

# Analyse multirésolution pour les images

avec un facteur de résolution  $\sqrt{2}$

Multiresolution analysis for images with a resolution factor  $\sqrt{2}$

**J. C. FEAUVEAU**



LRI, Université de Paris Sud, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE.  
Thomson CSF, 1 rue des Mathurins, 92223 BAGNEUX, FRANCE.

Ancien élève de l'École Normale Supérieure, Agrégé de Mathématiques (1987). Docteur de l'Université Paris Sud spécialité Informatique (1990). Domaine de recherche : application des techniques d'analyse multirésolution à la compression et à la segmentation d'image, théorie des ondelettes, réseaux connexionnistes.

## RÉSUMÉ

Récemment, un algorithme d'analyse multirésolution a été proposé par S. Mallat. Cet algorithme a pour but d'extraire les caractéristiques d'un signal en l'analysant à diverses échelles, un facteur de résolution 2 reliant deux échelles consécutives. Nous développons ici un cadre théorique et un algorithme dédié au traitement d'images, avec un facteur de résolution  $\sqrt{2}$  qui double la finesse d'analyse. Une autre caractéristique essentielle de cet algorithme est d'être non sélectif à l'orientation comme le montre les images sur lesquelles il a été testé.

**MOTS-CLÉS :** Analyse multirésolution orthogonale, ondelettes, facteur de résolution  $\sqrt{2}$ , passages par zéro, filtres non sélectifs à l'orientation.

## SUMMARY

*Recently, an algorithm for multiresolution signal analysis, based on wavelet theory has been proposed by S. Mallat. The basic idea is to capture significant details in the signal through the analysis at successive scales. Mallat's algorithm uses a scaling factor of 2 between two successive scales.*

*The aim of this paper is to develop a theory and an algorithm for image processing, with a scaling factor of  $\sqrt{2}$ . This will allow for simpler results interpretation and doubled sharpness of analysis. The theory is illustrated on both artificial and natural images, where our algorithm proves efficient for non-oriented contour detection.*

**KEY WORDS :** *Orthogonal multiresolution analysis, wavelets, resolution factor  $\sqrt{2}$ , zero crossings, non-oriented process.*

## 1. Introduction

Les analyses multirésolutions orthogonales que nous étudions ici font partie d'une famille de traitements du signal liée à la théorie des ondelettes développée par Y. Meyer [1].

Pour situer l'intérêt d'une analyse multirésolution, supposons que nous cherchions à étudier les « objets » contenus dans une image à niveaux de

gris. Puisque toute l'information accessible se trouve dans la luminance, la détection d'un objet n'est possible que s'il existe, dans l'image, une variation significative d'un paramètre caractérisant cet « objet ». Une approche classique consiste à rechercher des « contours », ou des « textures », par des filtrages sélectifs ou non à l'orientation. Les filtres habituellement utilisés détectent les variations premières ou secondes de l'intensité lumineuse. Encore

faut-il que ces paramètres caractéristiques puissent être extraits du voisinage où ils se trouvent : si un contour fin et non bruité ne peut être détecté que par une analyse très fine et très locale, cette même analyse se révélera inefficace pour détecter un contour noyé dans du bruit ou mal localisé. Dans ce dernier cas, il faudra tout au contraire prendre du recul pour que l'objet apparaisse. C'est ce type de difficulté que se propose de résoudre l'analyse multirésolution par ondelettes. Pour cela il faut un outil d'analyse — un filtre analogique ou numérique — qui puisse agir à la manière d'un microscope, afin de fournir des caractéristiques de l'image originale à diverses échelles. Dans le cadre de l'analyse multirésolution, cet outil est précisément une ondelette.

Supposons que nous disposions de la version d'une image à une certaine échelle. Le pas de base de l'analyse multirésolution consiste à projeter cette image sur une échelle de plus basse résolution (il y a donc perte d'informations), et d'extraire une image qui capte les détails disparus lors de la perte de résolution. Cette image inter-échelles est obtenue par convolution avec l'ondelette associée à l'analyse multirésolution. Cette décomposition n'augmente pas le nombre d'échantillons constituant le signal original, de plus cette transformation est réversible.

Ce type de traitements est assez proche d'algorithmes utilisés pour la compression d'image. Ainsi, la Pyramide Laplacienne [2] permet de coder une image grâce à des opérateurs de filtrages locaux intégrant une certaine notion d'échelle. Néanmoins, c'est réellement dans le cadre de l'analyse multirésolution qu'il a été possible d'utiliser concrètement le concept d'échelle après l'avoir défini explicitement.

L'analyse multirésolution orthogonale développée par S. Mallat et Y. Meyer [3], [4] se caractérise par un facteur de résolution 2 entre deux échelles consécutives — nous qualifierons par la suite cette analyse de « dyadique » pour référer à ce facteur 2 —. Ainsi que la note I. Daubechies [5], la théorie des ondelettes orthogonales sur laquelle repose l'analyse multirésolution est telle que ce facteur de résolution ne peut être pris arbitrairement, et jusqu'à présent seul la valeur 2 a réellement été étudiée et utilisée.

Notre but ici est d'explicitier une théorie et un algorithme d'analyse multirésolution pour le traitement d'images avec un facteur de résolution  $\sqrt{2}$ . L'utilisation d'un facteur  $\sqrt{2}$  (au lieu de 2) permet de doubler le nombre des espaces de projection qui définissent les échelles, et donc de doubler la finesse de l'analyse. Nous montrerons de plus qu'une unique image inter-échelles est suffisante alors que trois sont nécessaires dans le cas dyadique.

Appliqué au traitement d'images, un choix naturel d'ondelettes permet d'interpréter les images inter-échelles obtenues par ces algorithmes comme l'échantillonnage de l'image originale filtrée par une dérivation d'ordre deux d'une fonction de lissage. Ceci permet d'utiliser la théorie bien connue des passages par zéro (zéro crossing) [6], [7], [8], [9], [10]. L'algorithme dyadique utilise des filtres séparables à dérivées secondes directionnelles. Au contraire, l'algorithme développé ici utilise des filtres

non séparables au sens usuel, et ces filtres sont non sélectifs à l'orientation. De plus, ce nouvel algorithme décompose l'image initiale en deux fois plus d'échelles, ce qui permet de mieux suivre les passages par zéro et ainsi de se rapprocher de la notion d'espace d'échelle (scale space) définie par Witkin [10]. L'espace d'échelle d'une image consiste en la superposition ordonnée des « vues » de cette image à diverses échelles. Ce type de représentation permet, par exemple, de détecter des contours à une faible résolution, puis de suivre ceux-ci en remontant au travers des diverses échelles afin de les localiser précisément à haute résolution.

De notre point de vue, l'intérêt essentiel de l'analyse multirésolution orthogonale développée ici ne réside pas dans les preuves mathématiques, mais bien dans ses applications à l'analyse d'images. En particulier la représentation obtenue est suffisamment fine pour permettre la détection de contours, de textures et de détails dépendants de l'échelle.

La partie 2 rappelle la théorie dyadique qui fait référence ; la description du formalisme mathématique pour un facteur de résolution  $\sqrt{2}$  est faite en section 3. L'algorithme associé est développé dans la quatrième partie, et l'analyse des traitements effectués par ces deux analyses multirésolutions est discutée à la section 5. La partie 6 regroupe des résultats sur des images tests.

## 2. Rappel de l'analyse multirésolution orthogonale dyadique

Nous allons développer un traitement spécifique à l'image, aussi les fonctions utilisées par la suite seront, par hypothèse, dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  sauf mention explicite. Le produit scalaire usuel sera noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Soit alors  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $k = (k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . Par la suite, pour  $f(x, y)$  égal à  $\Phi(x, y)$  et  $\Psi(x, y)$ , on utilisera les notations suivantes :

$$f_j(x, y) = 2^j f(2^j x, 2^j y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f_{jk}(x, y) = 2^j f(2^j x - k_x, 2^j y - k_y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

L'indice  $j$  correspond donc à une dilation d'un facteur  $2^j$  alors que, pour  $j$  fixé, l'indice  $k = (k_x, k_y)$  correspond à une translation de  $(2^{-j} k_x, 2^{-j} k_y)$  pour la fonction  $f_j(x, y)$ .

La transformée de Fourier est un outil particulièrement bien adapté à l'étude de l'analyse multirésolution. On notera  $\hat{f}(\omega_x, \omega_y)$  la transformée de Fourier de  $f(x, y)$  :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2),$$

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i(x\omega_x + y\omega_y)} dx dy.$$

Nous allons à présent rappeler la notion d'analyse multirésolution orthogonale dyadique — c'est-à-dire, avec un facteur de résolution 2 —, qui, dans la définition adoptée ici, sera toujours générée par une famille orthogonale.

