrice  $n \times n$ . Nous appelons « propagateur monocoup » le propagateur estimé par (11) ou (12) à partir d'une seule observation de courte durée, sans passer par la matrice interspectrale.

### 3. Goniométrie au moyen du propagateur monocoup

Considérant l'équation (3) avec le modèle de propagation  $\mathbf{u}(\varphi)$  donné par (5), on voit que les directions des sources correspondent aux valeurs de  $\varphi$  pour lesquelles la norme du vecteur  $\mathbf{Q}^+ \mathbf{u}(\varphi)$  s'annule, la matrice  $\mathbf{Q}$  étant obtenue à partir du propagateur au moyen de (4). La méthode de calcul la plus rapide consiste à prendre  $N = n + 1$  ; la matrice  $\mathbf{Q}$  est alors un vecteur et les solutions correspondent aux  $N - 1$  racines du polynôme  $Q_1^* + Q_2^* z + \dots + Q_N^* z^{N-1}$ , les  $Q_i^*$  étant les conjugués

des éléments du vecteur  $\mathbf{Q}$ . Pour des ondes planes en l'absence de bruit, les racines sont sur le cercle unité dans le plan complexe. En présence de bruit ou d'autres perturbations (fronts d'onde distordus, antenne déformée, gains complexes des capteurs inégaux), les racines peuvent s'écarter du cercle unité et avoir la forme générale  $z = m e^{j\varphi}$ ,  $m$  étant supérieur ou inférieur à 1 ; l'expérience montre que les valeurs de  $\varphi$  correspondant à ces racines sont néanmoins généralement acceptables pour localiser les sources si  $m$  n'est pas trop différent de l'unité. Toutefois, le nombre de racines peut être supérieur au nombre de sources existantes et on observe donc des sources fantômes ou « fausses alarmes » ; celles-ci peuvent le plus souvent être identifiées en tant que telles lorsqu'on opère le processus d'intensimétrie décrit plus loin. Les racines du polynôme peuvent être déterminées par une méthode de gradient complexe en calculant ses dérivées partielles par rapport à  $m$  et à  $\varphi$ . A chaque racine trouvée  $z_i$ , on réduit l'ordre du polynôme en le divisant par  $z - z_i$ . Le temps nécessaire pour trouver ces racines est généralement notablement inférieur à celui que demandent les méthodes classiques du type MUSIC pour balayer le cercle unité avec un pas d'incrément de 1 ou 2 degrés.

La figure 1 illustre un exemple de localisation de trois sources en présence de bruit, obtenu par simulation numérique au moyen d'un réseau rectiligne de seize capteurs alignés et équidistants, les fronts d'onde incidents étant plans. Les rapports signal à bruit sont respectivement de  $-0,46$ ,  $+2,78$  et  $+0,41$  dB pour les sources notées A, B et C ; ceux-ci sont définis pour chaque source comme étant dix fois le logarithme du rapport des normes au carré du vecteur-signal de la source considérée et du vecteur-bruit. La variable utilisée est le déphasage de propagation  $\varphi$  entre capteurs ; pour un espacement entre capteurs d'une demi-longueur d'onde, les azimuts des sources sont respectivement de  $+20^\circ$ ,  $-32^\circ$  et  $-9^\circ$ .

Dans cet exemple, le propagateur est estimé à partir d'une seule épreuve en prenant huit sous-réseaux de neuf capteurs, d'où il résulte que  $\mathbf{G}$  est une matrice  $8 \times 8$  et  $\mathbf{H}$  un vecteur de dimension 8 (formule (10)), ce qui correspond à une hypothèse 8 sources. Par suite, le propagateur  $\mathbf{P}$  est un vecteur de dimension 8 et  $\mathbf{Q}$  un vecteur de dimension 9.

La figure 1.1 représente (en dB) la norme du produit scalaire  $\mathbf{Q}^+ \mathbf{u}(\varphi)$  en fonction de  $\varphi$ , déphasage entre capteurs,  $\mathbf{u}(\varphi)$  étant le vecteur directionnel conforme au modèle (5). Le polynôme en  $z$  formé au moyen des éléments du vecteur  $\mathbf{Q}$  est de degré 8 et possède 8 racines représentées dans le plan complexe sur la figure 1.2. Il est à noter que la figure 1.1 donne les valeurs de la norme de  $\mathbf{Q}^+ \mathbf{u}(\varphi)$  sur le cercle unité, alors qu'on observe deux racines en dehors de ce cercle correspondant aux sources B et C ; il en résulte que ces deux sources ne sont pas résolues sur la figure 1.1. Par contre, on remarque la présence de deux racines très proches du cercle unité qui ne correspondent pas à des sources ; ces racines produisent les deux minimums les plus prononcés de la figure 1.1 qui sont en fait des « fausses alarmes ». Ceci prouve que les résultats fournis par une méthode du type « MUSIC » (ou

