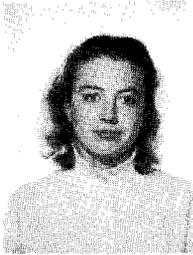


Stabilité des prédicteurs ARMA adaptatifs

avec des entrées non stationnaires

Stability of adaptive IIR predictors, with nonstationary inputs



Christine UHL

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-ESE, plateau du Moulon, 91192 GIF-SUR-YVETTE.

Christine Uhl a une double formation d'ingénieur et d'enseignante. Elle a obtenu le diplôme d'ingénieur de l'École Nationale Supérieure d'Électronique et de Radioélectricité de Grenoble, option Théorie de l'Information, ainsi qu'un DEA de Systèmes Electroniques en 1986. Admise au concours de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud en 1984, elle effectue une thèse de Doctorat au Laboratoire des Signaux et Systèmes. Ses principaux centres d'intérêts sont le filtrage adaptatif et la stabilité de systèmes non linéaires.



Odile MACCHI

Laboratoire des Signaux et Systèmes et GRC 134 (Traitement du Signal et Image), CNRS-ESE, Plateau du Moulon, 91192 GIF-SUR-YVETTE.

Odile Macchi est ancienne élève de l'École Normale Supérieure de jeunes filles, elle est reçue septième à l'Agrégation de Mathématiques en 1966. Elle obtient son Doctorat d'État en Sciences Physiques en 1972 et depuis lors, elle se consacre à la recherche en traitement du signal, spécialement en théorie des communications. Elle est directrice de recherche au CNRS et dirige au sein du Laboratoire de Signaux et Systèmes de l'École Supérieure d'Électricité, une équipe qui travaille en communications, tout particulièrement sur les systèmes adaptatifs en transmission. Actuellement elle est adjointe au directeur du GRECO Traitement du Signal et Image. Pour la partie transmission de données, elle est coauteur du livre « Téléinformatique » qui a fait l'objet d'un très gros tirage et de trois traductions. Elle a reçu la médaille Blondel, le prix du général Kampé de Férié de l'Académie des Sciences et la distinction Fellow des IEEE.



Nacer M'SIRDI

Laboratoire d'Automatique et Robotique, Tour 32, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75252 PARIS CEDEX 05.

Nacer K. M'Sirdi, maître de conférence à l'Université P.-M.-Curie (Paris-VI), a obtenu le doctorat de troisième cycle en Électronique en 1983 (ENSERG) puis le doctorat d'État en Automatique et Traitement du Signal en 1988 au Laboratoire d'Automatique de Grenoble (CNRS-ENSIEG). Son activité de recherche concerne les systèmes adaptatifs (Théorie et application). Depuis octobre 1987, il est membre du Laboratoire de Robotique de Paris où il s'intéresse principalement aux traitements adaptatifs du signal et à la commande adaptative (CRIIF-LRP, BP n° 340, 4, place Jussieu, 75229 Paris Cedex 05).

RÉSUMÉ

Nous étudions le comportement des prédicteurs ARMA adaptatifs du point de vue de leur stabilité, en utilisant, pour l'adaptation, l'algorithme LMS récursif et un algorithme avec erreur *a posteriori*. L'entrée du prédicteur est un signal stationnaire à bandes étroites, ou un signal non stationnaire de parole. D'une part, nous montrons que l'utilisation de l'erreur *a posteriori* dans l'algorithme d'adaptation amortit les oscillations dues au phénomène d'autostabilisation, par rapport au cas de l'algorithme LMS. D'autre part, nous faisons le lien entre l'instabilité de l'algorithme LMS et la non-stationnarité due à des sauts de puissance dans les signaux de parole. Finalement l'utilisation d'un algorithme avec erreur *a posteriori* assure la stabilité au sens entrée bornée/sortie bornée, même pour un signal non stationnaire.

MOTS CLÉS

Filtrage adaptatif, algorithme LMS, algorithme avec erreur *a posteriori*, normalisation, autostabilisation, stabilité BIBO, signal non stationnaire, parole.

SUMMARY

We consider adaptive prediction with an IIR moving average (MA) part, when controlled either by the recursive LMS algorithm or by an extended LS (ELS) algorithm based on a posteriori errors. The predictor input is either the sum of band-pass components or a nonstationary speech sentence. We show on one hand that using the a posteriori error algorithm smoothes the oscillations due to the selfstabilization phenomenon, compared to the LMS algorithm case. On the other hand we show that with a nonstationary input the LMS algorithm can be unstable due to power jumps in the speech signal. Finally the a posteriori error algorithm ensures BIBO stability (Bounded Input-Bounded Output) even for a nonstationary input.

KEY WORDS

Adaptive filtering, LMS algorithm, a posteriori prediction error algorithm, normalization, selfstabilization, BIBO stability, nonstationary signal, speech.

I. Introduction

La prédiction ARMA adaptative est un outil très intéressant pour le traitement de signaux en temps réel et la commande de processus variant dans le temps. La stabilité du prédictif récursif adaptatif utilisé est une propriété cruciale pour toute application dans ces deux domaines.

Il convient, dès à présent, de donner une définition précise de quelques notions de base utilisées.

1. Un filtre récursif adaptatif est dit *BIBO stable* (Bounded Input-Bounded Output) si à toute entrée bornée de ce filtre correspond une sortie bornée.
2. Il a des *instabilités locales* si ses pôles sont à certains instants à l'extérieur du cercle unité.
3. Un filtre récursif adaptatif (ou son algorithme d'adaptation) *converge presque sûrement* si au cours du temps ses paramètres tendent avec une probabilité égale à 1, vers les paramètres optimaux.
4. Une condition *suffisante* pour assurer cette convergence, pour certains algorithmes d'adaptation (par exemple les algorithmes des moindres carrés étendus) est la *condition de stricte positivité réelle* (SPR) [1] pour la génération des signaux, condition qui sera détaillée dans la partie II.

Remarquons qu'un filtre récursif adaptatif peut être BIBO stable et avoir des instabilités locales. Cette propriété sera longuement développée dans le présent article. Remarquons aussi que si un filtre récursif adaptatif converge presque sûrement, il n'a pas d'instabilité locale (passé un délai d'initialisation).

Pour un signal stationnaire à bandes étroites, le modèle (ARMA) générateur possède ses zéros et ses pôles sur le cercle unité [2]. Il en est de même pour le prédictif optimal. Un tel signal ne vérifie pas la condition SPR. Si le prédictif est d'ordre plus faible que le modèle vrai, sa version adaptative, contrôlée par un algorithme du type «LMS récursif», présente le phénomène d'autostabilisation [3]. Les pôles du prédictif sortent du domaine de stabilité et le réintègrent sous l'effet de l'algorithme. Le prédictif reste ainsi BIBO stable, tout en ayant des instabilités locales.

Les prédictifs ARMA sont appliqués avec succès au codage numérique des signaux de parole. Ces signaux

peuvent être modélisés par un mélange de composantes à bande étroite. De plus ils sont non stationnaires et présentent des sauts de puissance et des ruptures de modèles. Il est donc nécessaire d'étendre au cas de tels signaux l'étude des propriétés de convergence et de stabilité des algorithmes d'adaptation.

Dans le paragraphe II nous introduisons les prédictifs ARMA adaptatifs, ainsi que les deux algorithmes d'adaptation dont nous étudions plus précisément le comportement: l'algorithme LMS récursif [4] et l'algorithme avec erreur de prédiction *a posteriori* [5].

Dans le paragraphe III nous présentons le phénomène d'autostabilisation en présence de signaux à bandes étroites, pour l'algorithme LMS récursif basé sur l'erreur de prédiction *a priori*. L'utilisation de l'erreur de prédiction *a posteriori* permet de lisser les pics de l'autostabilisation tels qu'ils se présentent pour l'algorithme LMS récursif. Ceci est obtenu au prix d'une complexité plus grande.

Dans le paragraphe IV nous étudions le comportement des prédictifs ARMA adaptatifs en présence de signaux de parole synthétique et naturelle pour les deux précédents algorithmes d'adaptation. Nous montrons que l'instabilité de l'algorithme LMS récursif vient de la non-stationnarité due à des sauts de puissance, et que l'utilisation d'un algorithme d'adaptation avec erreur de prédiction *a posteriori* restaure la stabilité BIBO, grâce à une sorte de normalisation implicite du pas d'adaptation. L'on doit donc recommander ce dernier algorithme pour le traitement de la parole.

II. Prédictif ARMA adaptatif

Le schéma d'un prédictif ARMA adaptatif est donné sur la figure II. 1.