Une telle analyse se compose de deux parties : l'image originale est, d'une part, projetée sur une suite croissante de sous espaces vectoriels fermés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , par ailleurs l'information perdue entre deux échelles consécutives est extraite par projection sur une autre suite de sous espaces  $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

S. Mallat et Y. Meyer [3], [11] ont montré que ce programme peut être réalisé de la manière suivante. Il existe des fonctions  $\Phi(x, y)$  telles que :

- (i)  $\forall j \in \mathbb{Z} \quad V_j \subset V_{j+1}$
- (ii)  $(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$  est une base hilbertienne de  $V_j$
- (iii)  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

avec  $V_j = \overline{\text{Vect}(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}}$ , le sous espace fermé engendré par  $(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$ .

La définition des espaces  $V_j$  induit le facteur de résolution 2 entre deux espaces car  $f(x, y)$  appartient à  $V_j$  si et seulement si  $f(2x, 2y)$  appartient à  $V_{j+1}$ . Ainsi la fonction  $f(x, y)$ , considérée comme étant une image vue à l'échelle  $2^j$ , a ses détails dilatés d'un facteur 2 lorsqu'elle est considérée à l'échelle  $2^{j+1}$ .

La condition (i) traduit le fait que toute information accessible à l'échelle  $2^j$  (i.e. la projection sur  $V_j$ ) l'est aussi à l'échelle  $2^{j+1}$  : l'information contenue dans l'image est dégradée lorsque  $j$  décroît. (iii) Exprime une condition de complétude. Compte tenu de (ii), ceci est réalisée dès que  $\Phi$  est suffisamment régulière et  $\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x, y) dx dy \neq 0$ , ce qui sera toujours le cas. En fait, lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$ ,  $2^j \Phi_{j,k}(x, y)$  est assimilable à une masse de Dirac.

Les espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  étant fermés et emboîtés, pour tout indice  $j$  il existe un unique espace  $W_j$  inclu dans  $V_{j+1}$  et orthogonal à  $V_j$ , tel que  $V_{j+1}$  soit la somme directe de  $V_j$  et  $W_j$  :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Supposons que  $\Phi$  satisfasse les conditions (i), (ii) et (iii). Alors il existe trois fonctions (les ondelettes)  $\Psi^1, \Psi^2$  et  $\Psi^3$  telles que l'espace inter-échelles  $W_j$  vérifie :

$$W_j = W_j^1 \oplus W_j^2 \oplus W_j^3 \quad \text{où l'on a posé} \\ W_j^i = \overline{\text{Vect}(\Psi_{jk}^i)_{k \in \mathbb{Z}^2}}.$$

De plus,  $(\Psi_{jk}^i)_{k \in \mathbb{Z}^2}$  est une base hilbertienne de  $W_j^i$ .

Afin de construire facilement de telles analyses multirésolutions, S. Mallat [4] a montré que si  $m_0(\omega) \in L^\infty([0, 2\pi[)$  est différentiable et vérifie :

- (1)  $m_0(0) = 1$
- (2)  $\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$
- (3)  $\exists \rho > 0 / \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |\omega| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |m_0(\omega)| > \rho.$

alors on obtient une telle fonction  $\Phi$  par la formule :

$$(4) \quad \widehat{\Phi}(2\omega_x, 2\omega_y) = m_0(\omega_x, \omega_y) \widehat{\Phi}(\omega_x, \omega_y)$$

avec  $m_0(\omega_x, \omega_y) = m_0(\omega_x) m_0(\omega_y),$

de plus, les fonctions  $\Psi^i$  sont définies grâce à :

$$m_1(\omega_x, \omega_y) = \bar{m}_0(\omega_x + \pi) m_0(\omega_y) e^{-i\omega_x}, \\ m_2(\omega_x, \omega_y) = m_0(\omega_x) \bar{m}_0(\omega_y + \pi) e^{-i\omega_y}, \\ m_3(\omega_x, \omega_y) = \bar{m}_0(\omega_x + \pi) \bar{m}_0(\omega_y + \pi) e^{-i(\omega_x + \omega_y)},$$

où la notation  $\bar{z}$  représente le nombre complexe conjugué de  $z$ , et l'on a :

$$(5) \quad \widehat{\Psi}^i(2\omega_x, 2\omega_y) = m_i(\omega_x, \omega_y) \widehat{\Phi}(\omega_x, \omega_y).$$

La projection d'une image  $\mathcal{F}(x, y)$  sur l'échelle  $V_j$  se décompose sur la base  $(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$  :  $\mathcal{F}_j = \sum_k C_{j,k} \Phi_{j,k}$ . De même, la projection sur

$W_j^i$  s'écrit  $\mathcal{F}_j^i = \sum_k S_{j,k}^i \Psi_{j,k}$  pour  $i = 1, 2$  et 3. La

relation  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j^1 \oplus W_j^2 \oplus W_j^3$  s'écrit alors  $\mathcal{F}_{j+1} = \mathcal{F}_j + \mathcal{F}_j^1 + \mathcal{F}_j^2 + \mathcal{F}_j^3.$

Il est clair que les ensembles de coefficients  $I_j = (C_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$  et  $J_j^i = (S_{j,k}^i)_{k \in \mathbb{Z}^2}$  sont des représentations de  $\mathcal{F}_j$  et  $\mathcal{F}_j^i$ .

Rappelons à présent le principe de l'algorithme de décomposition. Nous savons que l'information contenue dans la projection d'une image sur  $V_{j+1}$  est équivalente à celle contenue dans les projections sur  $V_j$  et  $W_j$ . Autrement dit, il existe une transformation linéaire inversible entre les ensembles de coefficients  $I_{j+1}$  et  $(I_j, J_j^1, J_j^2, J_j^3)$ . Cette transformation est le pas de base de la décomposition et la transformation inverse est l'étape élémentaire de reconstruction. Pour initialiser l'algorithme de décomposition, on commence par identifier l'image digitalisée que l'on cherche à analyser avec  $I_0$ . On effectue alors la décomposition de  $I_0$  en  $(I_{-1}, J_{-1}^1, J_{-1}^2, J_{-1}^3)$ , et l'on peut itérer cette transformation à partir de  $I_{-1}$ . Ce schéma pyramidal de décomposition est résumé à la figure 1.

Ainsi que le remarque Mallat [3], l'algorithme de décomposition associé à cette théorie est analogue à celui des Conjugate Quadrature Filters (CQF) déve-

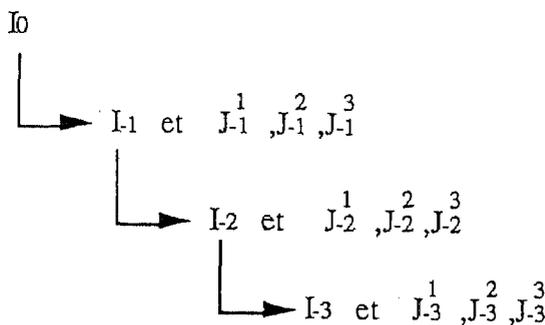


Fig. 1. — Décomposition de l'échelle  $2^0$  jusqu'à l'échelle  $2^{-3}$  par l'algorithme dyadique.

loppé dans [12] pour la compression de la parole en sous bande d'octave. L'extension de cet algorithme à la compression d'image a été réalisée dans [13], [14]. Cependant il faut souligner que l'analyse multirésolution conduit à une interprétation nouvelle des résultats produits par cet algorithme. Typiquement, l'optimisation des bancs de filtres CQF repose sur des critères fréquentiels (séparation des canaux fréquentiels par exemple), alors qu'une analyse multirésolution est caractérisée, entre autres choses, par la localisation et la régularité des fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$ .

### 3. Théorie pour une analyse multirésolution orthogonale avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$

Pour l'analyse multirésolution que nous allons développer à présent, nous utiliserons les mêmes notations —  $\Phi, \Psi, V_j, W_j, m_0, I_j, J_j$  — que dans le cas dyadique, dans la mesure où l'usage de ces fonctions et espaces est similaire pour les deux théories. Le contexte dans lequel ces notations seront utilisées par la suite sera toujours explicite.

Soit  $\Phi$  une fonction engendrant une analyse multirésolution dyadique. La projection sur  $V_j$  est caractérisée par les coordonnées sur la base  $(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$ . Dans les applications aux problèmes de vision,  $\Phi$  est une fonction de lissage localisée autour de l'origine. La fonction  $\Phi_{0,k}(x, y)$  est localisée en  $(x, y) = k \in \mathbb{Z}^2$ , alors que  $\Phi_{-1,k}(x, y)$  est localisée en  $(x, y) = 2k \in (2\mathbb{Z})^2$ . Notons alors  $M_0 = \mathbb{Z}^2$  et  $M_{-1} = (2\mathbb{Z})^2$  les réseaux qui localisent  $(\Phi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$  et  $(\Phi_{-1,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$  respectivement.