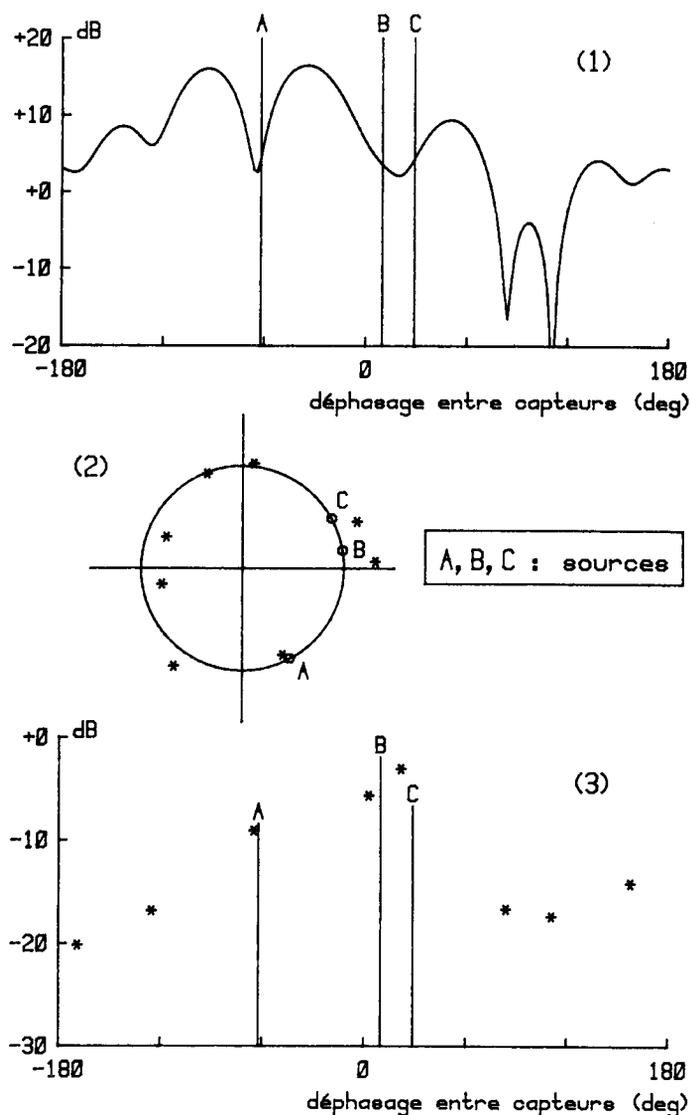


Fig. 1. — Azimétrie et intensimétrie par le propagateur monocoup; 16 capteurs, 3 sources, 1 épreuve.

goniomètre) doivent être pris avec beaucoup de circonspection.

Finalement, la figure 1.3 donne le résultat de l'intensimétrie opérée en calculant une matrice  $16 \times 8$   $U$  dont les colonnes sont les vecteurs-sources estimés correspondant aux 8 valeurs de  $\varphi$  des racines du polynôme en  $z$ . Si on écrit que le vecteur des signaux reçus (de dimension 16 dans l'exemple considéré) est de la forme

$$(13) \quad \mathbf{v} = \mathbf{U}\boldsymbol{\alpha},$$

alors on en déduit le vecteur des amplitudes complexes des sources estimées par

$$(14) \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\mathbf{U}}^+ \hat{\mathbf{U}})^{-1} \hat{\mathbf{U}}^+ \mathbf{v}.$$

Sur la figure 1.3 ont été représentées les puissances estimées des sources, c'est-à-dire les modules au carré de

ces amplitudes complexes, en prenant comme niveau de référence 0 dB la somme de ces puissances. Les solutions exactes sont représentées par les barres verticales notées A, B et C, en prenant également comme niveau 0 dB la somme de leurs puissances respectives.

L'expérience montre, comme on le vérifie sur l'exemple présenté, que des rapports signal à bruit d'au moins 0 dB sont nécessaires pour séparer des sources rapprochées comme B et C; en fait, dans cet exemple, les déphasages de propagation entre capteurs pour ces deux sources diffèrent de  $19^\circ$  alors que la limite de Rayleigh pour un réseau de 16 capteurs est de  $22,5^\circ$ . L'effet de superdirectivité est donc peu marqué, mais on sait que celui-ci dépend essentiellement du rapport signal à bruit, quelle que soit la méthode employée.

### 4. Le propagateur monocoup à mémoire exponentielle

Dans les « méthodes matricielles » utilisant la matrice interspectrale des signaux captés, le rapport signal à bruit se trouve accru par le fait que cette matrice est obtenue par moyennage sur un certain nombre d'épreuves. Un effet comparable peut être observé avec le propagateur monocoup en opérant un moyennage sur le vecteur des signaux reçus.