II. 1. PRÉSENTATION DES ALGORITHMES

Pour un prédictif ARMA (p , q) adaptatif le signal \hat{s}_n prédit est donné par:

$$(2.1 a) \quad \hat{s}_n = A_{n-1}^T S_{n-1} + B_{n-1}^T E_{n-1}$$

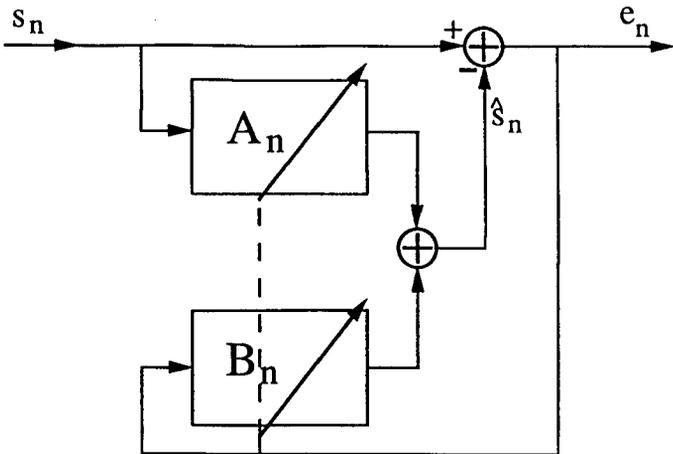


Fig. II.1. — Prédiction ARMA adaptative.

avec les vecteurs d'échantillons passés :

$$(2.1 b) \quad \begin{cases} S_{n-1} = (s_{n-1}, \dots, s_{n-p})^T, \\ E_{n-1} = (e_{n-1}, \dots, e_{n-q})^T \end{cases}$$

et les vecteurs paramètres AR et MA, adaptatifs :

$$(2.1 c) \quad \begin{cases} A_{n-1} = (a_1(n-1), \dots, a_p(n-1))^T, \\ B_{n-1} = (b_1(n-1), \dots, b_q(n-1))^T. \end{cases}$$

Dans ces formules s_n est le signal à prédire et e_n est l'erreur de prédiction à l'instant n

$$(2.2) \quad e_n = s_n - \hat{s}_n.$$

On peut écrire \hat{s}_n sous la forme contractée :

$$(2.3 a) \quad \hat{s}_n = \theta_{n-1}^T \Phi_{n-1}$$

avec le vecteur paramètre θ_{n-1} et le vecteur observation Φ_{n-1}

$$(2.3 b) \quad \theta_{n-1}^T = (A_{n-1}^T, B_{n-1}^T), \quad \Phi_{n-1}^T = (S_{n-1}^T, E_{n-1}^T).$$

Algorithme LMS récursif (C)

Afin de minimiser l'erreur quadratique moyenne (EQM) $E(e_n^2)$, la mise à jour des paramètres est souvent réalisée avec l'algorithme dit « LMS récursif » selon le système d'équations

$$(2.4) \quad \theta_n = \theta_{n-1} + \beta e_n \Phi_{n-1}; \quad \beta > 0,$$

où β est le pas d'adaptation positif. Cet algorithme est dérivé du gradient de l'EQM en négligeant la dépendance entre l'erreur de prédiction e_n et les paramètres (A, B) du prédicteur [4].

L'algorithme LMS récursif (2.4) est noté (C) dans la suite parce qu'il est classique dans les systèmes de transmission.

Algorithme avec erreur a posteriori (N)

L'erreur a posteriori e_n^p est calculée après la mise à jour des paramètres selon :

$$(2.5 a) \quad e_n^p = s_n - \hat{s}_n^p$$

$$(2.5 b) \quad \hat{s}_n^p = \theta_n^T \Phi_{n-1}$$

avec

$$(2.5 c) \quad \Phi_{n-1}^p = (S_{n-1}^T, e_{n-1}^p, \dots, e_{n-q}^p)^T.$$

Le critère à minimiser est l'EQM a posteriori $E[(e_n^p)^2]$. Par la même approximation que dans l'algorithme LMS récursif (c'est-à-dire en négligeant la dépendance entre E_n^p et le vecteur paramètre θ) on obtient l'algorithme d'adaptation suivant :

$$(2.6) \quad \theta_n = \theta_{n-1} + \beta e_n^p \Phi_{n-1}^p.$$

En remplaçant (2.6) dans (2.5), il est aisé de voir que :

$$(2.7 a) \quad e_n^p = e_n / N_n$$

avec le facteur de normalisation :

$$(2.7 b) \quad N_n = 1 + \beta |\Phi_{n-1}^p|^2,$$

et avec la définition classique de l'erreur de prédiction a priori :

$$(2.8) \quad e_n = s_n - \theta_{n-1}^T \Phi_{n-1}.$$

On voit d'après (2.5) que e_n^p n'est pas réellement une erreur de prédiction puisque le signal « prédit » \hat{s}_n^p est calculé après la mise à jour (2.6) des paramètres, laquelle utilise s_n à travers e_n^p . Ainsi la « prédiction » \hat{s}_n^p est calculée en toute connaissance de la valeur s_n du signal à prédire.

L'algorithme (2.6) présente une normalisation implicite du pas d'adaptation par le facteur N_n ; c'est pour cela qu'il est noté algorithme (N) dans la suite. Il est clair que si β est petit, c'est lorsque $|\Phi_n^p|$ augmente que l'effet de la normalisation sera sensible. La normalisation est donc très importante — soit pour un signal (non stationnaire) dont la puissance croît, — soit en présence d'instabilités locales faisant croître le vecteur de sortie E_n^p . Elle concourra beaucoup à éliminer de telles instabilités.

Ces deux effets bénéfiques seront mis en valeur dans la suite.

Comme cet algorithme est utilisé en temps réel, il est important de noter qu'il est plus complexe que l'algorithme LMS récursif; il nécessite $(p+q+2)$ multiplications et $(p+q)$ additions supplémentaires. Il nécessite aussi une division, absente dans l'algorithme LMS récursif.

Remarque : En rapprochant la prédiction a priori (2.8) et la prédiction a posteriori (2.5) on note, à l'intérieur de l'algorithme (N), un étroit couplage entre les deux prédictions par le facteur commun E_{n-1}^p : la prédiction, même a priori, utilise une erreur a posteriori. C'est ce qui explique que dans cet algorithme d'adaptation (N), erreurs a priori et a posteriori aient exactement les mêmes performances, comme on le verra au paragraphe III.

II. 2. STABILITÉ DES PRÉDICTEURS ARMA ADAPTATIFS

II. 2. 1. Le problème du pas d'adaptation β

Lorsque le prédicteur adaptatif est du type AR pur ($B_n \equiv 0$), le problème de stabilité est assez simple. En

effet le prédicteur est alors un simple filtre adaptatif transverse. Il n'y a pas de pôle et la stabilité se résume à la bornitude de A_n . Il a été établi (voir par exemple [6]) que celle-ci est acquise avec l'algorithme d'adaptation (C) — partie A_n de l'équation (2.4) — à condition que le pas d'adaptation β soit inférieur à un seuil β_0 qui est inversement proportionnel à la puissance de l'entrée s_n . Pour un signal stationnaire, β_0 est constant, alors qu'il varie pour un signal non stationnaire, lors de sauts de puissance.

Bien que cela n'ait pas été encore prouvé, il est très vraisemblable que pour un prédicteur adaptatif du type MA, il existe un résultat semblable selon lequel pour des entrées s_n stationnaires le prédicteur est instable (sortie non bornée) lorsque le pas d'adaptation β est supérieur à un (autre) seuil β_1 .

II. 2. 2. Le problème de la partie MA adaptative

Lorsque le prédicteur a une partie MA ($B_n \neq 0$) il présente des pôles qui, comme B_n , évoluent avec n et le problème de la stabilité est encore beaucoup plus crucial. Supposons que le signal à prédire soit modélisable selon l'équation

$$(2.9 a) \quad s_n = A(z^{-1})s_n + B(z^{-1})w_n + w_n$$

où z^{-1} est l'opérateur retard et où les polynômes

$$(2.9 b) \quad A(z^{-1}) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p},$$

$$(2.9 c) \quad B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q},$$

correspondent respectivement aux parties AR et MA du modèle, le bruit générateur w_n étant une suite indépendante, centrée. Le prédicteur optimal d'un tel signal s_n est le prédicteur ARMA (p, q) correspondant aux vecteurs A et B des polynômes (2.9).

Lorsque A et B sont inconnus, on peut pratiquer une identification adaptative où l'on remplace (A, B) par l'estimation (A_n, B_n) et le bruit générateur w_n, W_{n-1} par l'erreur de prédiction e_n, E_{n-1} , selon

$$(2.10) \quad \hat{s}_n = A_n^T s_{n-1} + B_n^T E_{n-1}; \quad e_n = s_n - \hat{s}_n.$$

Le calcul de l'estimation (A_n, B_n) se fait par un algorithme adaptatif. Dans le domaine du Traitement de Signal, des résultats sur la stabilité de (C) ont été acquis [3], [4], tandis que les connaissances sur la stabilité de (N) proviennent de l'Automatique [7], [12], [13].

Algorithme (LMS) récursif

Si petit que soit le pas d'incrémentement β , il a été prouvé dans [3] que pour une entrée s_n stationnaire à bandes étroites, le filtre adaptatif possède des instabilités locales. Pourtant il atteint la stabilité BIBO (à condition que β ne soit pas trop grand) grâce au phénomène d'autostabilisation qui ramène les pôles du prédicteur adaptatif à l'intérieur du cercle unité chaque fois qu'ils en sortent (instabilités locales). Pour les signaux s_n à bande assez large, l'algorithme assure encore mieux : l'absence d'instabilité locale.