La transformation linéaire  $L(x, y) = (x + y, x - y)$ , vérifie  $L \circ L = L^2 = 2 \text{ Id}$  (le signe «  $\circ$  » désignant la loi de composition des applications, nous noterons  $L^n = L \circ L \circ \dots \circ L$ ). La transformation  $L$  conserve les angles et dilate les distances de  $\sqrt{2}$ . Par ailleurs, il est clair que  $M_{-1}$  est inclus dans  $L(M_0) = M_{-1/2}$ . Ainsi :  $M_{-1} \subset M_{-1/2} \subset M_0$ .

On peut alors redéfinir  $\Phi_{j,k} : \forall j \in \mathbb{Z}$  et  $\forall k \in \mathbb{Z}^2, k = (k_x, k_y)$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_{j,k}(x, y) &= 2^j \Phi(2^j x - k_x, 2^j y - k_y) = \\ &= 2^j \Phi(2^j(x, y) - k) = 2^j \Phi(L^{2^j}(x, y) - k) \end{aligned}$$

qui se généralise :  $\forall j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{n/2 ; n \in \mathbb{Z}\}$

$$\Phi_{j,k}(x, y) = 2^j \Phi(L^{2^j}(x, y) - k).$$

A présent,  $M_{-1/2}$  est le réseau qui localise la famille  $(\Phi_{-1/2,k}(0, 0))_{k \in \mathbb{Z}^2}$ .

Y. Meyer [11] a montré que dans ce cas une seule ondelette devrait suffire au lieu de trois dans la théorie dyadique.

Grâce à la transformation  $L$ , il est possible d'insérer un nouvel espace d'interpolation entre deux espaces

$V_j$  et  $V_{j+1}$ . Plus précisément, il existe des fonctions  $\Phi$  telles que :

$$(i') \quad V_j \subset V_{j+1/2} \quad \forall j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

$$(ii') \quad (\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2} \text{ est une base hilbertienne de } V_j \quad \forall j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

$$(iii') \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_{j/2}} = L^2(\mathbb{R}^2) \text{ et } \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_{j/2} = \{0\},$$

où l'on a posé  $V_j = \overline{\text{Vect}(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}} \quad \forall j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ .

On dira alors que  $\Phi$  engendre une analyse multirésolution dont le facteur d'échelle est  $\sqrt{2}$ .

Ceci résout la première partie du programme : le signal est analysé sur une suite croissante d'espaces d'interpolations.

Il est facile de montrer que  $\Phi$  vérifie (i') si et seulement si il existe une fonction  $m_0$  appartenant à  $L^\infty([0, 2\pi]^2)$  telle que :

$$(6) \quad \widehat{\Phi}(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) = m_0(\omega_x, \omega_y) \widehat{\Phi}(\omega_x, \omega_y).$$

La condition (iii') impose

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x, y) dx dy = \widehat{\Phi}(0, 0) \neq 0. \text{ Il vient :}$$

$$(7) \quad m_0(0, 0) = 1.$$

Finalement, la condition (ii') — associée à (i') — implique :

$$(8) \quad |m_0(\omega_x, \omega_y)|^2 + |m_0(\omega_x + \pi, \omega_y + \pi)|^2 = 1.$$

En pratique, les conditions (i'), (ii') et (iii') sont difficiles à vérifier directement. Cependant, les relations (6) et (7) conduisent à l'égalité

$$\widehat{\Phi}(\omega_x, \omega_y) = \prod_{n=1}^{+\infty} m_0(L^{-n}(\omega_x, \omega_y)),$$

et, tout comme dans le cas dyadique, on dispose de conditions suffisantes sur  $m_0$  afin de construire une fonction  $\Phi$  qui engendre une analyse multirésolution.

Si  $m_0$  est différentiable et vérifie :

$$(9) \quad m_0(0, 0) = 1,$$

$$(10) \quad |m_0(\omega_x, \omega_y)|^2 + |m_0(\omega_x + \pi, \omega_y + \pi)|^2 = 1.$$

Si de plus

$$(11) \quad \exists \rho > 0 \quad \forall (\omega_x, \omega_y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$|\omega_x| + |\omega_y| < \pi \Rightarrow |m_0(\omega_x, \omega_y)| > \rho,$$

alors, il existe une unique fonction  $\Phi$  définie par (6) qui engendre une analyse multirésolution avec un facteur de résolution  $\sqrt{2}$ .

Ce type de résultat est fondamental pour les applications car la connaissance de  $m_0$  se révélera suffisante pour déterminer les filtres de l'algorithme développé à la section suivante. Remarquons que, en pratique,  $m_0$  est un filtre récursif ou à réponse impulsionnelle

finie, et dans ce cas la contrainte de différentiabilité est automatiquement vérifiée.

Nous avons donc défini la première étape pour construire une analyse multirésolution avec un facteur d'échelle  $\sqrt{2}$  : il est possible de projeter une image sur une suite croissante d'espaces d'interpolations intégrant la notion d'échelle. Il reste à s'assurer du contrôle des informations perdues entre deux échelles consécutives. Le résultat final est le suivant :

**THÉORÈME :** Soit  $\Phi$  une fonction engendrant une analyse multirésolution avec un facteur de résolution  $\sqrt{2}$ , et  $m_0$  définie par la relation (6). Alors il existe une fonction  $\Psi$  définie par sa transformée de Fourier :

$$(13) \quad \widehat{\Psi}(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) = \overline{m_0}(\omega_x + \pi, \omega_y + \pi) \times e^{-i\omega_x} \widehat{\Phi}(\omega_x, \omega_y),$$

telle que

$$(14) \quad \forall j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad (\Psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2} \text{ est une famille orthogonale}$$

Soit  $W_j$  défini par :  $\forall j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, W_j = \overline{\text{Vect} (\Psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}}$  alors,

$$(15) \quad V_{j+1/2} = V_j \oplus^\perp W_j.$$

Par définition,  $\Psi$  est l'ondelette orthogonale associée à  $\Phi$ .

Ce théorème est le point délicat de la construction. Une idée de la preuve est donnée en appendice A.

Le cadre naturel de cette construction est  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , cependant la méthode se généralise aisément à  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  par produit tensoriel. D'un point de vue théorique, la construction 2-D développée ici est très proche de l'analyse 1-D proposée par Mallat [4]. En effet, dans les deux cas une unique ondelette est suffisante pour extraire l'information inter-échelles (au lieu de trois dans le cas 2-D dyadique). Cette analogie se retrouve dans les formules (2) et (8) qui ne contiennent que deux termes (au lieu de quatre dans le cas 2-D dyadique). Le lien profond qui existe entre ces deux analyses est étudié dans [19].

Pour clore cette section, il faut souligner qu'une même fonction  $\Phi$  ne peut engendrer une analyse multirésolution orthogonale dyadique et une analyse multirésolution orthogonale avec un facteur de résolution  $\sqrt{2}$ . Comme nous le verrons à la Section 5, c'est réellement une nouvelle classe d'analyses que nous étudions ici.

Nous allons à présent développer un algorithme pour l'analyse d'images issu des résultats théoriques de cette section.

#### 4. L'algorithme

Les outils mathématiques de la section précédente vont nous permettre de définir une représentation des images qui intègre la notion d'échelle, tout

comme dans l'algorithme de Mallat [3]. L'algorithme présenté ici est analogue à l'algorithme non séparable proposé par Vetterli [13] dans le cadre des « Quadrature Mirror Filters » (QMF) pour le codage des images. Essentiellement, il s'agit de décomposer en sous bandes fréquentielles une image numérisée, puis de coder de manière économique les canaux hautes fréquences qui sont généralement pauvres en énergie. Suivant la démarche adoptée dans [3], nous allons montrer que les coefficients fournis par ces bancs de filtres s'interprètent comme les coefficients inter-échelles d'une image à analyser. Cette nouvelle interprétation multirésolution conduit à la synthèse de nouveaux bancs de filtres selon des critères propres à l'analyse multirésolution. Par exemple, dans le cas 1-D, le banc de filtres associé à une analyse sur des espaces de fonctions splines [15], [16] ne vérifie pas les contraintes fréquentielles usuelles pour le codage en sous bandes.

Soit  $\mathcal{I}(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  une image et  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . On note  $\mathcal{I}_j$  la projection de  $\mathcal{I}$  sur  $V_j$  et  $\mathcal{J}_j$  la projection de  $\mathcal{I}$  sur  $W_j$ . Nous avons donc :

$$(16) \quad \mathcal{I}_j = \sum_k C_{j,k} \Phi_{j,k}$$

avec  $C_{j,k} = \langle \mathcal{I}, \Phi_{j,k} \rangle = \langle \mathcal{I}_j, \Phi_{j,k} \rangle$ , et

$$(17) \quad \mathcal{J}_j = \sum_k S_{j,k} \Psi_{j,k}$$

avec  $S_{j,k} = \langle \mathcal{I}, \Psi_{j,k} \rangle = \langle \mathcal{J}_j, \Psi_{j,k} \rangle$ ,

où l'indice  $k$  parcourt  $\mathbb{Z}^2$ . On note  $I_j = (C_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$  et  $J_j = (S_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$ .