Plutôt que d'appliquer un simple moyennage, il semble préférable, particulièrement dans le cas de situations évolutives, de mettre en œuvre une mémoire exponentielle consistant, à chaque épreuve, à substituer au vecteur  $\mathbf{v}_k$  représentant à une fréquence donnée l'observation faite à l'épreuve  $k$  le vecteur  $\tilde{\mathbf{v}}_k$  suivant

$$(15) \quad \tilde{\mathbf{v}}_k = \alpha \tilde{\mathbf{v}}_{k-1} + (1 - \alpha) \mathbf{v}_k,$$

expression où  $\alpha$  est le facteur d'oubli qui conditionne la rapidité de décroissance de la mémoire; par exemple,  $\alpha = 0,95$  est une valeur typique pour laquelle le coefficient d'atténuation vaut 0,21 au bout de 30 épreuves. La formule (15) est comparable à celle qu'on emploierait pour une estimation récursive de la matrice interspectrale  $\Gamma$  à savoir

$$(16) \quad \Gamma_k = \alpha \Gamma_{k-1} + (1 - \alpha) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^+.$$

Dans les deux cas, le nombre d'épreuves nécessaires est généralement de quelques dizaines.

Pour qu'une mémoire soit applicable au propagateur monocoup, il est nécessaire que les signaux des sources présentent une cohérence temporelle suffisante pendant une durée correspondant à celle de la mémoire. Ceci implique: 1) que les déplacements angulaires des sources soient négligeables pendant cette durée, 2) que les phases de leurs amplitudes complexes ne fluctuent pas excessivement; une fluctuation de quelques dizaines de degrés est acceptable,  $50^\circ$  étant l'ordre de grandeur d'une borne supérieure pour l'écart-type. De plus, on ne peut escompter obtenir une amélioration notable du rapport signal à bruit que si le vecteur-bruit varie fortement d'une épreuve à la suivante. Par exemple, on peut observer un gain en

rapport signal à bruit de l'ordre de 15 dB avec un facteur d'oubli de 0,95. Les conditions précédentes correspondent en particulier au cas de sources quasi-monochromatiques en présence de bruit à large bande.

Au sujet de la cohérence temporelle d'une source et de la cohérence mutuelle entre sources (à ne pas confondre avec intercorrélacion), on se reportera à l'Annexe. L'idée de base en ce qui concerne le propagateur monocoup à mémoire exponentielle est d'exploiter la cohérence temporelle des sources (lorsqu'elle existe) qui entraîne une cohérence mutuelle entre sources, plutôt que de la détruire comme on le fait usuellement par le « spatial smoothing ». Dans les méthodes matricielles classiques, on exploite seulement le fait que les fronts d'onde sont structurés, c'est-à-dire ont une cohérence spatiale (contrairement au bruit qui n'en a en principe pas).

L'utilisation du propagateur monocoup sans ou avec mémoire exponentielle est illustrée par les figures 2 à 5, obtenues par simulation numérique dans les conditions

suivantes : 1 000 épreuves sont simulées, pendant lesquelles les trois sources se déplacent en azimut, la première de +30° à -35°, la seconde de +15° à +10° et la troisième de -40° à -15°. Les amplitudes complexes de ces sources ont une phase aléatoire équipartie de -45° à +45°, ce qui correspond à un écart-type de 26° et, par suite, elles sont assez fortement cohérentes (un écart-type de cet ordre est relativement courant dans un milieu de propagation turbulent). A chaque épreuve est ajouté un vecteur-bruit aléatoire dont les éléments sont tirés au hasard selon une loi de Rayleigh pour les modules et une loi équipartie  $[-\Pi, +\Pi]$  pour les phases ; à noter qu'à très long terme, ceci donne asymptotiquement une matrice de bruit de type  $\sigma^2 \mathbf{I}$ . Les trois fronts d'onde, supposés plans, sont reçus sur un réseau rectiligne de 16 capteurs identiques et équidistants. Sur les quatre figures, les résultats de l'azimétrie et de l'intensimétrie sont représentés toutes les 20 épreuves, en ne conservant que les six solutions les plus puissantes, les trois principales étant notées par des croix, les trois autres par des points. Les rapports signal à bruit par