Algorithme avec erreur a posteriori

L'algorithme (N) est très voisin de l'algorithme des moindres carrés étendus (MCE) des automati-

ciens [15]: pour obtenir (MCE) il suffit de remplacer le pas d'incrémentement de (2.6) par une quantité β_n qui décroît vers 0 en $1/n$. Or il a été montré [1] qu'avec l'algorithme (MCE), si A_n et B_n sont de dimensions suffisantes, on a convergence presque sûre (A_n, B_n) \rightarrow (A, B) des paramètres, sous la condition suffisante que $[1 - A(z^{-1})]$ soit stable (toutes les racines dans le cercle unité) et que $(1 + B(z^{-1}))^{-1} - (1/2)$ soit à partie réelle strictement positive lorsque z appartient au cercle unité (condition SPR). En remplaçant le pas d'incrémentement β_n en $1/n$ par une valeur β fixée (mais assez petite) pour engendrer l'algorithme (N), le résultat de convergence sur les paramètres est remplacé par des oscillations de faible amplitude de (A_n, B_n) autour de (A, B). Ainsi pour β assez petit, l'algorithme (N) avec erreur a posteriori assure-t-il l'inexistence d'instabilité locale, sous la condition que s_n soit de type SPR.

L'étape ultérieure dans l'étude de la stabilité de (N) correspond donc aux entrées qui ne sont pas SPR. Il a été montré [7] que l'algorithme avec erreur a posteriori est toujours BIBO stable quel que soit le pas d'adaptation β et indépendamment des conditions initiales.

Pourtant avec des signaux qui ne sont pas SPR, par exemple avec des signaux à bandes étroites, si petit que soit le pas d'adaptation β , il se produira des instabilités locales, c'est-à-dire que les pôles du prédicteur adaptatif sortiront du cercle unité. Mais la stabilité BIBO est assurée par le phénomène d'autostabilisation qui se produit comme pour l'algorithme (C).

II. 3. APPLICATION AU CODAGE NUMÉRIQUE

Une application importante de la prédiction ARMA adaptative est la transmission numérique à débit réduit des signaux téléphoniques s_n , selon le schéma de principe de la figure II. 2. Le codeur est constitué

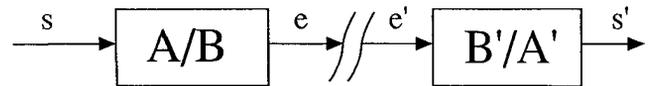


Fig. II. 2. — Chaîne de transmission par prédiction adaptative.

par un simple prédicteur récursif dont la fonction de transfert est (par exemple pour $\beta=0$)

$$(2.11) \quad H(z) = [1 - A(z^{-1})] / [1 + B(z^{-1})]$$

et est symbolisée par la notation A/B. En d'autres termes on omet le quantificateur qui numérise e_n avant transmission, et ceci parce que le problème de stabilité est indépendant du quantificateur [8]. Après transmission, le décodeur effectue aussi un filtrage récursif dont la fonction de transfert, symbolisée par B'/A', vaut

$$(2.12) \quad G'(z) = [1 + B'(z^{-1})] / [1 - A'(z^{-1})].$$

S'il n'y a pas d'erreur de transmission, c'est-à-dire si $e' = e$, il est clair que le décodeur restituera le signal désiré $s' = s$ si et seulement si $A' = A, B' = B$: le décodeur et le codeur effectuent des filtrages inverses l'un de l'autre, ce que nous supposons : $G' = H^{-1}$. Dans

Or la stabilité de la chaîne de transmission exige évidemment que codeur et décodeur soient stables. Comme tous deux sont en fait les filtres récursifs adaptatifs, A et B deviennent fonction de n et l'on voit que les polynômes adaptatifs $1 - A_n(z^{-1})$ et $1 + B_n(z^{-1})$ doivent tous deux être BIBO stables. Dans cet article nous considérerons le comportement de ces deux polynômes, qui correspondent respectivement aux parties transverse et récursive du codeur.

La chaîne de transmission véhicule des signaux réels : sinusoïdes, données, ou parole. C'est pourquoi nous allons tout d'abord présenter — avec quelques rappels — une étude théorique de la stabilité des prédicteurs ARMA adaptatifs pilotés par (C) ou (N), en présence de signaux stationnaires à bandes étroites (§III). La généralisation aux signaux non stationnaires de parole se fera par simulations (§IV).

Il faut noter qu'un système de codage conforme à celui de la figure II.2 (avec aussi une quantification adaptative) a été normalisé [9] sous la dénomination MICDA (modulation par impulsion et codage différentiel adaptatif) pour la transmission numérique téléphonique à 32 kbit/s. Dans cet exemple d'importance primordiale, le prédicteur ARMA est d'ordre $p=2$, $q=6$.

III. Autostabilisation pour des signaux à bandes étroites stationnaires

III. 1. PRÉAMBULE

Il a été montré dans [3] qu'en présence d'un signal quasi monochromatique s_n , l'algorithme avec erreur *a priori* (C) souffre d'une dérive déstabilisante qui va induire des instabilités locales et contrôlées. Dans ce qui suit nous allons traiter de manière unifiée l'algorithme (C) et l'algorithme (N) avec erreur *a posteriori* et généraliser le raisonnement et les calculs présentés en [3] au cas où s_n comporte plusieurs sinusoïdes selon

$$(3.1) \quad s_n = \sum_{k=1}^m c_k \cos(\omega_k n + \alpha_k).$$

On suppose tous les ω_k distincts (*) et les phases α_k sont supposées aléatoires, indépendantes et équiréparties. Commençons par un prédicteur MA pur et tout d'abord supposons le paramètre B fixe, stable ou non. Il n'est pas difficile de voir que la sortie e_n se décompose en

$$(3.2) \quad e_n = e_n^L + e_n^{NL}.$$

$$(3.3) \quad e_n^L = \sum_{k=1}^m c_k \rho_k(B) \cos(\omega_k n + \alpha_k - \psi_k(B)),$$

$$(3.4) \quad e_n^{NL} = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^q \alpha_i(B) [z_i(B)]^n \right\}.$$

(*) Pour simplifier l'écriture, l'analyse du III est faite en supposant $\omega_k \neq 0$. Par une modification évidente on inclurait la fréquence nulle. Celle-ci jouera d'ailleurs un rôle pour le cas de la parole (§IV).

Dans le terme e_n^L , dit « linéaire » les quantités ρ_k et ψ_k , qui dépendent de B, sont les expressions classiques de l'atténuation et du déphasage du filtre récursif de fonction de transfert $H(z) = [1 + B(z^{-1})]^{-1}$, à la pulsation ω_k . Donc (3.3) représente la sortie classique du prédicteur, dans le cas où ce dernier est stable, sortie qui s'instaure à l'issue du régime transitoire, et qui comporte les mêmes fréquences que l'entrée. La stabilité est caractérisée par

$$(3.5) \quad |z_i(B)| < 1, \quad i=1, \dots, q$$

où les $z_i(B)$ sont les pôles de $H(z)$.

Le terme e_n^{NL} , dit « non linéaire », n'a pas de composante aux fréquences de l'entrée; il contient les pulsations propres $\Phi^i = \arg[z_i(B)]$. Dans l'équation (3.4) les coefficients $\alpha_i(B)$ dépendent de B et des conditions initiales. Ce terme caractérise un régime qui est soit transitoire lorsque (3.5) est vraie, soit instable lorsque l'un des pôles du prédicteur est instable. La dénomination non linéaire se justifiera lorsque le prédicteur deviendra adaptatif. On verra qu'alors cette erreur apparaît et disparaît de façon répétitive parce que les pôles oscillent autour du cercle unité.

III. 2. DÉRIVE DESTABILISANTE DES PARAMÈTRES MA

Le vecteur paramètre adaptatif B_n du prédicteur étant supposé initialisé dans le domaine de stabilité (par exemple $B_0=0$) et le pas d'adaptation β de (C) ou de (N) étant assez petit, l'incrément de B_n demeure faible tant que les racines de $1 + B_n(z^{-1})$ demeurent à l'intérieur du cercle unité. Durant un intervalle de temps T, on peut alors considérer le prédicteur comme un filtre linéaire stable dont la fonction de transfert $\bar{H}(z)$ sera associée par (2.11), avec $A_n \equiv 0$, au vecteur moyen \bar{B} durant l'intervalle T. La sortie e_n du prédicteur est alors seulement composée de l'erreur linéaire classique e_n^L donnée en (3.3), le transitoire e_n^{NL} s'étant annulé; ρ_k et ψ_k sont associés à la fonction de transfert $\bar{H}(z)$. Tant que le prédicteur adaptatif reste stable et pour β petit, il est évident que l'erreur *a posteriori* a la même représentation (3.3) à un facteur près, lié au dénominateur N: elle résulte aussi de s_n par filtrage. De la sorte les algorithmes (C) et (N), respectivement (2.4) et (2.6), ont des incréments semblables. Évaluons l'incrément de la l -ième coordonnée de B_n pour une itération, par exemple pour l'erreur *a priori* et pour (C):

$$(3.6) \quad \Delta b_l(n) = \beta e_n e_{n-l}.$$

Grâce à l'indépendance et l'équirépartition des phases α_k il est clair que la moyenne est

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{aligned} E(\Delta b_l(n)) &= \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^m (c_k \rho_k)^2 \cos l \omega_k \\ l &= 1, \dots, q. \end{aligned} \right.$$

On peut écrire ceci sous forme vectorielle en définissant la matrice

$$(3.8) \quad M_q = \begin{bmatrix} e^{j\omega_1} & \dots & e^{j\omega_m} & e^{-j\omega_1} & \dots & e^{-j\omega_m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ e^{jq\omega_1} & \dots & e^{jq\omega_m} & e^{-jq\omega_1} & \dots & e^{-jq\omega_m} \end{bmatrix}$$

ainsi que le vecteur

$$(3.9) \quad D = (c_1^2 \rho_1^2, \dots, c_m^2 \rho_m^2, c_1^2 \rho_1^2, \dots, c_m^2 \rho_m^2)^T.$$

Il vient

$$(3.10) \quad E(\Delta B_n) = \frac{\beta}{4} M_q \cdot D.$$

On obtient le même résultat, à un facteur près, pour l'algorithme (N).