Nous le verrons par la suite, l'un des avantages de notre approche multirésolution est de pouvoir utiliser des filtrages non sélectifs à l'orientation. Ainsi, on imposera couramment les relations de symétrie  $\Phi(-x, y) = \Phi(x, y)$ ,  $\Phi(x, -y) = \Phi(x, y)$  et  $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ . C'est-à-dire que  $\Phi$  soit paire, symétrique et localisée autour de (0, 0). Remarquons que ces hypothèses sont cohérentes avec les données physiologiques portant sur le système visuel chez certains mammifères [6]. Sous ces hypothèses, la relation (13) permet de conclure que  $\Psi$  est localisée autour de  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  qui est son point de symétrie.

Pour  $f = \Phi$  ou  $\Psi$ , nous définissons la fonction dilatée de  $f(x, y)$  :

$$f_j(x, y) = 2^j f(L^{2j}(x, y)),$$

$$\forall j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{n/2; n \in \mathbb{Z}\}.$$

Introduisons le symbole  $*$  pour indiquer la loi de convolution.

Pour tout indice  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  et  $k = (k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2$ , les relations (16) et (17) s'écrivent :

$$C_{j,k} = \mathcal{I} * \Phi_j(L^{-2j}(k))$$

qui se localise sur  $\mathcal{I}$  en  $(x, y) = L^{-2j}(k)$

$$S_{j,k} = \mathcal{I} * \Psi_j(L^{-2j}(k))$$

qui se localise sur

$$\mathcal{I} \text{ en } (x, y) = L^{-2j} \left( k + \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Ainsi, comme l'a indiqué Mallat [3] dans le cas dyadique, ces coefficients sont un échantillonnage du signal initial après convolution avec la fonction de lissage  $\Phi_j$  ou la fonction de détection  $\Psi_j$  — ce vocabulaire sera justifié à la Section 5. Ceci permet de mieux comprendre la localisation des coefficients dans les relations de décomposition et reconstruction à venir. Par ailleurs, cette interprétation des coefficients permet de relier ces coefficients — signaux digitaux — à des signaux analogiques. Cette remarque sera exploitée à la section suivante.

L'ensemble des coefficients  $I_j$  est une représentation de  $\mathcal{I}$  à l'échelle  $2^j$ , et  $J_j$  est une représentation des détails perdus lorsque l'on dégrade l'image de l'échelle  $2^{j+1/2}$  à l'échelle  $2^j$ . On supposera que l'entrée des algorithmes est  $I_0$  — l'échantillonnage de  $\mathcal{I} * \Phi$  à la cadence 1 dans chaque direction.

Tout comme pour l'algorithme dyadique 1-D, on coupe  $I_0$  en deux parties :  $I_{-1/2}$  et  $J_{-1/2}$  (au lieu de  $I_{-1}$  et  $J_{-1}$  en 1-D, ou  $I_{-1}$ ,  $J_{-1}^1$ ,  $J_{-1}^-$  et  $J_{-1}^3$  dans le cas 2-D dyadique). On peut ensuite répéter l'opération sur  $I_{-1/2}$  etc. Si l'on désire décomposer l'image jusqu'à l'échelle  $2^j$ ,  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ , une représentation du

signal sans perte d'information est fournie par  $J_{-1/2} \cup J_{-1} \cup J_{-3/2} \cup \dots \cup J_j$  et  $I_j$ , et on peut alors reconstruire  $I_0$ .

Le schéma de décomposition est alors le suivant :

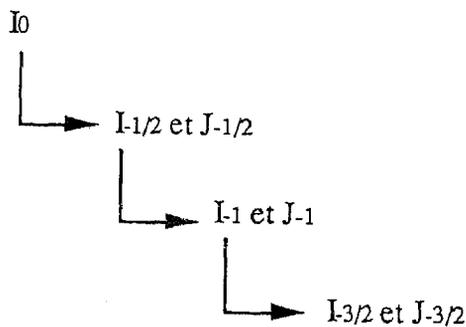


Fig. 2. — Décomposition de l'échelle  $2^0$  jusqu'à l'échelle  $2^{-3/2}$ .

La question à présent est de savoir comment obtenir  $I_{j-1/2}$  et  $J_{j-1/2}$  à partir de  $I_j$  (pour la décomposition), et  $I_j$  à partir de  $I_{j-1/2}$  et  $J_{j-1/2}$  (pour la reconstruction). Soient  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{Z}^2$ , les relations (16) et (17) mènent aux formules suivantes.

Pour la décomposition :  $\forall k = (k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$(18) \quad C_{j-1/2, k} = \sum_p C_{j, L(k)-p} h(p)$$

$$(19) \quad S_{j-1/2, k} = \sum_p C_{j, L(k)+(1,0)-p} g(p).$$

On remarque que les coefficients  $C_{j-1/2, k}$  et  $C_{j, L(k)}$  sont localisés au même endroit, de même pour

$S_{j-1/2, k}$  et  $C_{j, L(k)+(1,0)}$ . Les sommes étant prises sur  $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{Z}^2$ .

Pour la reconstruction :  $\forall p = (p_x, p_y) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$(20) \quad C_{j, p} = \sum_k C_{j-1/2, k} \bar{h}(L(k) - p) + \sum_k S_{j-1/2, k} \bar{g}(L(k) + (1, 0) - p),$$

où les sommes s'étendent sur l'ensemble  $k = (k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2$ .

Les réponses impulsionnelles  $H = (h(k))_{k \in \mathbb{Z}^2}$  et  $G = (g(k))_{k \in \mathbb{Z}^2}$  sont fournies par les formules :

$$h(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x + p_x, y + p_y) \times \bar{\Phi} \left( \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right) dx dy,$$

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x + 1 + p_x, y + p_y) \times \bar{\Psi} \left( \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right) dx dy.$$

La formule de Parseval relie ces deux filtres discrets à  $m_0(\omega_x, \omega_y)$ . Si l'on pose

$$m_0(\omega_x, \omega_y) = \sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} a(k_x, k_y) e^{ik_x \omega_x} e^{ik_y \omega_y},$$

alors  $\forall k = (k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$h(k_x, k_y) = \sqrt{2} \bar{a}(k_x, k_y) \text{ et}$$

$$g(k_x, k_y) = \sqrt{2} (-1)^{k_x+k_y} a(-k_x, -k_y).$$

Des formules analogues dans le cas 1-D dyadique se trouvent dans [3].

En pratique  $\Phi$  sera choisie paire, symétrique et à valeurs réelles. Ces propriétés se transmettent à  $m_0$ , et donc aux réponses impulsionnelles  $H$  et  $G$ . Il vient :

$$h(k_x, k_y) = \sqrt{2} a(k_x, k_y) \text{ et}$$

$$g(k_x, k_y) = \sqrt{2} (-1)^{k_x+k_y} a(k_x, k_y).$$

Les relations (7) et (8) conduisent à

$$\sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} h(k_x, k_y) = \sqrt{2}, \text{ et}$$

$$\sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} g(k_x, k_y) = 0.$$

Le filtre  $H$  effectue donc un lissage, alors que  $G$  est un filtre de détection. Afin de ne pas accroître la dynamique des images à décomposer, nous préférons utiliser les filtres de réponses impulsionnelles