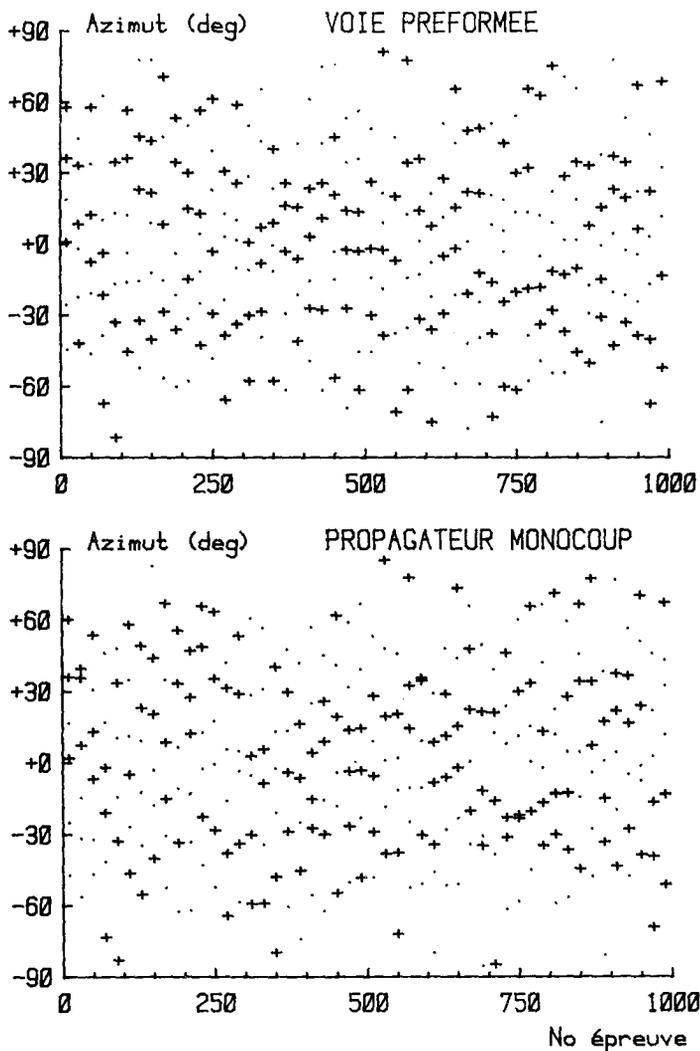


Fig. 2. — Tentative de localisation de sources sans mémoire à très bas rapport signal à bruit.

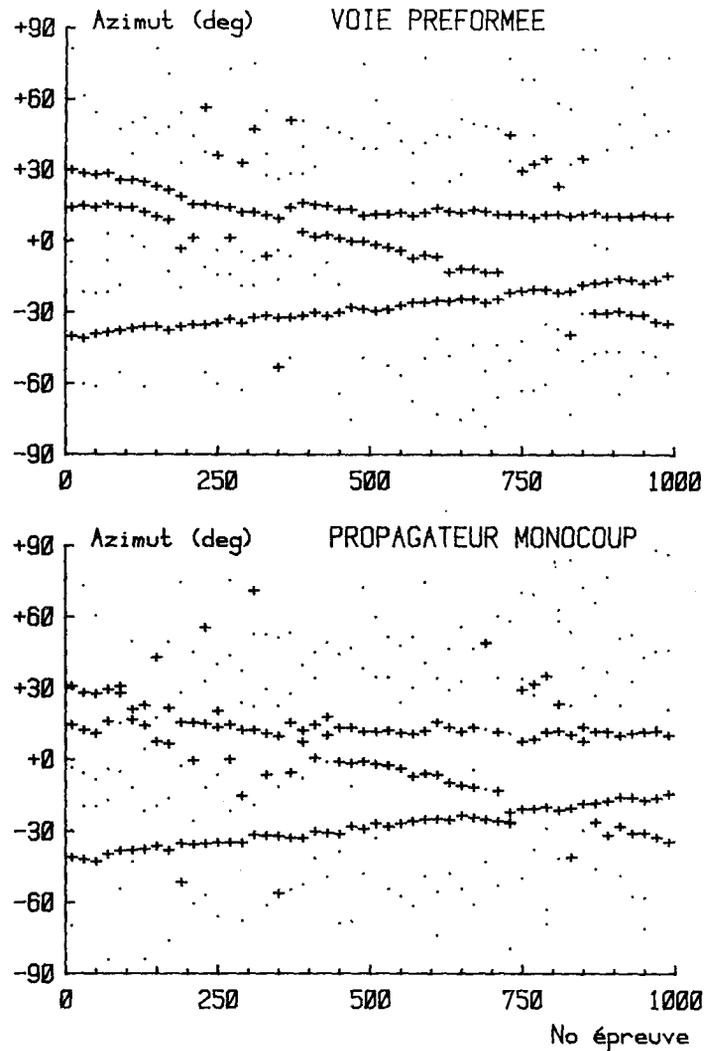


Fig. 3. — Application d'une mémoire exponentielle aux données de la figure 2.

source valent respectivement  $-15,0$   $-17,7$  et  $-12,8$  dB pour les figures 2, 3 et 4 ; ils valent  $+15,0$ ,  $+12,3$  et  $+17,2$  dB pour la figure 5.

La figure 2 concerne la voie préformée à 16 capteurs avec pondération de Bartlett et le propagateur monocoup à 10 sous-réseaux de 7 capteurs (hypothèse 6 sources) sans mémoire ; les rapports signal à bruit étant très mauvais, les sources ne sont pas détectées.