A l'intérieur de l'intervalle de temps T, cette quantité ne dépend pas de n. Ainsi B_n augmente régulièrement. C'est l'existence de cette dérive constante sur le vecteur B_n qui va pousser les paramètres MA vers la limite d'instabilité. Si petit que soit β, l'un au moins des pôles de H(z) va atteindre le cercle unité. La dérive (3.7) est déstabilisante, quelle que soit β.

Exemple. Prenons une seule sinusoïde de pulsation angulaire ω = π/2 et un prédicteur MA d'ordre q = 6. Si B₀ = 0, les composantes b_nⁱ de B_n vérifient

$$(3.11) \quad E(b_n^{2j+1}) = 0; \quad E(b_n^{2j}) = (-1)^j \beta c^2 \rho^2 / 2.$$

Le prédicteur moyen va dériver vers le point $\tilde{B} = (0, -1, 0, 1, 0, -1)^T$ dont la fonction de transfert

$$(3.12) \quad \tilde{H}(z) = [(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})(1 + z^{-4})]^{-1}$$

a ses 6 pôles tous situés sur le cercle unité, correspondant aux 4 pulsations propres Φⁱ = 0, π/4, 3π/4, π. Notons qu'avec les 2 points ±i représentatifs de la pulsation d'entrée ω = π/2, ces 6 pôles forment une constellation régulière, illustrée sur la figure III.1.

Nous retrouvons ainsi un résultat général donné dans [2], [15]: le prédicteur MA (q) optimal prédit en quelque sorte par défaut, en créant des pôles aussi réguliers et aussi distants que possible de la fréquence d'entrée. Ainsi le gain de H(z) sera élevé pour toutes les fréquences différentes des fréquences ω₁, ..., ω_m du signal. Lorsque l'ordre q est élevé, on voit que cela est assimilable au gain d'un prédicteur AR d'ordre 2m, qui est capable de placer ses 2m zéros sur chacune des 2m pulsations ±ω_k. L'écart angulaire entre deux pôles, ou entre une composante ±ω_i de s_n et un pôle est

$$(3.13) \quad \Delta\Phi = 2\pi / (2m + q).$$

Poussé jusqu'à cette configuration des pôles sur la frontière de stabilité, le prédicteur adaptatif qui résulte a évidemment des instabilités locales aussi bien pour l'algorithme (N) que pour l'algorithme (C). Nous allons maintenant résumer ce qui se passe lorsque, toujours poussé par la dérive (3.10), l'un des pôles traverse le cercle unité.

III. 3. PÉRIODES INSTABLES: ERREUR NON LINÉAIRE STABILISANTE

Considérons une période où le dénominateur B(z) possède une racine z instable, c'est-à-dire de module supérieur à 1. Parce que le pas d'adaptation β est faible nous pouvons sur une période T considérer le prédicteur comme un filtre linéaire fixe, mais instable. Très rapidement, c'est l'erreur non linéaire e_n^{NL} de

(3.4) qui va dominer l'erreur linéaire e_n^L. En supposant qu'il n'y a qu'un seul (couple de) pôle(s) instable(s) z (z*) à la fréquence angulaire Φ (z = |z| e^{±jΦ}), on trouve donc la sortie du prédicteur

$$(3.14) \quad e_n = \alpha |z|^n \cos(n\Phi + \theta), \quad |z| > 1.$$

Elle est à la pulsation Φ du pôle instable. (Le temps n est compté à partir de l'apparition de l'instabilité.) Évaluons alors l'incrément de la l-ième coordonnée de B_n, en une itération, par exemple pour l'algorithme (C). Il vient

$$(3.15) \quad \Delta b_l(n) = \beta \alpha^2 |z|^{2n-l} \times \cos[n\Phi + \theta] \cos(n-l)\Phi + \theta]$$

dont la moyenne augmente exponentiellement. L'incrément moyen du paramètre MA est donc

$$(3.16) \quad E(\Delta B(n)) = \frac{\beta}{2} \alpha^2 |z|^{2n} \cdot U,$$

$$(3.17) \quad U = \Delta \left(\frac{\cos \Phi}{|z|}, \frac{\cos 2\Phi}{|z|^2}, \dots, \frac{\cos q\Phi}{|z|^q} \right)^T.$$

A l'intérieur de la période T, le vecteur U ne dépend pas de n. On est donc encore en présence d'une dérive de B_n dans une direction fixe U, mais cette dérive s'accélère à cause de l'exposant |z|²ⁿ.

Parce que les deux algorithmes (C) et (N) sont bien conçus — ce sont des gradients d'EQM — il se trouve que cette nouvelle dérive est stabilisante pour le prédicteur adaptatif.

Le caractère stabilisant n'est aisé à prouver qu'à l'ordre q = 1. Dans ce cas, la dérive déstabilisante fait que l'unique coefficient b dépasse 1 en module, par valeurs positives ou négatives selon les fréquences contenues dans s_n [voir (3.7)]. Comme le pôle correspond à z = -b, en période instable l'erreur non linéaire et l'incrément de b sont respectivement

$$(3.18) \quad e_n = \alpha (-b)^n,$$

$$(3.19) \quad \Delta b_n = -\alpha^2 \beta b \cdot (-b)^{2n-2}.$$

Ce qui importe c'est que l'incrément de b est de signe opposé à b. Donc il va faire diminuer son module et il va faire ceci rapidement à cause du facteur (-b)²ⁿ⁻². Cette deuxième dérive, due à l'erreur non linéaire en période instable, est donc effectivement stabilisante: |b| va très rapidement décroître au-dessous de 1.

Ce que l'on vient de décrire constitue le phénomène d'autostabilisation. L'algorithme adaptatif détecte, à l'augmentation de l'erreur de prédiction, qu'un pôle est devenu instable. Comme l'algorithme est fait pour minimiser E(e²), il en découle une restabilisation qui est automatique. Naturellement si l'entrée reste stationnaire, le phénomène déstabilisation/restabilisation va se répéter dans la suite, donnant à l'erreur un aspect quasi périodique.

Dans [3] il est montré pour le cas de l'algorithme (C) que la dérive (3.16) est stabilisante, quel que soit l'ordre q du prédicteur MA. Ces considérations sur (C) sont illustrées par les figures III.2, 3, 4a, 5a où l'on observe les oscillations des pôles (ou des

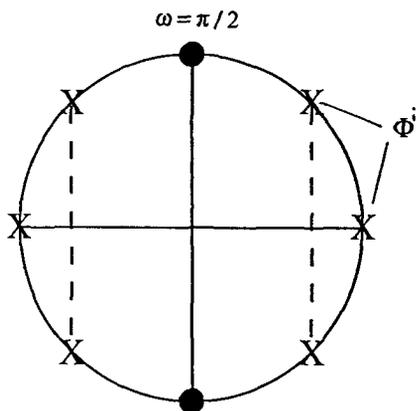


Fig. III.1. - Limite de la dérive du prédicteur adaptatif MA (6) pour une entrée à $\omega = \pi/2$.

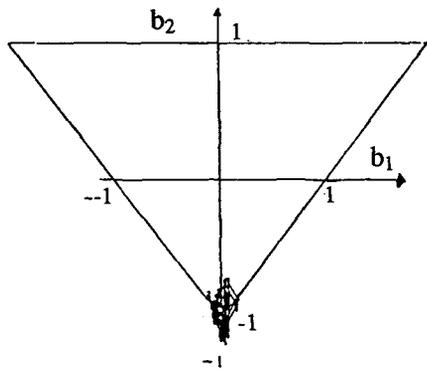
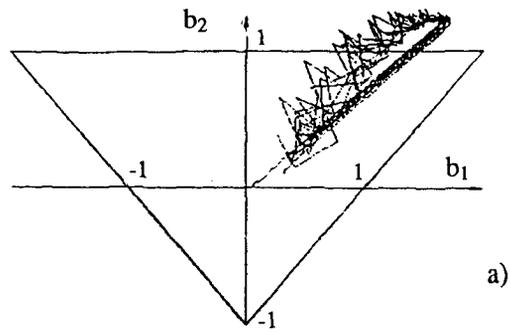


Fig. III.2. - Oscillations des coefficients d'un MA (2) autour du triangle de stabilité pour une entrée à $\omega = \pi/2$.