$$h(k_x, k_y) = a(k_x, k_y) \text{ et}$$

$$g(k_x, k_y) = (-1)^{k_x+k_y} a(k_x, k_y).$$

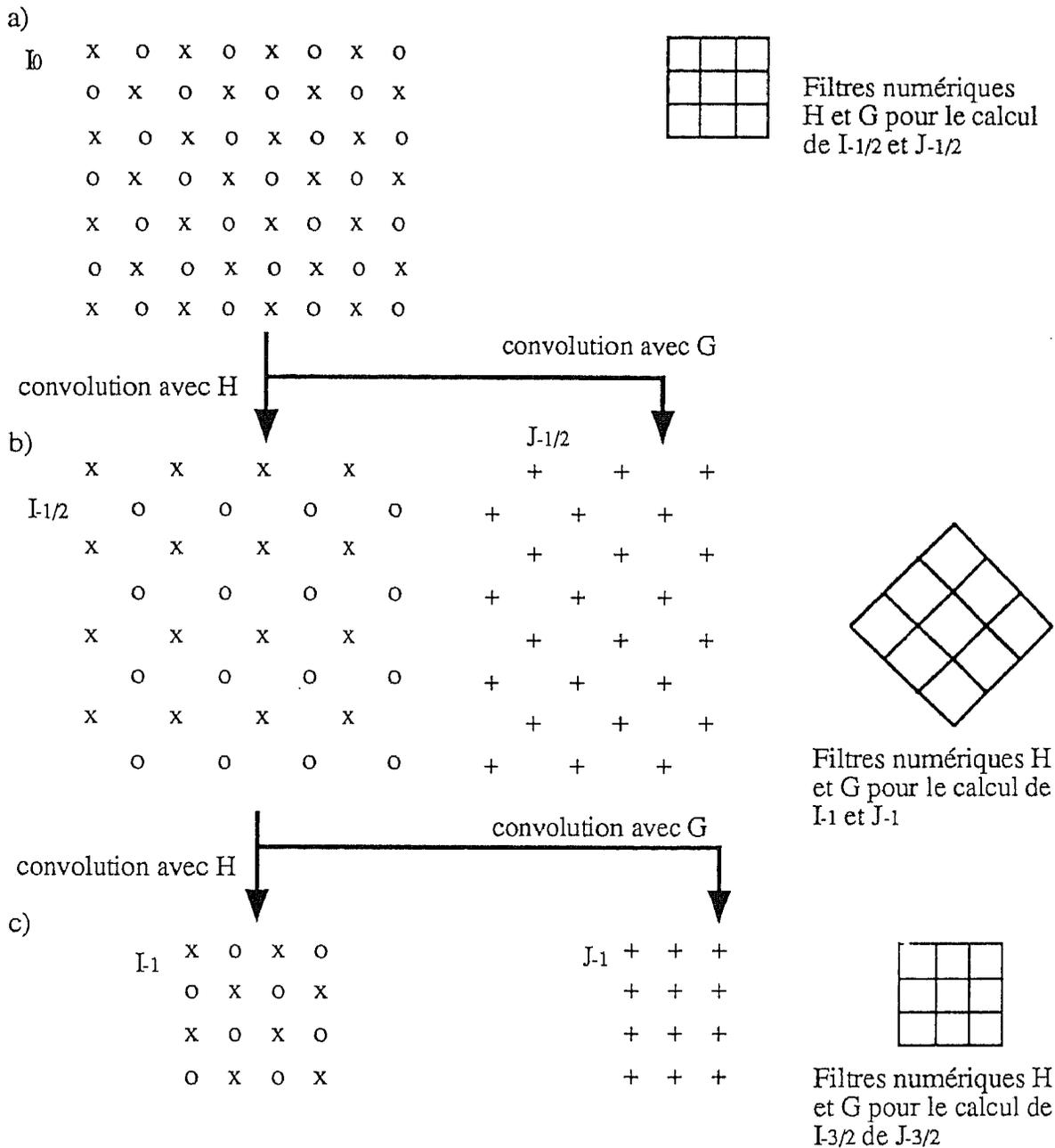


Fig. 3. — Décomposition de I<sub>0</sub> en J<sub>-1/2</sub>, J<sub>-1</sub> et I<sub>-1</sub>.

Dans ces conditions, le filtre de lissage H vérifie

$$\sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} h(k_x, k_y) = 1.$$

On remarque que le filtre G a pour point de symétrie (0, 0). Cependant son application est tradatée de (1, 0) — voir la formule (19). Ceci est du au terme  $e^{i\omega_x}$  introduit en (13). Ainsi, pour décomposer de l'échelle  $2^{j+1/2}$  à l'échelle  $2^j$ , on centre sur chaque coefficient  $C_{j+1/2, k}$  soit le filtre H si  $k_x + k_y$  est pair, ceci produit la famille  $(C_{j, p})$ , soit le filtre G si  $k_x + k_y$  est impair, et l'on obtient la famille  $(S_{j, p})$ . La représentation de l'image est donc donnée par les coefficients  $(C_{j, k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$  et  $(S_{j, k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$ . L'algorithme est constitué de deux filtres numériques de convolu-

tion H et G centrés alternativement sur les coefficients obtenus sur le dernier espace de projection. Partant de I<sub>0</sub>, le premier filtre permet de calculer I<sub>-1/2</sub> et le second J<sub>-1/2</sub>. L'ensemble des points correspondant à chaque canal étant obtenu par décimation d'un point sur deux sur la même ligne, avec une translation une ligne sur deux.

La figure 3 résume ces transformations géométriques. Sur les points marqués x on centre le filtre numérique H : ceci donne l'image dégradée, et sur les points notés o on centre le filtre numérique G pour obtenir les détails inter-échelles.

Pour visualiser toute la transformation, on réorganise  $J_{h-1/2}$ ,  $h \in \mathbb{Z}$  de manière plus compacte en  $\tilde{J}_{h-1/2}$ . Sur l'exemple donné figure 3 :

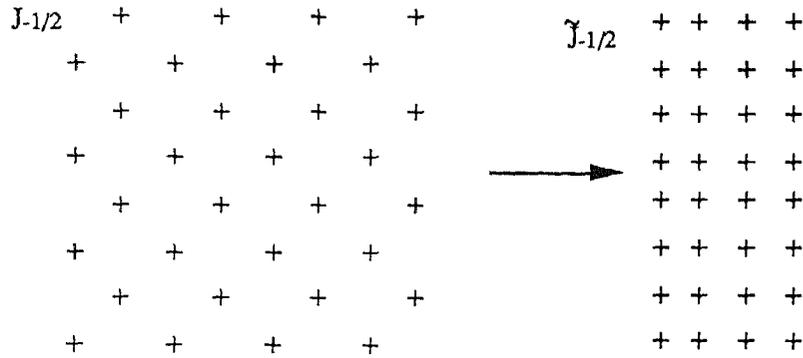


Fig. 4. — Réorganisation pour visualisation de  $J_{-1/2}$ ,  $J_{-3/2}$ .

Finalement, la décomposition jusqu'à  $J = -1$  s'organise ainsi :

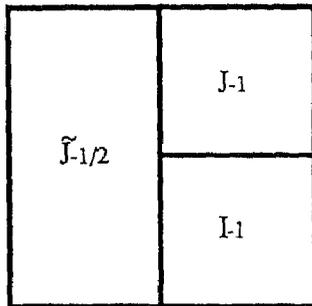


Fig. 5. — Organisation de l'image résultat pour une décomposition à l'échelle  $2^{-1}$ .

On peut alors itérer le processus sur  $I_{-1}$  si nécessaire. Pour conclure cette section, remarquons que, excepté dans [18], seul l'algorithme dyadique a été utilisé pour les bancs de filtres QMF car les filtrages effectués peuvent être pris séparables. L'algorithme présenté ici est connu pour utiliser des filtres non séparables, ce qui a limité son emploi. Cependant le filtrage alterné par H et G pris dans leur ensemble peut être rendu séparable au sens des « Conjugate Mirror Filters » ainsi que nous l'avons montré dans [19]. Ainsi, il existe une sous classe d'analyses multirésolutions avec un facteur d'échelle  $\sqrt{2}$  telle que la transformation élémentaire d'un pixel nécessaire  $2 \times N$  multiplications au lieu de  $N \times N$  — la taille des noyaux de convolution H et G. Si de plus cette analyse est paire et symétrique,  $\frac{1}{2} \times N$  multiplications par pixel sont alors suffisantes. Le gain calculatoire est donc du même ordre que pour l'algorithme dyadique séparable.

**5. Filtrages associés aux analyses multirésolution**

Un point remarquable des analyses multirésolutions associées aux ondelettes réside dans l'interprétation continue des signaux obtenus, bien que l'algorithme

utilise et produise des signaux digitaux. Comme il a été rappelé à la section précédente, les coefficients de l'image dégradée et les coefficients inter-échelles s'interprètent comme un échantillonnage de  $\mathcal{F} * \Phi_j$  et  $\mathcal{F} * \Psi_j$  respectivement. Remarquons tout d'abord que le théorème d'échantillonnage permet d'utiliser l'échantillonnage d'un signal analogique tout en gardant l'interprétation du continu lorsque ce dernier est à bande limitée, c'est-à-dire lissé par  $f(x, y) = \frac{\sin(\lambda x) \sin(\lambda y)}{\lambda^2 xy}$ . Cette fonction  $f$  n'est qu'un cas particulier de fonction  $\Phi$  donnant lieu à une analyse multirésolution monodimensionnelle dyadique pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Rappelons quelques points élémentaires concernant le produit de convolution. La transformée de Fourier exprime le produit de convolution en une simple multiplication :

$$f * g(x, y) \xleftrightarrow{TF} f(\omega_x, \omega_y) g(\omega_x, \omega_y).$$