Pour la figure 3, dans les mêmes conditions, une mémoire exponentielle avec facteur d'oubli de 0,95 est utilisée ; les sources apparaissent alors nettement et on constate que la voie préformée et le propagateur monocoup ont des performances équivalentes.

A titre de comparaison, la figure 4 montre les résultats obtenus avec deux méthodes de type matriciel, le goniomètre (algorithme MUSIC) et le propagateur évalué à partir de la matrice interspectrale. Cette dernière est estimée avec un facteur d'oubli de 0,95 et nécessite donc une durée d'observation identique à celle utilisée pour la figure 3.

Les sources étant fortement cohérentes, on a procédé à un lissage spatial en utilisant les capteurs par groupes de 7, ce qui conduit à une hypothèse 6 sources, comme pour le propagateur monocoup. Il est clair que ces méthodes matricielles donnent de moins bons résultats, dans des conditions d'exploitation équivalentes, que les méthodes précédentes. L'interprétation la plus vraisemblable de ce phénomène est que les méthodes matricielles n'exploitent que la cohérence spatiale des fronts d'onde et non la cohérence temporelle des signaux : de fait, ces méthodes sont conçues pour des signaux aléatoires.

Enfin, la figure 5 obtenue avec mémoire et un très bon rapport signal à bruit montre que le propagateur monocoup est très supérieur à la voie préformée en ce qui concerne le pouvoir séparateur angulaire ; c'est une méthode superdirective. La propriété de superdirectivité du propagateur monocoup est essentiellement due au fait qu'une méthode de zéro est employée pour localiser les sources, comme dans le goniomètre, contrairement à la voie préformée qui est une méthode à maximum de signal.

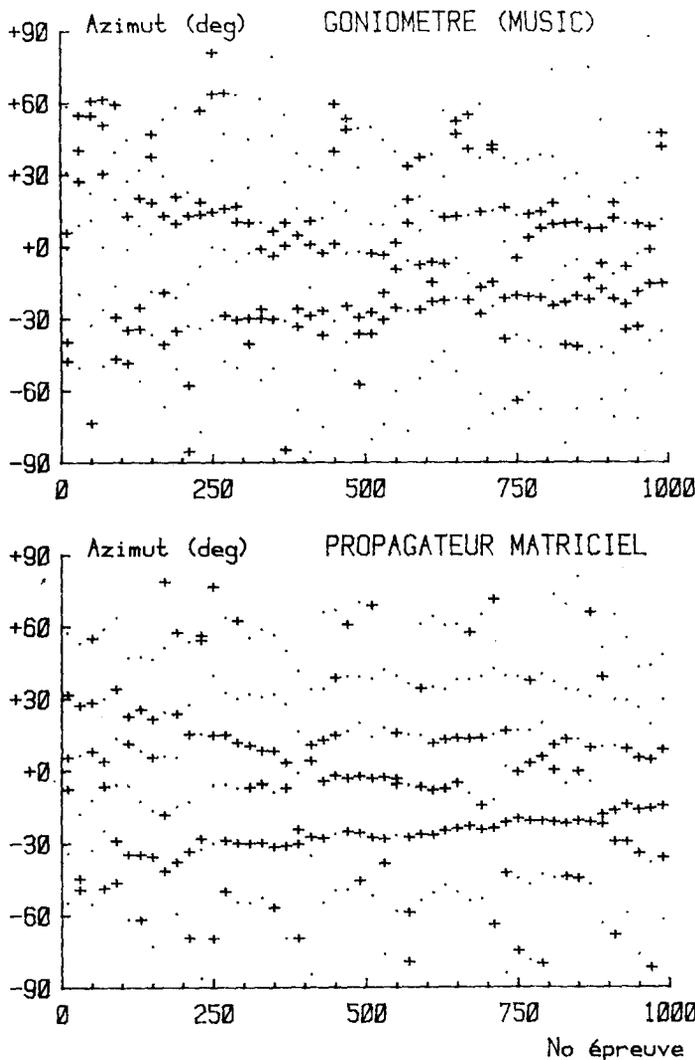


Fig. 4. — Utilisation de méthodes matricielles (données de la figure 2).