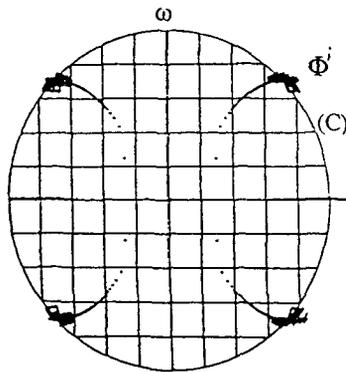
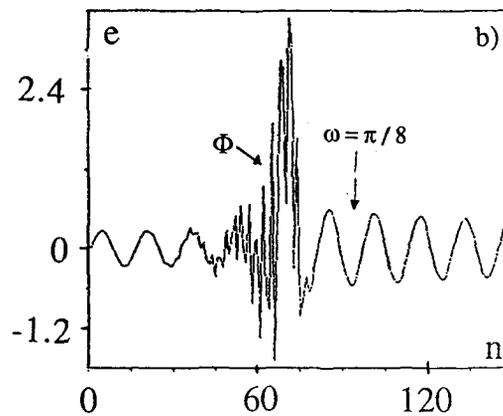


Fig. III.3. - Autostabilisations des pôles d'un MA (6) pour une entrée à $\omega = \pi/2$.

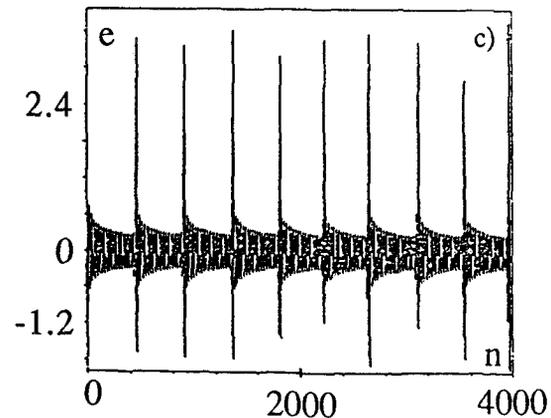


Fig. III.4. - Autostabilisation pour un MA (2) et une entrée à $\omega = \pi/8$. (a) Oscillations des paramètres MA autour de la limite d'instabilité. (b) Apparition et disparition de l'erreur non linéaire. (c) Quasi-périodicité de l'erreur non linéaire.

coefficients) autour de la frontière d'instabilité ainsi que les apparitions quasi périodiques de l'erreur non linéaire exponentiellement croissante (fig. III. 4 b, 4 c, 5 b). La figure III. 3 est à comparer à la figure III. 1. Ces exemples ont été choisis pour mettre en évidence la répartition géométrique des pôles, régulièrement espacés par rapport à la fréquence angulaire du signal à prédire, comme il a été expliqué au paragraphe III. 2.

III. 4. ALGORITHME (N) AVEC ERREUR *a posteriori*

Dans [5] il est montré que l'introduction de l'erreur *a posteriori* selon (N) diminue considérablement [en

comparaison de (C)] l'amplitude de l'erreur non linéaire e^{NL} qui apparaît durant les instabilités locales. Par là-même, (N) diminue l'amplitude des oscillations des pôles autour de la frontière d'instabilité. Ceci se comprend par le raisonnement intuitif suivant. En début de période instable, tant que n est trop petit pour que e^{NL} soit très significatif comparé à e^L , la dérive continue d'être déstabilisante, aussi bien pour (N) que pour (C). Mais, dans le cas de (N), elle est atténuée par le facteur de normalisation N_n , supérieur

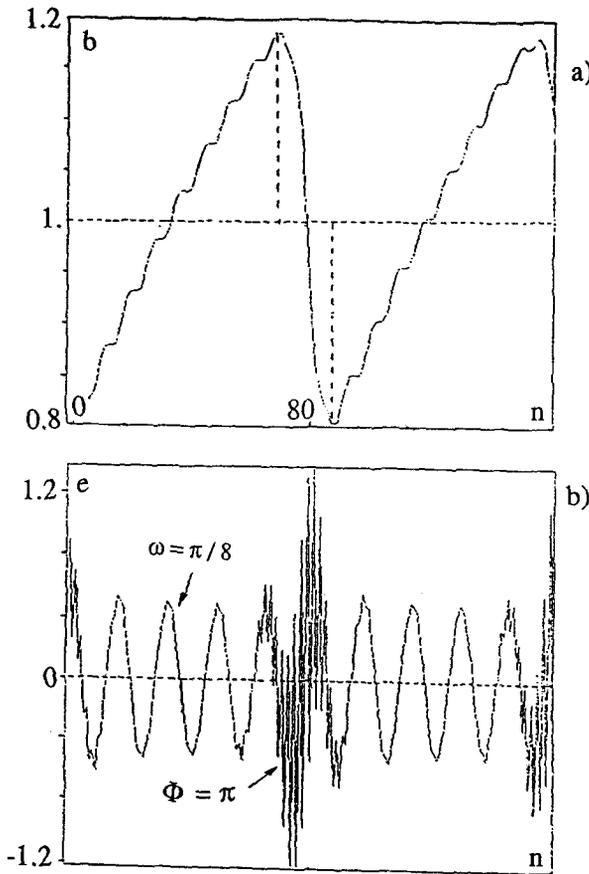


Fig. III.5. — Autostabilisation pour un MA (1) et une entrée à $\omega = \pi/8$. (a) Oscillations du paramètre b autour de la limite d'instabilité. (b) Apparition et disparition de l'erreur non linéaire.

à 1 [voir (2.7b)] selon

$$(3.20) \quad \Delta b_l(n) = \beta \frac{e_n e_{n-l}}{N_n N_{n-l}}, \quad l = 1, \dots, q,$$

[à comparer avec (3.6) pour (C)]. Ainsi la dérive déstabilisante est-elle freinée beaucoup plus vite pour (N) que pour (C). De la même manière, (3.20) montre que la dérive stabilisante n'atteint pas avec (N) une amplitude aussi importante qu'avec (C). Donc cette dérive ne renvoie pas les pôles du prédicteur très loin à l'intérieur du cercle unité. Les oscillations en sont très fortement amorties. Ceci s'observe en comparant les figures III. 6 et III. 7 qui donnent sur un horizon de 10 000 itérations les oscillations non linéaires d'un prédicteur MA (1) recevant une sinusoïde pure pour les algorithmes (C) et (N). Avec (N), au bout de 6 000 itérations, les oscillations dues à l'erreur non linéaire e^{NL} ne font plus de « bouffées » intermittentes [comme avec (C)] (voir fig. III. 7b) et le prédicteur reste pratiquement installé à l'optimalité, qui correspond à la frontière d'instabilité. Mais on peut vérifier avec une loupe (fig. III. 7c) que l'erreur non linéaire persiste et qu'elle est permanente. Le phénomène d'autostabilisation demeure donc. Mais le prédicteur adaptatif est stabilisé sous les effets contraires de la fréquence d'entrée et de la fréquence (non linéaire) du pôle instable.

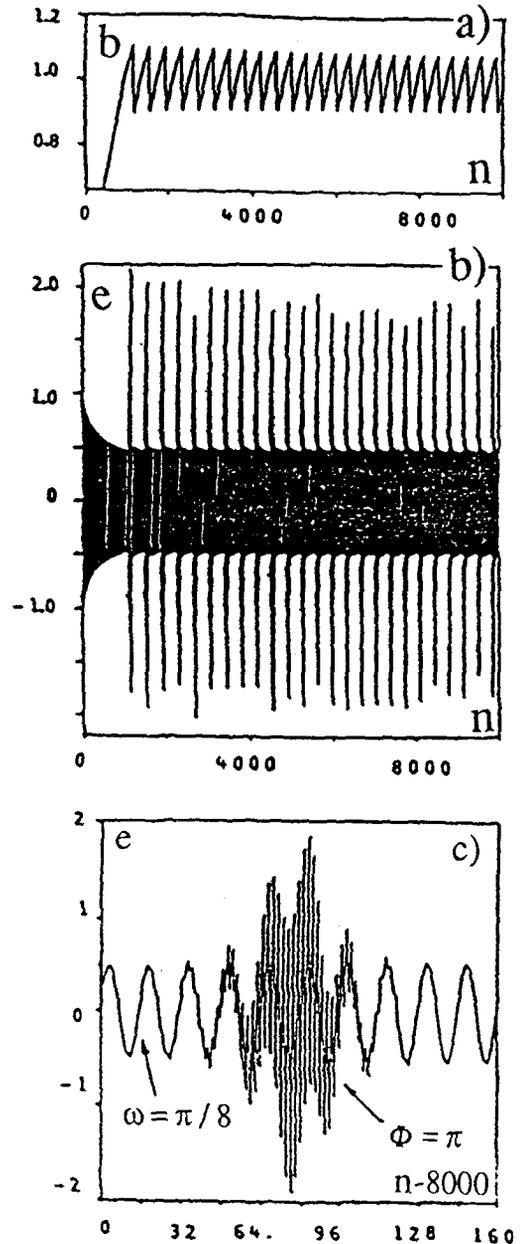


Fig. III.6. — Autostabilisation pour un MA (1) avec l'algorithme (C) ($\omega = \pi/8$).