Il est facile de vérifier que les opérateurs de différentiation usuels sont en fait des opérateurs de convolution (au sens des distributions) par la transformée de Fourier de polynômes :

$$h(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xleftrightarrow{TF} \hat{h}(\omega_x, \omega_y) = i\omega_x \hat{f}(\omega_x, \omega_y)$$

$$h(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) \xleftrightarrow{TF} \hat{h}(\omega_x, \omega_y) = -\omega_x^2 \hat{f}(\omega_x, \omega_y)$$

$$h(x, y) = -\Delta f(x, y) \xleftrightarrow{TF} \hat{h}(\omega_x, \omega_y) = (\omega_x^2 + \omega_y^2) \hat{f}(\omega_x, \omega_y)$$

$$h(x, y) = \sqrt{-\Delta} f(x, y) \xleftrightarrow{TF} \hat{h}(\omega_x, \omega_y) = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \hat{f}(\omega_x, \omega_y).$$

Dans cette dernière ligne, c'est en fait la transformée de Fourier qui définit un opérateur (pseudo-)différentiel appelé « racine du Laplacien » pour des raisons évidentes. Enfin, remarquons que si  $g(x, y)$  vérifie  $\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy = \hat{g}(0, 0) \neq 0$ , alors

l'opérateur de convolution  $f \mapsto f * g$  correspond à un lissage de  $f$ . Au contraire, si  $\hat{g}(0, 0) = 0$ , alors on dira abusivement que l'opérateur de convolution par  $g$  est une « déviation ». Prenons un exemple pour justifier cela : si  $\hat{g}(\omega_x, \omega_y) = \omega_x^2 \hat{h}(\omega_x, \omega_y)$  avec  $\hat{h}(0, 0) \neq 0$ , alors l'image filtrée  $\mathcal{F} * g(x, y)$  a pour transformée de Fourier  $\omega_x^2 \hat{\mathcal{F}}(\omega_x, \omega_y) \hat{h}(\omega_x, \omega_y)$ . Ce produit peut s'interpréter ainsi :  $\hat{\mathcal{F}}(\omega_x, \omega_y) \hat{h}(\omega_x, \omega_y)$  est la transformée de Fourier de l'image  $\mathcal{F}$  lissée par  $h$ , et la multiplication, en variable de Fourier, par  $\omega_x^2$  revient à prendre la dérivée seconde selon la direction  $x$  de cette image lissée :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} * g(x, y) &= -\frac{\partial^2(\mathcal{F} * h)}{\partial^2 x}(x, y) = \\ &= -\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial^2 x} * h(x, y). \end{aligned}$$

Dans la perspective d'applications au traitement d'image, les convolutions de l'image par les filtres intervenant dans les algorithmes vont donc être interprétées en terme de dérivation et de lissage et non en termes fréquentiels comme c'est le cas avec les Quadrature Mirror Filters. Dans bien des applications potentielles de l'analyse multirésolution, la segmentation par exemple, il est naturel d'imposer a priori des conditions de symétrie sur  $\Phi$ . Ainsi, on demandera par la suite à  $\Phi$  d'être à valeur réelle, paire et symétrique en  $(x, y)$  afin que le lissage soit non sélectif à l'orientation. L'indice  $j$  indiquant une simple dilatation et non la nature de la fonction (dérivation ou lissage), nous sommes ramenés à l'étude du cas  $j = 0$ .

Commençons par étudier le cas dyadique séparable, les notations renvoyant à la Section 2. La fonction utile en pratique dans cet algorithme est  $m_0(\omega)$  vérifiant (1), (2) et (3). Les conditions imposées a priori sur  $\Phi(x, y)$  imposent à  $m_0(\omega)$  d'être réelle et paire. Au voisinage de 0, si  $m_0(\omega)$  est suffisamment régulière, il vient  $m_0(\omega) = 1 + o(\omega^2)$  et  $m_0(\omega + \pi) = b\omega^2 + o(\omega^2)$ .

Il en résulte que dans le cas général (i.e.  $b \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^1(\omega_x, \omega_y) &= b\omega_x^2 \hat{Y}_1(\omega_x, \omega_y) e^{-i\omega_x/2}, \\ \hat{\Psi}^2(\omega_x, \omega_y) &= b\omega_y^2 \hat{Y}_2(\omega_x, \omega_y) e^{-i\omega_y/2}, \\ \hat{\Psi}^3(\omega_x, \omega_y) &= b^2 \omega_x^2 \omega_y^2 \hat{Y}_3(\omega_x, \omega_y) e^{-i\omega_x/2} e^{-i\omega_y/2}, \end{aligned}$$

et  $\hat{Y}_i(0, 0) = 1$ .

Les  $Y_i$  sont donc des fonctions de lissage réelles et paires — mais non symétriques. Il est alors clair que la convolution de l'image originale  $\mathcal{F}$  (continue) avec  $\Psi^1$  revient à prendre le produit de convolution de  $\mathcal{F}$  par  $-Y_1(x - \frac{1}{2}, y)$ , puis à dériver deux fois

cette image lissée selon la direction  $x$ . De même, la convolution par  $\Psi^2$  revient à prendre le produit de convolution de  $\mathcal{F}$  par  $-Y_2(x, y - \frac{1}{2})$  puis à dériver deux fois cette image lissée selon la direction  $y$ . Ces deux images permettent donc d'utiliser des techniques de localisation de singularités par passages par zéro. Il n'en est pas de même pour le troisième canal qui revient à prendre la convolution de  $\mathcal{F}$  par  $Y_3(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2})$  puis à la dériver deux fois selon  $x$  et deux fois selon  $y$ . Cet opérateur détecte donc les coins et les traits en biais mais il n'est pas utilisable pour la détection des singularités par passages par zéro. Un exemple de telle fonction est

$$m_0(\omega) = \frac{1 + \cos(\omega)}{2} \sqrt{\frac{2 + \cos(\omega)}{2 + \cos(2\omega)}}$$

qui engendre une analyse multirésolution sur les splines quadratiques [7], [8].

Examinons à présent les filtres intervenant dans l'algorithme proposé ici, les notations renvoyant à la Section 3. Tout d'abord, il est aisé de construire des fonctions  $m_0(\omega_x, \omega_y)$  vérifiant (9), (10) et (11) : soit  $\theta(\omega_x, \omega_y)$  une fonction différentiable de  $L^\infty([0, 2\pi]^2)$  vérifiant  $\theta(\pi, \pi) = 0$  et (11). Alors  $m_0$  définie par

$$m_0(\omega_x, \omega_y) = \frac{\theta(\omega_x, \omega_y)}{\sqrt{|\theta(\omega_x, \omega_y)|^2 + |\theta(\omega_x + \pi, \omega_y + \pi)|^2}}$$

vérifie bien (9), (10), (11) et engendre donc une analyse multirésolution avec un facteur d'échelle  $\sqrt{2}$ .

Les conditions imposées a priori sur  $\Phi$  font que  $m_0(\omega_x, \omega_y)$  doit être paire, symétrique et à valeurs réelles. Pour  $m_0(\omega_x, \omega_y)$  suffisamment régulière, grâce aux formules (7) et (8), un développement de Taylor au voisinage de  $(0, 0)$  conduit à :

$$m_0(\omega_x, \omega_y) = 1 + o(\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

et

$$\begin{aligned} m_0(\omega_x + \pi, \omega_y + \pi) &= \\ &= a(\omega_x^2 + \omega_y^2) + b\omega_x \omega_y + o(\omega_x^2 + \omega_y^2). \end{aligned}$$

La fonction  $m_0(\omega_x, \omega_y)$  présente un minimum en  $\omega_x = \omega_y = \pi$ . Ainsi, lorsque la forme quadratique est non dégénérée, on vérifie que  $b^2 < 4a^2$  et il vient

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y) &= \\ &= (a(\omega_x^2 + \omega_y^2) + b\omega_x \omega_y) \hat{Y}(\omega_x, \omega_y) e^{-i\omega_x/2} \end{aligned}$$

avec  $\hat{Y}(0, 0) = 1$ .

En particulier, pour  $a \neq 0$  et  $b = 0$ , la convolution de l'image original  $\mathcal{F}$  avec  $\Psi$  revient à lisser  $\mathcal{F}$  par la fonction paire symétrique et à valeurs réelles  $-aY(x, y)$ , puis à prendre le Laplacien du résultat. Enfin, tout comme dans le cas séparable, un échantillonnage permet d'obtenir les coefficients inter-échelles. Il est alors possible de rechercher des

passages par zéro du Laplacien de l'image suivant la théorie proposée par Marr dans [6], [7].

Les images de la section suivante ont été obtenues avec  $\theta(\omega_x, \omega_y) = 2 + \cos(\omega_x) + \cos(\omega_y)$ , et l'opérateur différentiel  $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{F} * \Psi(x, y)$  est bien le Laplacien de  $\mathcal{F}$  lissé par  $\Psi$ .