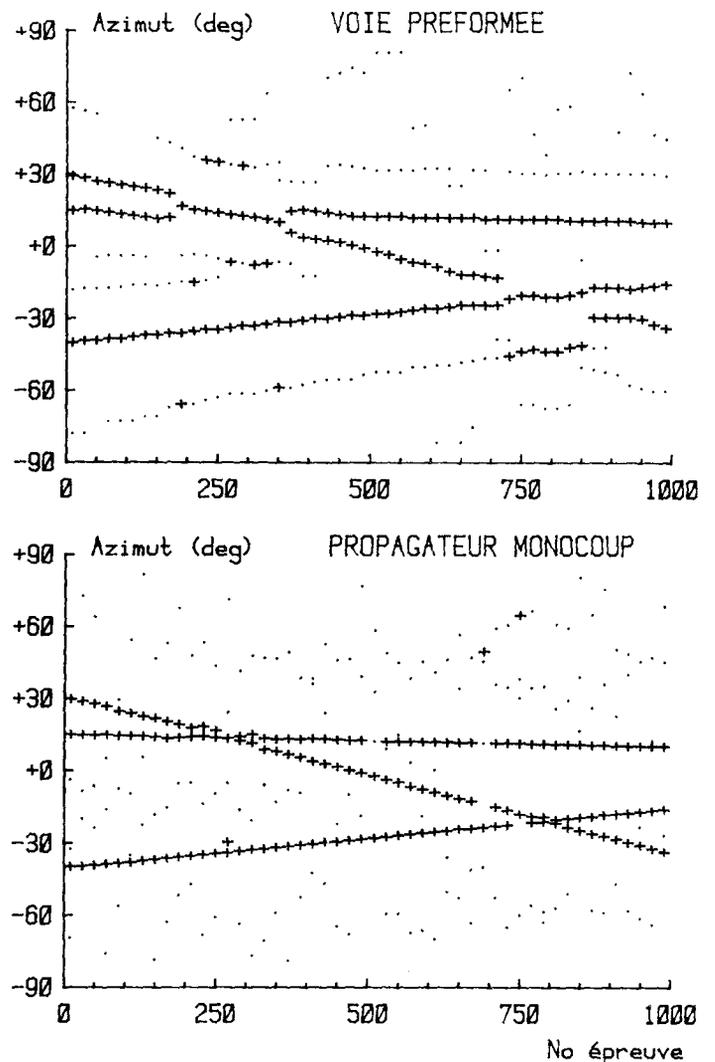


Fig. 5. — Localisation à haut rapport signal à bruit.

En outre, le propagateur monocoup ne présente pas de « fausses pistes » comme en présente la voie préformée, celles-ci étant dues à l'existence de lobes secondaires de directivité.

Dans les figures 2 à 5, les solutions trouvées ont été classées selon leurs puissances respectives proportionnelles au carré des modules des amplitudes complexes calculées selon (14) en ce qui concerne les méthodes non-matricielles, mais il ne faut pas perdre de vue que ces dernières fournissent en outre la phase des fronts d'onde incidents, une information dont on peut tirer parti par exemple pour évaluer le Doppler en détection active.

## 5. Conclusion

Le propagateur dit « monocoup » peut être estimé à partir d'une seule épreuve, par conséquent sans avoir à évaluer une matrice interspectrale, sous réserve qu'on puisse disposer de plusieurs sous-réseaux identiques de capteurs (méthode de diversité d'espace). Cette particularité permet de le ranger dans la même catégorie que la voie préformée ; comme cette dernière, il est apte à fournir non seulement le module, mais aussi la phase de fronts d'onde incidents et, de plus, il peut traiter rapidement des situations évolutives avec une faible charge de calcul. Par rapport à la voie préformée, il se présente comme une méthode superdirective, du moins si le rapport signal à bruit est suffisant (ce qui est le propre de toute méthode superdirective).

D'autre part, le propagateur monocoup (comme d'ailleurs la voie préformée) permet de tirer partie de la cohérence temporelle des signaux des sources lorsqu'elle existe, au moins sur une durée limitée, en mettant en œuvre une mémoire exponentielle appliquée au vecteur des signaux reçus ; dans ces conditions, il apparaît comme plus puissant que les méthodes « matricielles » (du type goniomètre ou algorithme MUSIC) qui n'exploitent que la cohérence spatiale des fronts d'onde.

La robustesse vis-à-vis du bruit est évidemment d'autant meilleure que les deux sortes de cohérence (spatiale et temporelle) des signaux des sources sont plus accentuées par rapport à celles du bruit.

Finalement, il semble qu'on puisse délimiter le champ d'application du propagateur monocoup *a*) au cas de situations rapidement évolutives (à condition que le rapport signal à bruit soit suffisant, disons au moins 0 dB), *b*) au cas où le caractère aléatoire des sources est peu marqué (notamment, sources cohérentes, détection active, identification de points brillants), avec application d'une technique de mémoire.

En bref, on peut dire que le propagateur monocoup à mémoire peut s'appliquer à des fronts d'onde à phase modérément fluctuante présentant une bonne cohérence temporelle, tandis que les méthodes matricielles s'appliquent de préférence à des fronts d'onde à phase fortement fluctuante présentant une bonne stationnarité.

Manuscrit reçu le 12 février 1990.