III. 5. CAS DE PRÉDICTEUR ARMA

Considérons maintenant l'influence sur le prédicteur d'une partie AR, elle aussi adaptative. Tant que le prédicteur reste stable ($e = e^L$) et pour β petit, erreurs *a priori* et *a posteriori* sont très voisines, de sorte que les algorithmes (C) et (N) ont pour incrément de A_n en une itération

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta a_l(n) = \beta e_n s_{n-l}, \\ l = 1, \dots, p \quad \text{pour (C)} \\ \Delta a_l(n) = \beta e_n^p s_{n-l}, \\ l = 1, \dots, p \quad \text{pour (N)}. \end{array} \right.$$

Grâce à l'indépendance et à l'équirépartition des phases α_i de chaque composante de s_n , la moyenne de

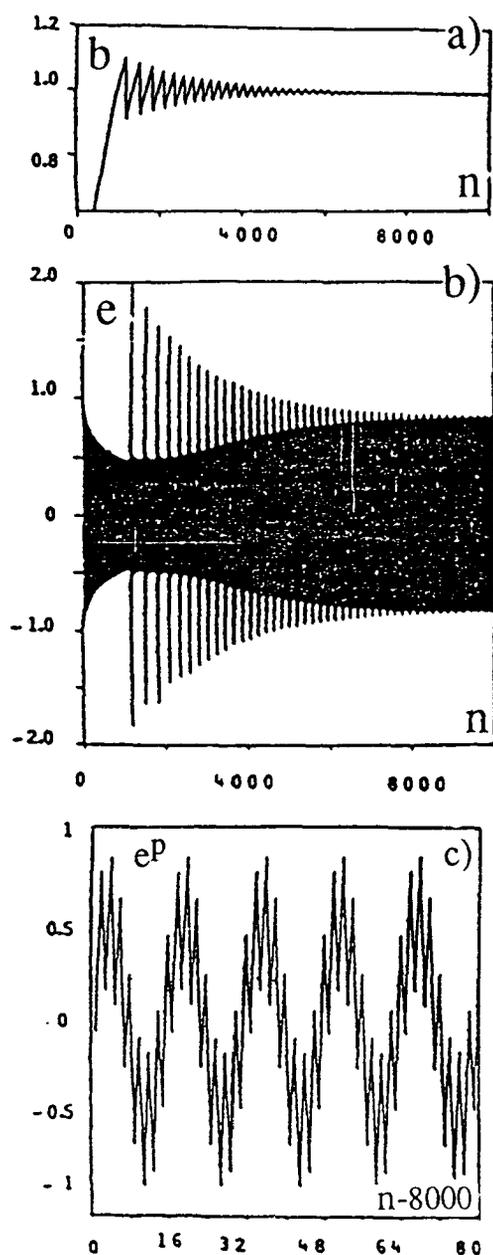


Fig. III. 7. — Amortissement de l'autostabilisation grâce à l'algorithme (N).

(3.21) découle de (3.1), (3.3) selon

$$(3.22) \quad E(\Delta a_l(n)) = \frac{\beta}{2} \sum_k c_k^2 \rho_k \cos(\omega_k l + \psi_k),$$

avec des ψ_k différents pour les deux algorithmes; on peut écrire ceci sous forme vectorielle en utilisant la matrice M_p [définie en (3.8)] et le vecteur

$$(3.23) \quad d = (c_1^2 \rho_1 e^{j\psi_1}, \dots, c_m^2 \rho_m e^{j\psi_m}, c_1^2 \rho_1 e^{-j\psi_1}, \dots, c_m^2 \rho_m e^{-j\psi_m})^T.$$

Il vient

$$(3.24) \quad E(\Delta a_n) = \frac{\beta}{4} M_p d.$$

Cette dernière équation montre que le rang de la matrice M_p va jouer un rôle important, ce qui nous amène à distinguer deux cas.

Premier cas: $p \geq 2m$: La partie AR a au moins deux fois plus de coefficients qu'il y a de raies à l'entrée. Alors M_p est de rang $2m$. Ceci signifie que le point limite \tilde{A} de A_n , qui doit nécessairement vérifier — s'il existe —

$$(3.25) \quad E(\Delta A_n) = 0,$$

ce point doit aussi vérifier $d=0$. D'après (3.23) ceci équivaut à

$$(3.26) \quad \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0.$$

Ainsi le prédicteur limite $\tilde{H}(z)$ a son numérateur nul pour les m fréquences à prédire. Il découle de (3.26) que le vecteur (3.9) est lui-même nul: la partie MA du prédicteur ne présente donc plus de dérive déstabilisante lorsque la partie AR s'est immobilisée dans une position optimale. Aux fluctuations près (dues au fait que $\beta \neq 0$), la partie MA s'immobilise aussi, dans une position quelconque, pourvu qu'elle soit stable. En résumé pour p assez grand, la partie AR supprime les autostabilisations de la partie MA.

Pour $p=2m$, ceci détermine complètement \tilde{A} car le polynôme $1 - \tilde{A}_{2m}(z^{-1})$, de degré $2m$, doit avoir ses $2m$ zéros situés sur les fréquences angulaires $\pm \omega_k$, $k=1, \dots, m$, de l'entrée. C'est là la configuration optimale bien connue qui permet de prédire exactement m sinusoïdes avec un prédicteur AR ($2m$). On voit que les algorithmes adaptatifs (C) ou (N), qui recherchent itérativement la solution de (3.25) vont converger vers cette configuration pour la partie AR du prédicteur.

Pour $p > 2m$, il y a une infinité de points \tilde{A} vérifiant (3.26). Les polynômes AR correspondants $1 - \tilde{A}(z^{-1})$ sont tous multiples de $1 - \tilde{A}_{2m}(z^{-1})$. Parmi les p zéros de la partie AR du prédicteur, $2m$ zéros vont se placer sur les angles $\pm \omega_k$; les $p-2m$ zéros libres et les pôles du prédicteur vont évoluer de manière couplée parce que ΔA_n et ΔB_n sont reliés par e_n qui intervient dans les deux incréments. Zéros libres et pôles se positionnent donc pour minimiser $E(e^2)$.

Le cas $p \geq 2m$ n'est pas le plus intéressant pour cet article, car il ne pose pas de problème théorique de stabilité. D'autre part l'application introduite au paragraphe II.3 ne satisfait pas cette condition puisque les instances normalisatrices [9] ont choisi $p=2$, tandis que la parole comporte évidemment bien plus d'une simple raie. Dans la suite nous supposons donc $p < 2m$.

Deuxième cas: $p < 2m$: Dans ce cas la partie MA du prédicteur reçoit un signal formé de raies, la partie AR antérieure n'ayant pu annuler toutes les composantes de s_n à l'entrée de la partie MA. Nous nous trouvons donc pratiquement ramenés au problème d'un prédicteur adaptatif MA pur recevant une somme de raies, ainsi qu'il a été décrit dans le paragraphe III.1 à III.4.

IV. Comportement des prédicteurs pour la parole

IV. 1. PRÉAMBULE

La connaissance des propriétés des prédicteurs ARMA adaptatifs et leur comportement en présence de signaux à bandes étroites stationnaires, permet d'induire leur comportement dans le cas non stationnaire.

Les résultats précédents ont montré la dépendance entre la configuration pôles-zéros du prédicteur et les fréquences présentes à son entrée. Pour un prédicteur ARMA (p, q) d'ordre donné, cette configuration dépend aussi du nombre m et des positions fréquentielles ω_k des composantes sinusoïdales présentes à l'entrée.

Pour un signal non stationnaire, tel que la parole, ces derniers éléments vont varier au cours du temps n , ce qui entraîne des variations de la configuration pôles-zéros du prédicteur optimal. L'algorithme adaptatif, en tentant de poursuivre cette configuration optimale modifiera avec n les valeurs de la dérive déstabilisante (3.10), dont la direction va fluctuer avec n . Si β est assez petit il se peut donc que la dérive $E(\Delta B_n)$ n'entraîne pas les paramètres MA hors du domaine de stabilité. Nous observerons effectivement cette situation dans la suite. On comprend en effet que les algorithmes (C) et (N), qui ont été conçus pour des signaux stationnaires, possèdent des performances de prédiction limitées pour des signaux non stationnaires. C'est cette limitation en qualité qui limite aussi le phénomène d'autostabilisation. Il y a là sous-jacent le problème du choix du β optimal qui doit dépendre de la vitesse des non stationnarités. Dans le cadre de cet article le problème est trop vaste pour être traité

théoriquement. Nous allons plutôt présenter maintenant une étude faite par simulations sur un signal de parole.

Phrases utilisées: Les signaux de parole ont pour caractéristique d'être à la fois non stationnaires et, assimilables, souvent, à la somme de signaux à bande étroite.

Comme nous l'avons dit, l'une des non-stationnarités essentielles du signal de parole est constituée par les sauts de puissance locale.

Les simulations ont été faites avec deux phrases de même puissance moyenne, acquises sur un intervalle d'environ 10 000 itérations (1,25 s à la fréquence $f_e = 8$ kHz). L'une est naturelle, l'autre est synthétisée à l'aide du modèle de Grenier [11]. Les deux phrases sont illustrées sur les figures IV. 1 a et 1 b et expriment oralement « bien sûr je connais son nom ».

La phrase naturelle est dite par un locuteur masculin; la phrase synthétique simule un tel locuteur. Cette dernière permet de mieux interpréter la phrase naturelle car ses non-stationnarités sont connues: elle est composée de 7 segments de longueurs différentes, dont chacun est la sortie d'un modèle AR (12) variable au cours du temps selon un schéma propre à ce segment. Les 7 segments sont bien visibles sur la figure IV. 1 b.