Pour finir cette étude sur le type d'opérateur différentiel intervenant lors du filtrage, on peut remarquer que le signal inter-échelles peut être obtenu par l'échantillonnage d'un lissage suivi de la racine du Laplacien, qui est aussi un opérateur isotrope (non sélectif à l'orientation), grâce à une fonction du type

$$m_0(\omega_x, \omega_y) = \sqrt{\frac{\cos^2(\omega_x/2) + \cos^2(\omega_y/2)}{2}}$$

Il est facile de montrer que la détection des singularités par la racine du Laplacien mène, elle aussi, à une théorie du type recherche de passages par zéro. Nous montrerons à la section suivante le résultat d'une analyse multirésolution engendrée par la fonction  $m_0(\omega_x, \omega_y)$  ci-dessus.

## 6. Résultats

Suivant l'arrangement des coefficients tel qu'il a été décrit à la Section 4, nous présentons les résultats de la décomposition de deux images tests par notre algorithme ainsi que par l'algorithme dyadique de référence. Ces algorithmes sont bien adaptés à la détection de contours par passages par zéro [9]. Ceux-ci sont caractérisés par une alternance positif-négatif des coefficients inter-échelles — les  $S_{j,k}$  — c'est-à-dire une alternance blanc-noir sur les images. Les images utilisées sont respectivement une figure géométrique (fig. 6), et une image classique — Lena

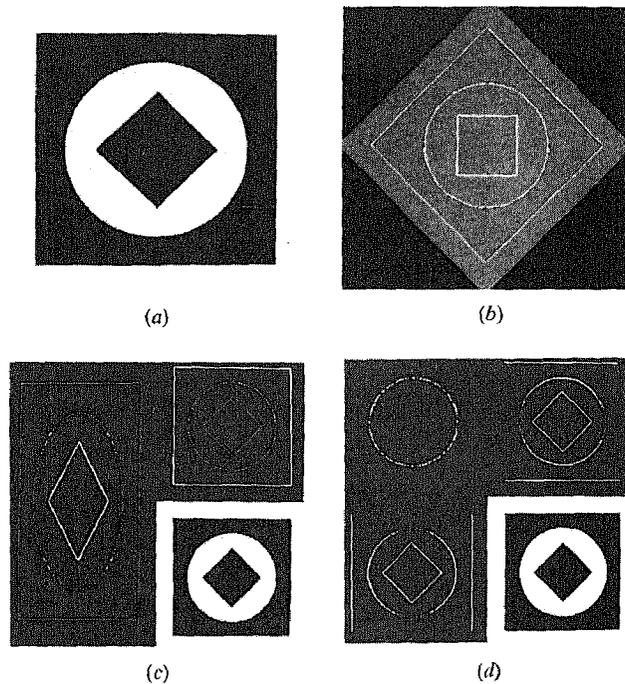


Fig. 6. — (a)  $I_0$ : l'image originale. (b) Les coefficients inter-échelles  $J_{-1,2}$  (opérateur du type Laplacien). (c) Décomposition de deux niveaux, de  $I_0$  à  $I_{-1}$  (opérateur du type Laplacien). (d) Décomposition de  $I_0$  à  $I_{-1}$  (algorithme dyadique).

— (fig. 7) sur laquelle S. Mallat a testé l'algorithme 2-D dyadique [3]. Ces deux images sont digitalisées sur  $512 \times 512$  pixels codés sur 256 niveaux de gris.

Ces résultats font ressortir deux caractéristiques principales du traitement présenté ici :

— l'extraction de contours par passages par zéro : l'analyse avec un facteur de résolution  $\sqrt{2}$  est non

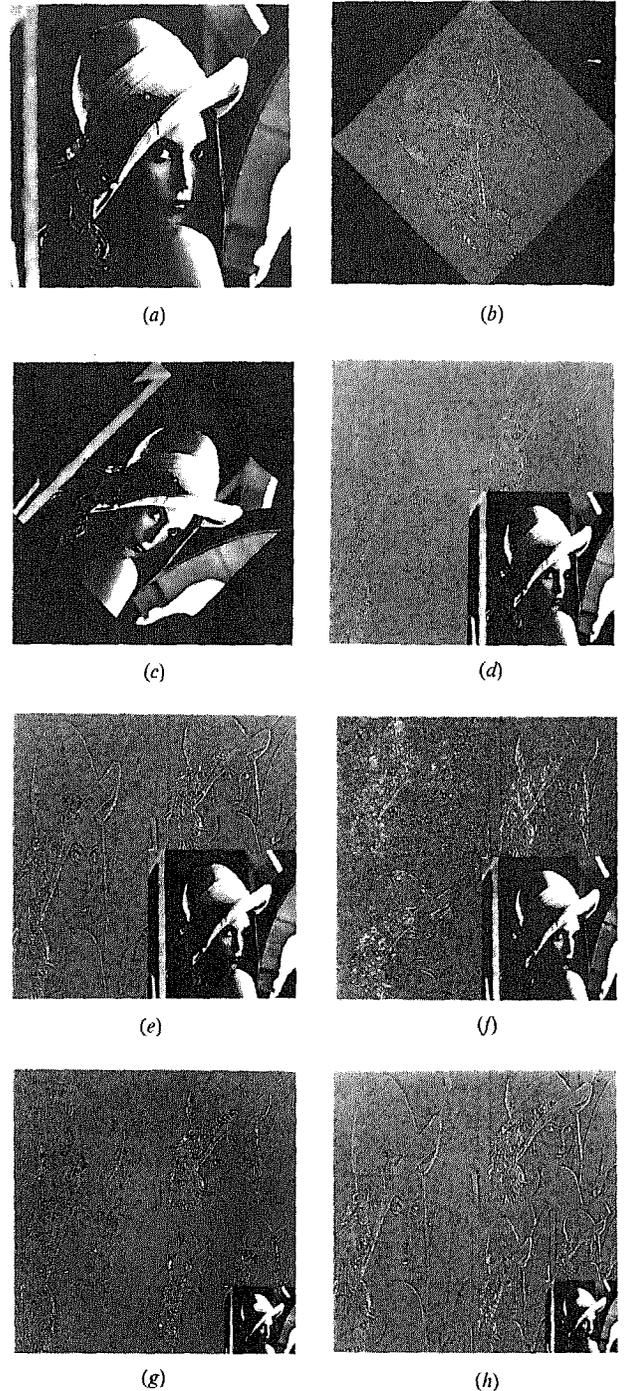


Fig. 7. — (a)  $I_0$ : l'image originale. (b) Les coefficients inter-échelles  $J_{-1,2}$  (opérateur du type Laplacien). (c)  $I_{-1,2}$ : image dégradée d'un niveau (opérateur du type Laplacien). (d) Décomposition de deux niveaux, de  $I_0$  à  $I_{-1}$  (opérateur du type Laplacien). (e) Décomposition de deux niveaux, de  $I_0$  à  $I_{-1}$  (opérateur du type racine du Laplacien). (f) Décomposition d'un niveau, de  $I_0$  à  $I_{-1}$  (algorithme dyadique). (g) Décomposition de quatre niveaux, de  $I_0$  à  $I_{-2}$  (opérateur du type Laplacien). (h) Décomposition de quatre niveaux, de  $I_0$  à  $I_{-2}$  (opérateur du type racine du Laplacien).

sélective à l'orientation. Elle extrait les contours de la même façon dans toutes les directions. Ceci est particulièrement clair sur la figure 6 où les horizontales, verticales, diagonales ainsi que le cercle sont bien détectés. L'algorithme dyadique au contraire favorise les horizontales (en  $J_1^j$ ) et les verticales (en  $J_2^j$ ) — ce qui est par ailleurs fort utile en stéréovision par exemple. La troisième composante (en  $J_3^j$ ) n'apparaissant pas très riche en information (fig. 6 d) ;

— les détails inter-échelles : le fait d'avoir une résolution deux fois plus fine permet de mieux suivre les passages par zéro tant pour la détection que pour la localisation.

## 7. Conclusion

L'analyse multirésolution par ondelettes orthogonales définie par S. Mallat et Y. Meyer fournit un cadre théorique et pratique pour intégrer la notion d'échelle pour l'étude des signaux et des images. Dans ces travaux, le facteur de résolution entre deux échelles consécutives est égal à 2. Nous avons montré qu'il est possible de développer une analyse multirésolution orthogonale pour les images avec un facteur de résolution  $\sqrt{2}$ . Ce facteur  $\sqrt{2}$  permet de doubler la finesse d'analyse de l'image, ceci est important pour le suivi des passages par zéro ainsi que le préconise Witkin [10]. Le formalisme présenté ici est très proche de celui développé en 1-D par Mallat [3] en ce sens qu'il n'y a qu'une image inter-échelles au lieu de trois. Ceci supprime les éventuels problèmes de fusion entre les canaux inter-échelles. Enfin, le fait que les filtres utilisés soient non sélectifs à l'orientation (ce qui est impossible pour un facteur de résolution 2) est appréciable dans la perspective d'un travail de segmentation par exemple.