## Annexe

### CORRÉLATION ET COHÉRENCE EN ANALYSE SPATIALE

Si l'on considère deux variables aléatoires complexes  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  (dans le cas qui nous intéresse, il s'agit des amplitudes complexes de fronts d'onde), leur coefficient de corrélation complexe est défini par

$$(A.1) \quad \rho = \frac{E\{\tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_j^*\}}{\sqrt{E\{|\tilde{\alpha}_i|^2\} E\{|\tilde{\alpha}_j|^2\}}},$$

$\tilde{\alpha}_i$  et  $\tilde{\alpha}_j$  étant les valeurs centrées de  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$ .

Leur *coefficient de cohérence* est défini par la même formule dans laquelle on utilise les valeurs non-centrées  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$ . Il importe de remarquer que ce sont les coefficients de cohérence entre sources qui interviennent lorsqu'on considère la matrice interspectrale des signaux captés et non les coefficients de corrélation. Ainsi, lorsqu'on « normalise » la matrice interspectrale en divisant chacun de ses termes  $\Gamma_{ij}$  par la quantité  $\sqrt{\Gamma_{ii} \Gamma_{jj}}$ , on obtient la *matrice de cohérence*, dont les éléments diagonaux valent l'unité. Le terme  $C_{ij}$  de cette matrice est le coefficient de cohérence entre les signaux issus des capteurs *i* et *j*. Toutes ces quantités sont fonction de la fréquence mais, en analyse spatiale, on travaille à une fréquence donnée, en fait avec une composante de Fourier particulière des signaux captés.

En l'absence de bruit, la matrice interspectrale  $N \times N$  (pour *N* capteurs) s'écrit

$$(A.2) \quad \Gamma = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^+,$$

expression où  $\mathbf{U}$  est la matrice des vecteurs-sources et  $\mathbf{S} = E\{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^+\}$  la matrice interspectrale  $n \times n$  (pour *n* sources) des signaux des différents fronts d'onde incidents, telle qu'on pourrait l'observer à la sortie du capteur de référence s'il était possible de séparer les contributions respectives des sources. Les éléments de  $\mathbf{S}$  ne sont pas des covariances centrées, mais des moments du second ordre, de telle sorte que la matrice  $\boldsymbol{\Sigma}$  dont les éléments  $\Sigma_{ij}$  valent  $S_{ij}/\sqrt{S_{ii} S_{jj}}$  est la *matrice de cohérence des sources*. Si au moins un des éléments  $\Sigma_{ij}$  vaut l'unité, c'est-à-dire s'il existe au moins deux sources totalement cohérentes, alors les matrices  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\mathbf{S}$  sont singulières et il s'ensuit que le rang de  $\Gamma$  devient inférieur à *n*. On sait que les sources totalement cohérentes ne peuvent être séparées par les méthodes matricielles usuelles, telles que le goniomètre, sauf à « décoherer » les sources par une technique telle que le « spatial smoothing ».

Posons  $\alpha_i = a_i e^{j\varphi_i}$  et  $\alpha_j = a_j e^{j\varphi_j}$ . Dans un premier temps, on supposera les modules  $a_i$  et  $a_j$  constants et les phases aléatoires, celles-ci étant mises sous la forme  $\varphi_i = \bar{\varphi}_i + \theta_i$  et  $\varphi_j = \bar{\varphi}_j + \theta_j$ ,  $\bar{\varphi}_i$  et  $\bar{\varphi}_j$  étant les valeurs moyennes. On supposera en outre que les termes aléatoires  $\theta_i$  et  $\theta_j$  sont équipartis entre  $-\theta_m$  et  $\theta_m$  ; ces termes aléatoires

sont dus aux fluctuations de propagation. Dans ces conditions, on trouve

$$(A.3) \quad E \{ \alpha_i \} = a_i e^{j\bar{\varphi}_i} \frac{\sin \theta_m}{\theta_m}$$

et une expression identique pour  $\alpha_j$ . En guise de première conclusion, l'amplitude complexe du front d'onde reçu d'une source ne peut être considérée comme une variable aléatoire centrée (ce qu'on admet le plus souvent) que si le terme aléatoire de la phase est équiparti entre  $-\Pi$  et  $+\Pi$ , ce qui ne se produit en pratique que si la source est à très grande distance (ou si la source a elle-même une amplitude complexe très fortement variable).

D'autre part, le calcul du moment croisé du deuxième ordre donne

$$(A.4) \quad E \{ \alpha_i \alpha_j^* \} = a_i a_j \left( \frac{\sin \theta_m}{\theta_m} \right)^2 e^{j(\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_j)}$$

De là on tire la covariance de  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  et le coefficient de corrélation, qu'on trouve nuls si les V.A.  $\theta_i$  et  $\theta_j$  sont indépendantes. Par contre, le coefficient de cohérence de  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  vaut

$$(A.5) \quad C = \left( \frac{\sin \theta_m}{\theta_m} \right)^2 e^{j(\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_j)}$$

Donc, deux fronts d'onde ne sont mutuellement non-cohérents que si les composantes aléatoires des phases sont équiparties entre  $-\Pi$  et  $+\Pi$ . Couramment, la valeur de  $\theta_m$  va de quelques degrés (pour des sources à très courte distance), à quelques dizaines de degrés, d'où il résulte que le coefficient de cohérence des deux fronts d'onde est important, quoique leur coefficient de corrélation soit nul si les V.A.  $\theta_i$  et  $\theta_j$  sont indépendantes.