Pour les simulations on a choisi (comme pour le codage numérique normalisé dans [9]) un prédicteur ARMA (2, 6) ainsi qu'un AR (2) et un MA (6) comme points de référence.

IV. 2. ALGORITHME LMS RÉCURSIF (C)

L'étude de l'influence du pas d'adaptation β a été limitée à deux valeurs de β , pour des raisons de coût de calcul.

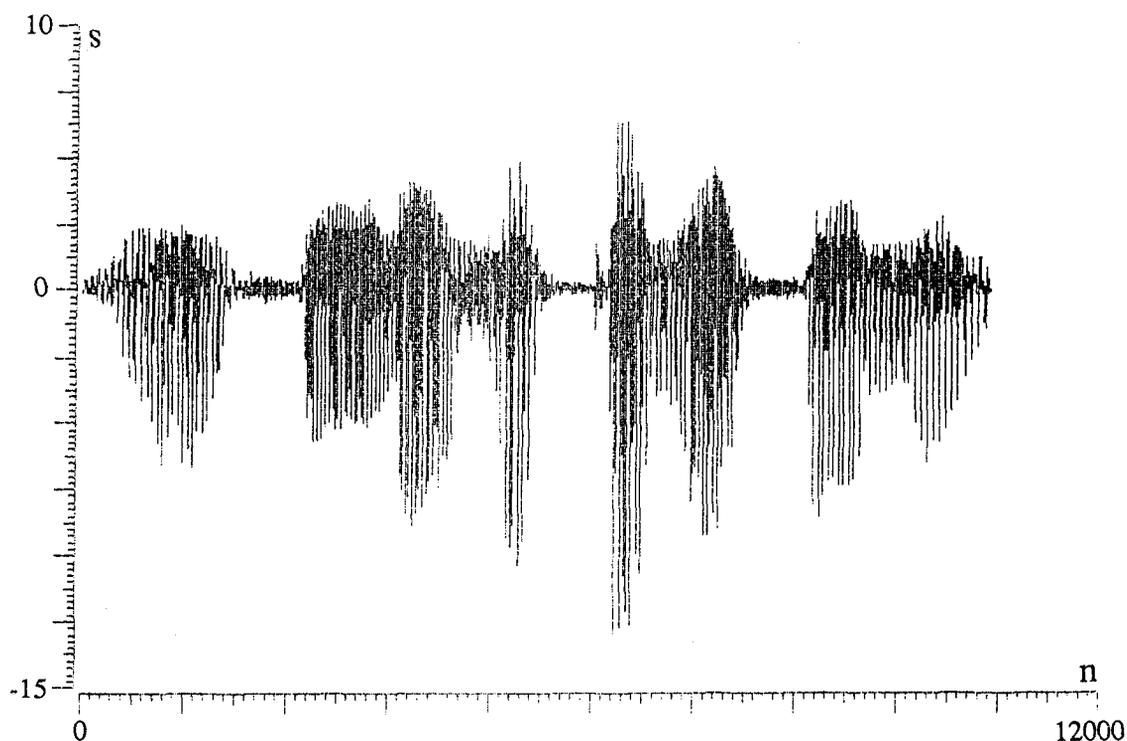


Fig. IV. 1 a. — Phrase naturelle.

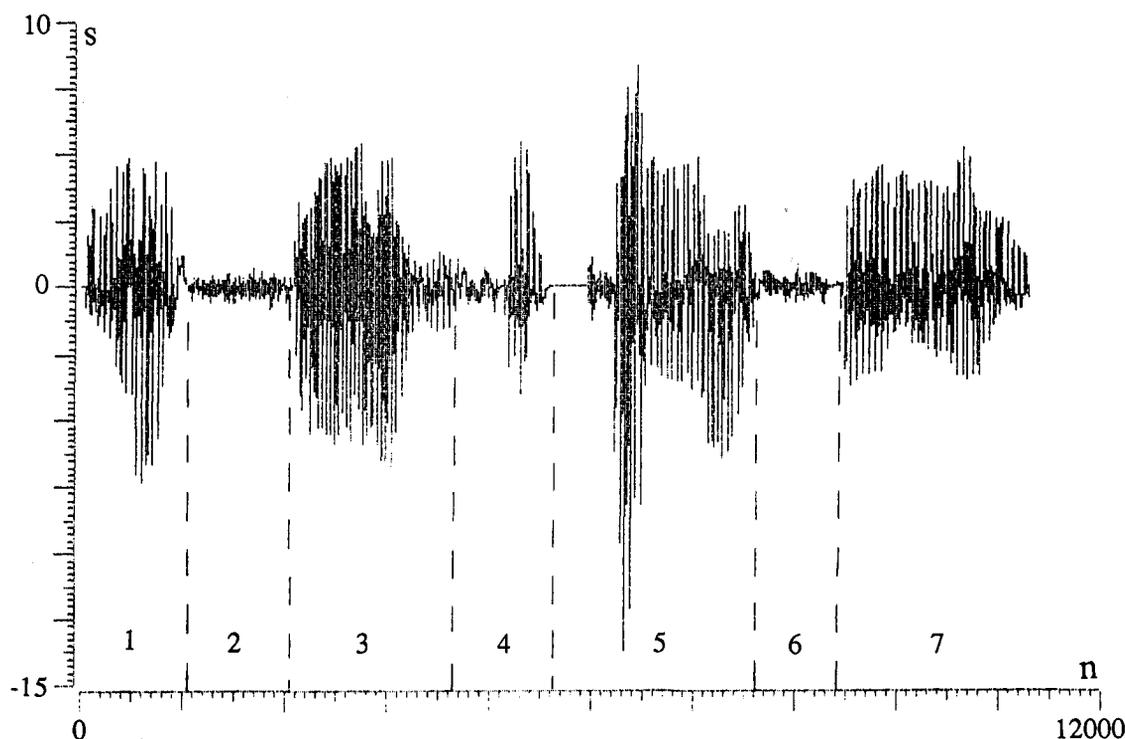


Fig. IV. 1 b. - Phrase synthétique.

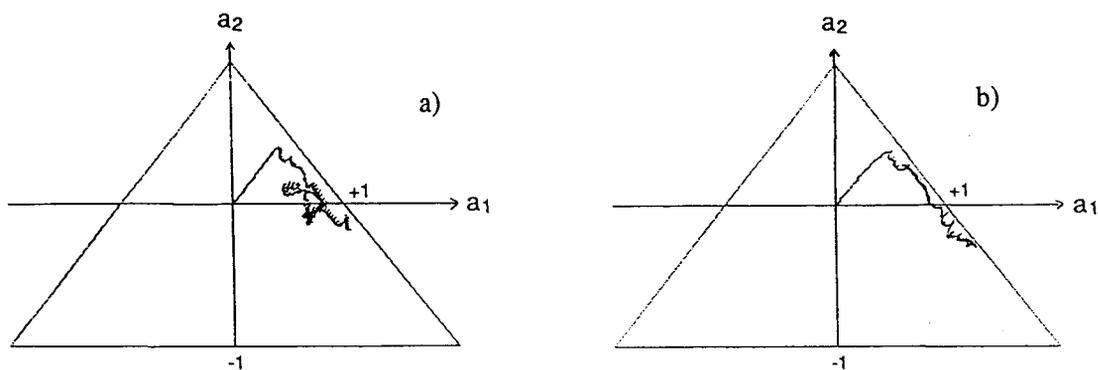


Fig. IV. 2. - Paramètres d'un prédicteur AR (2) adaptatif avec (C) et $\beta = 10^{-3}$. (a) Parole naturelle. (b) Parole synthétique.

IV. 2. 1 Cas de $\beta = 10^{-3}$

On considère successivement la stabilité du décodeur et du codeur.

La stabilité du décodeur est caractérisée par la position des paramètres AR (2) par rapport au triangle de stabilité. Ceci est illustré par les figures IV. 2 a et 2 b pour un prédicteur adaptatif transverse AR (2). On constate que ses paramètres restent strictement à l'intérieur du triangle de stabilité. Il n'y a pas d'instabilité locale pour la parole naturelle. Pour la parole synthétique certaines périodes sont très voisines de la frontière (tout en demeurant stables). Mais les variations de A_n au cours du temps ont un écart-type plus faible que pour la parole naturelle, ce qui peut s'expliquer sans doute par le fait que la parole synthétique correspond à un modèle réducteur du phénomène naturel et ne rend pas toute la finesse des variations de la parole naturelle.

La stabilité du codeur est visualisée par l'évolution des zéros associés au polynôme MA (pôles) par rap-

port au cercle unité. Ceci est illustré par les figures IV. 3 a et 3 b pour un prédicteur MA (6), et par les figures IV. 4 a et 4 b pour un prédicteur ARMA (2, 6). Ces figures représentent la trajectoire des pôles pour toute la durée de la phrase. Nous pouvons faire les remarques suivantes pour les deux types de parole :

1. En première approximation, la configuration géométrique des pôles est orientée comme pour un signal d'entrée de fréquence nulle. C'est que le spectre moyen de la parole est maximal pour $f=0$.
2. Les pôles des prédicteurs MA (6) et ARMA (2, 6) restent à distance finie du cercle unité. La stabilité BIBO et l'absence d'instabilités locales sont donc assurées pour le codeur. Elle est meilleure pour l'ARMA (2, 6) (distance au cercle supérieure) que pour le MA (6). En se rappelant la suprématie de la fréquence nulle, ceci s'explique par le fait que pour $p \geq 2m$, la partie MA ne présente plus de dérive déstabilisante (voir § III. 5 ci-dessus).