*Manuscrit reçu le 16 août 1989.*

## Appendice A

Tout comme dans le cas dyadique en 1-D [4], il est facile de montrer que  $(\Psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$  est une famille orthonormée si et seulement si  $(\Phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}^2}$  est une famille orthonormée, ce qui est le cas par hypothèse.

Pour montrer les autres assertions du théorème, on remarque qu'il est suffisant d'étudier le cas  $j = 0$ . En effet, le sous espace  $W_j$  est identique à  $W_0$  après dilatation par  $L^{2^j}$ .

Soit  $F \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ , on note  $\widehat{F} = \{\widehat{f}/f \in F\}$ . En écrivant :

$$f \in V_{-1/2} \Leftrightarrow \exists (\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}^2} / \sum_k |\beta_k|^2 < +\infty$$

$$f(x, y) = \sum_k \beta_k \Phi \left( \frac{x+y}{2} - k_x, \frac{x-y}{2} - k_y \right),$$

il vient

$$\widehat{V}_{-1/2} = \{ \sigma(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) m_0(\omega_x, \omega_y) \times \widehat{\Phi}(\omega_x, \omega_y) ; \sigma \in L^2([0, 2\pi]^2) \}.$$

De même il est clair que :

$$\widehat{V}_0 = \{ \sigma(\omega_x, \omega_y) \widehat{\Phi}(\omega_x, \omega_y) ; \sigma \in L^2([0, 2\pi]^2) \}.$$

Le problème central est de prouver :  $W_{-1/2} = F$  avec

$$\widehat{F} = \{ \sigma(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) \overline{m}_0(\omega_x + \pi, \omega_y + \pi) \times e^{-i\omega_x} \widehat{\Phi}(\omega_x, \omega_y) ; \sigma \in L^2([0, 2\pi]^2) \}.$$

La transformée de Fourier définit une isométrie de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  sur lui-même. Ainsi, prouver l'égalité

$$V_0 = V_{-1/2} \oplus F \quad \text{revient à prouver que}$$

$$\widehat{V}_0 = \widehat{V}_{-1/2} \oplus \widehat{F}.$$

De part les définitions de ces espaces, il est clair que  $\widehat{V}_{-1/2} \subset \widehat{V}_0$  et  $\widehat{F} \subset \widehat{V}_0$ , d'où  $\widehat{V}_{-1/2} + \widehat{F} \subset \widehat{V}_0$ .

Reste à vérifier deux points :

1\*  $\widehat{V}_0 \subset \widehat{V}_{-1/2} + \widehat{F}$

2\*  $\widehat{V}_{-1/2}$  et  $\widehat{F}$  sont orthogonaux.

1\* Premier point : soit  $\theta \in L^2([0, 2\pi]^2)$  alors il existe  $(\theta_0, \theta_1) \in (L^2([0, 2\pi]^2))^2$  tel que

$$\theta(\omega_x, \omega_y) = \theta_0(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) + \theta_1(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) e^{-i\omega_x}.$$

Soit à présent  $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2) \in (L^\infty([0, 2\pi]^2))^2$  tels que :

$$\alpha_0(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) = \overline{m}_0(\omega_x, \omega_y) + \overline{m}_0(\omega_x + \pi, \omega_y + \pi),$$

$$\alpha_1(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) = (-m_0(\omega_x, \omega_y) + m_0(\omega_x + \pi, \omega_y + \pi)) e^{-i\omega_x},$$

$$\beta_0 = -\overline{\alpha}_1,$$

$$\beta_1 = \overline{\alpha}_0.$$

Il vient :

$$\theta(\omega_x, \omega_y) = (\theta_0(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) \alpha_0(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) +$$

$$\theta_1(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) \beta_0(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y)) m_0(\omega_x, \omega_y) +$$

$$+ (\theta_0(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) \alpha_1(\omega_x + \omega_y, \omega_x + \omega_y) +$$

$$\theta_1(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y) \beta_1(\omega_x + \omega_y, \omega_x - \omega_y))$$

$$\times \overline{m}_0(\omega_x + \pi, \omega_y + \pi) e^{-i\omega_x}.$$

ce qui montre le premier point.

2\* Le second point revient à prouver l'orthogonalité des deux espaces  $\widehat{V}_{-1/2}$  et  $\widehat{F}$ . Une démonstration de ce résultat dans le cas 1-D dyadique se trouve dans [4]. Cette preuve est facile à modifier pour entrer dans le cadre défini ici.

## Appendice B

Les filtres H et G utilisés pour la décomposition des images présentées à la Section 6 ont la structure suivante :

```

m l h g h l m
l f e d e f l
h e c b c e h
g d b a b d g
h e c b c e h
l f e d e f l
m l h g h l m

```

Filtre H

```

m -l h -g h -l m
-l f -e d -e f -l
h -e c -b c -e h
-g d -b a -b d -g
h -e c -b c -e h
-l f -e d -e f -l
m -l h -g h -l m

```

Filtre G

## Structure des filtres

La table ci-dessous fournit les coefficients des filtres référencés à la Section 5. Ceux-ci ne sont pas à réponses impulsionnelles finies, aussi dans la pratique on tronque les réponses impulsionnelles de telle sorte que la somme des coefficients soit égale à 1 pour le filtre H et à 0 pour le filtre G.

Coef.	Filtre du type Laplacien	Filtre du type racine de Laplacien
<i>a</i>	0,6433908	0,6770732
<i>b</i>	0,1433488	0,1011476
<i>c</i>	-0,0289743	-0,0185224
<i>d</i>	-0,0125361	0,0115948
<i>e</i>	-0,0091506	0,0067187
<i>f</i>	0,0027737	0,0041784
<i>g</i>	-0,0021526	0,0043679
<i>h</i>	0,0016453	-0,0037000
<i>l</i>	0,0010524	0,0030238
<i>m</i>	-0,0004016	-0,0025731

Coefficient des filtres

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. MEYER, « Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbre d'opérateurs », Séminaire Bourbaki, 1985-1986, n° 662.
- [2] P. J. BURT and A. E. ADELSON, « The Laplacian pyramid as a compact image code » *IEEE Trans. Communications*, vol. 31, pp. 532-540, Apr. 1983.
- [3] S. MALLAT, « A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation », *IEEE PAMI*, vol. 2, n° 7, July 1989.
- [4] S. MALLAT, « Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$  », *Trans. of the American Mathematical Society*, vol. 315, pp. 69-87, Sept. 1989.
- [5] I. DAUBECHIES, « The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis », *preprint AT&T Bell Laboratories*, 1987.
- [6] D. MARR, « Vision », W. H. Freeman and Compagny, 1982.
- [7] D. MARR and E. HILDETH, « Theory of edge detection », *Proc. Roy. Soc. London*, vol. B-207, pp. 187-217, 1980.
- [8] V. TORRE and T. POGGIO, « On edge detection », *IEEE PAMI*, vol. 8, n° 2, pp. 146-163, March 1986.
- [9] A. L. YUILLE and T. POGGIO, « Scaling theorems for zero crossings », *IEEE PAMI*, vol. 8, n° 1, January 1986.
- [10] A. WITKIN, « Scale space filtering », *Proc. Int. Joint Conf. Artif. Intell.*, Karlsruhe, West Germany, pp. 1019-1021, 1980.
- [11] Y. MEYER, « Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées », *Cahier de Math. du CEREMADE*, univ. Paris-Dauphine, 1987.
- [12] M. J. T. SMITH and T. P. BARNWELL III, « A procedure for designing exact reconstruction filter bank for tree structured subband coders », *IEEE International Conf. ASSP*, San Diego, California, March 1984.
- [13] M. VETTERLI, « Multi-dimensional Sub-band Coding: Some theory and Algorithms », *Signal Processing* 6, 1984.
- [14] J. W. WOODS and S. D. O'NEIL, « Sub-band coding of images », *IEEE Trans. Acoust. Speech and signal processing*, vol. 34, pp. 1278-1288, October 1986.
- [15] P. G. LEMARIÉ, « Ondelettes à localisation exponentielle », *J. Math. Pures et Appl.*, vol. 67, pp. 227-236, 1988.
- [16] G. BATTLE, « A block spin construction of ondelettes, Part I: Lemarié functions », *Comm. Math. Phys.*, 1987.
- [17] A. N. TIKHONOV and V. Y. ARSENIN, *Solution of ill-posed problems*, Washington, DC: Winston and Wiley, 1977.
- [18] E. H. ADELSON, E. SIMONCELLI and HINGORANI, « Orthogonal pyramid transforms for image coding », SPIE, vol. 845, *Visual Communication and Image Processing III*, pp. 50-58, 1987.
- [19] J. C. FEAUVEAU, « Analyse multirésolution par ondelette non orthogonale et bancs de filtres numériques », *Thèse de doctorat*, Univ. Paris Sud, Orsay, France, Janvier 1990.