Dans une transmission à distance, la plus grande partie de l'énergie transite à l'intérieur du premier ellipsoïde de Fresnel, dont les foyers sont l'émetteur et le récepteur et qui est tel que la somme des distances de tout point de l'ellipsoïde à l'émetteur et au récepteur excède d'une demi-longueur d'onde la distance émetteur-récepteur. Si les ellipsoïdes de Fresnel relatifs à deux fronts d'onde incidents n'ont qu'une faible intersection, il y a de fortes chances pour que les V.A.  $\theta_i$  et  $\theta_j$  soient effectivement indépendantes.

Si maintenant on suppose que les modules  $a_i$  et  $a_j$  sont aléatoires et non les phases et que ces modules fluctuent indépendamment, alors on trouve comme pour les phases, que les fronts d'onde ne sont pas corrélés. Par contre, en supposant que la fluctuation relative des modules est équipartie entre  $1-k$  et  $1+k$ ,  $k < 1$ , on trouve que le module du coefficient de cohérence vaut  $(1+k^2/3)^{-1}$ ; par conséquent le coefficient de cohérence reste compris entre 0,75 et 1, d'où il résulte que la fluctuation des modules n'a qu'une importance tout à fait secondaire par rapport à celle des phases.

Enfin, en ce qui concerne la cohérence temporelle des signaux d'une source particulière, elle se définit comme pour deux sources, mais en considérant deux épreuves distinctes. Le propagateur monocoup à mémoire est utilisable si cette cohérence est suffisamment forte et se maintient pendant plusieurs dizaines d'épreuves; plus précisément, on peut admettre des valeurs de  $\theta_m$  allant jusqu'à  $90^\circ$  environ. Toutefois, la cohérence de phase se perd si le signal de la source est affecté de Doppler; le glissement de phase tolérable n'excède pas  $3$  à  $5^\circ$  par épreuve pour une mémoire portant sur quelques dizaines d'épreuves (sinon, il faut opérer une compensation de Doppler).

A noter aussi que deux fronts d'onde ayant chacun une forte cohérence temporelle présenteront un déphasage différentiel à fluctuations limitées et, par suite, une forte cohérence mutuelle; c'est souvent le cas des trajets multiples issus d'une même source.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. O. SCHMIDT, *Multiple emitter location and signal parameter estimation*, IEEE Trans., Antennas Propag., AP-34, March 1986, p. 276-280.
- [2] G. BIENVENU, L. KOPP, *Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach*, IEEE Trans., Acoust. Speech, Signal Process., ASSP-31, Oct. 1983, p. 1235-1248.
- [3] T. J. SHAN, M. WAX, T. KAILATH, *On spatial smoothing for direction of arrival estimation of coherent signals*, IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Process., ASSP-33, Aug. 1985, p. 806-811.
- [4] S. Y. KUNG, K. S. ARUN, D. V. BHASKAR RAO, *State-space and singular-value decomposition based approximation methods for the harmonic retrieval problem*, Journ. Opt. Soc. Am., 73, Dec. 1983, p. 1799-1811.
- [5] S. MARCOS, J. MUNIER, *Source localization using a distorted antenna*, Proc. ICASSP, 1989, Glasgow, p. 2756-2759.
- [6] S. MARCOS, J. MUNIER, *Le propagateur et son estimation adaptative*, 12<sup>e</sup> Colloque GRETSI, 1989, Juan-les-Pins, p. 489-492.
- [7] J. MUNIER, G. Y. DELISLE, *Spatial analysis using new properties of the cross-spectral matrix*, à paraître dans IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.
- [8] V. F. PISARENKO, *The retrieval of harmonics from a covariance function*. Geophys. J.R. Astr. Soc., 33, 1973, p. 347-366.
- [9] D. W. TUFTS, R. KUMARESAN, *Estimation of frequencies of multiple sinusoids: making linear prediction perform like maximum likelihood*. Proc. IEEE, 70, Sept. 1982, p. 975-989.
- [10] J. A. CADZOW, *A high resolution direction-of-arrival algorithm for narrow-band coherent and incoherent sources*, IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Process., ASSP-36, July 1988, p. 965-979.
- [11] A. PAULRAJ, R. ROY, T. KAILATH, *A subspace rotation approach to signal parameter estimation*, Proc. IEEE, 74, July 1986, p. 1044-1045.