En conclusion, avec l'algorithme d'adaptation (C), le pas d'incrément $\beta = 10^{-3}$ est bien adapté à tous

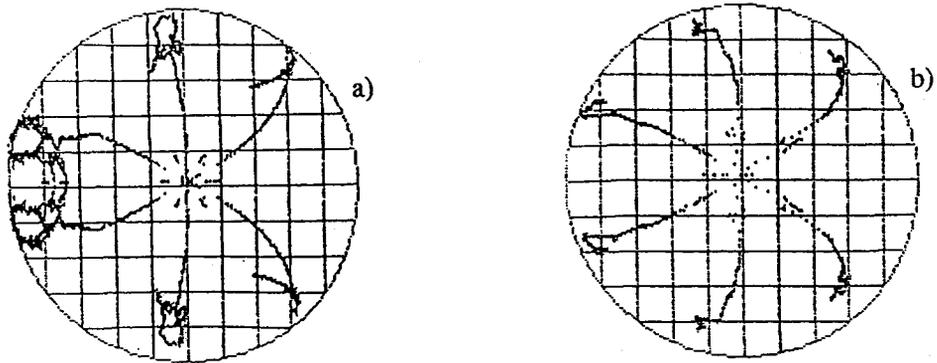


Fig. IV.3. - Pôles d'un prédicteur MA (6) adaptatif avec (C) et $\beta=10^{-3}$. (a) Parole naturelle. (b) Parole synthétique.

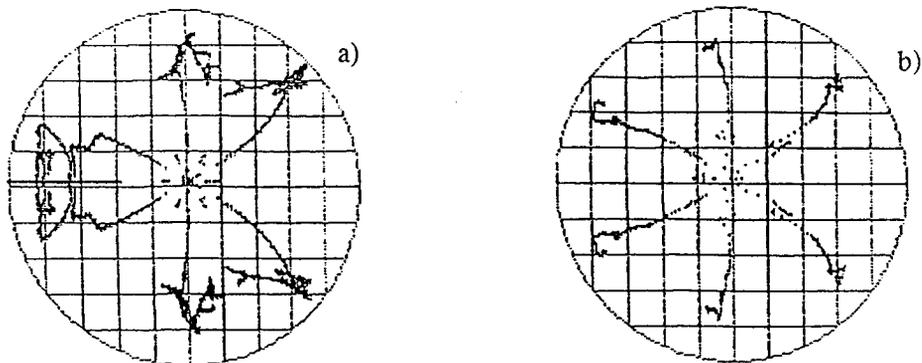


Fig. IV.4. - Pôles d'un prédicteur ARMA (2,6) adaptatif avec (C) et $\beta=10^{-3}$. (a) Parole naturelle. (b) Parole synthétique.

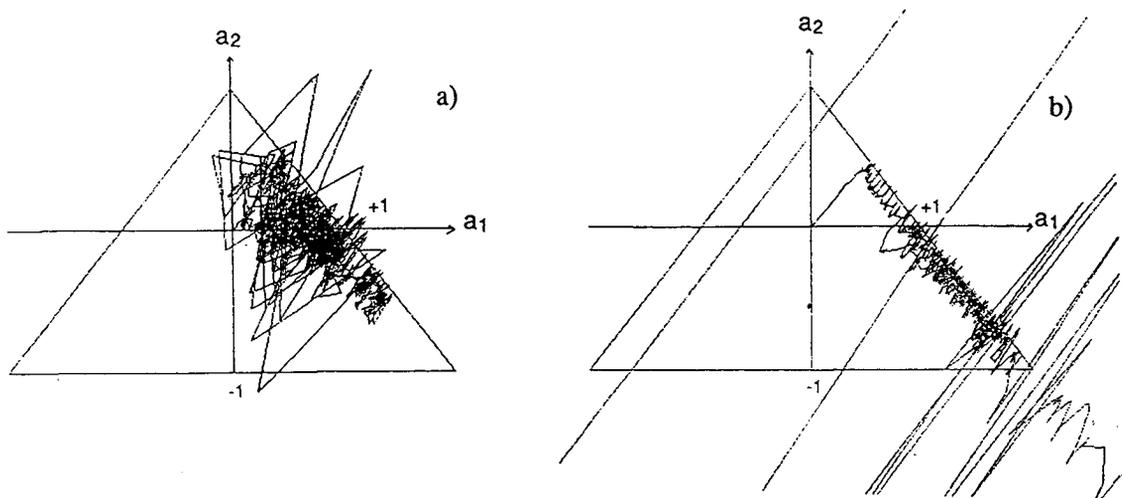


Fig. IV.5. - Paramètre d'un prédicteur AR (2) adaptatif avec (C) et $\beta=10^{-2}$. (a) Parole naturelle. (b) Parole synthétique.

les segments de phrase naturelle et synthétique pour les prédicteurs AR (2), MA (6) et ARMA (2, 6), lesquels assurent la stabilité BIBO et l'absence d'instabilités locales au codeur et au décodeur.

IV.2.2. Cas de $\beta=10^{-2}$

On pense pouvoir mieux suivre les non-stationnarités de la parole en augmentant β . Mais nous allons voir apparaître des instabilités tant au décodeur qu'au codeur.

Des instabilités locales ont lieu au décodeur, comme le montre l'évolution des paramètres d'un prédicteur

transverse AR (2) par rapport au triangle de stabilité, illustrée sur les figures IV. 5 a et 5 b. On constate que des sorties du triangle ont lieu pour quelques valeurs de n voisines de 6400 et sont plus violentes pour la parole synthétique que pour la parole naturelle [un point qui n'est pas étonnant vu les résultats obtenus avec l'AR (2) pour $\beta=10^{-3}$]. Dans le cas synthétique l'erreur de prédiction est multipliée par 100 dans ces zones dangereuses pour la stabilité (voir fig. IV. 6). La figure IV. 7 agrandit la zone temporelle instable dans le tracé du signal s_n . On y voit très nettement que le problème provient d'un saut de puissance dans

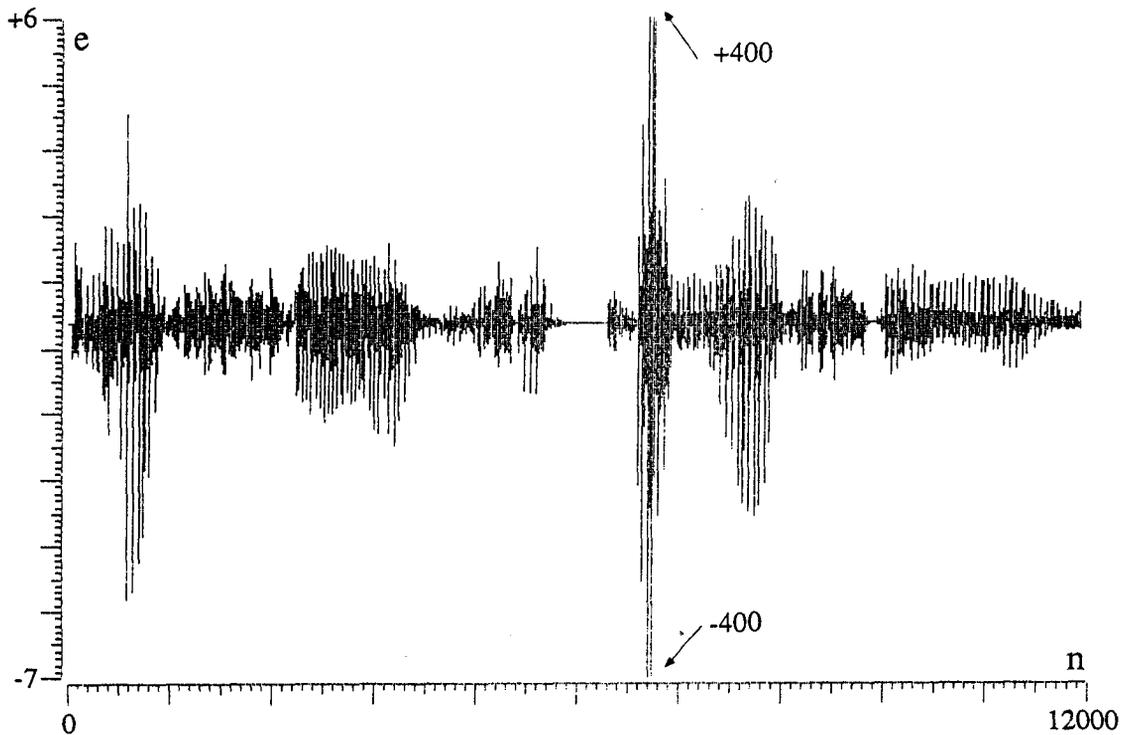


Fig. IV. 6. — Erreur de prédiction d'un AR (2) adaptatif transverse avec (C) et $\beta = 10^{-2}$.

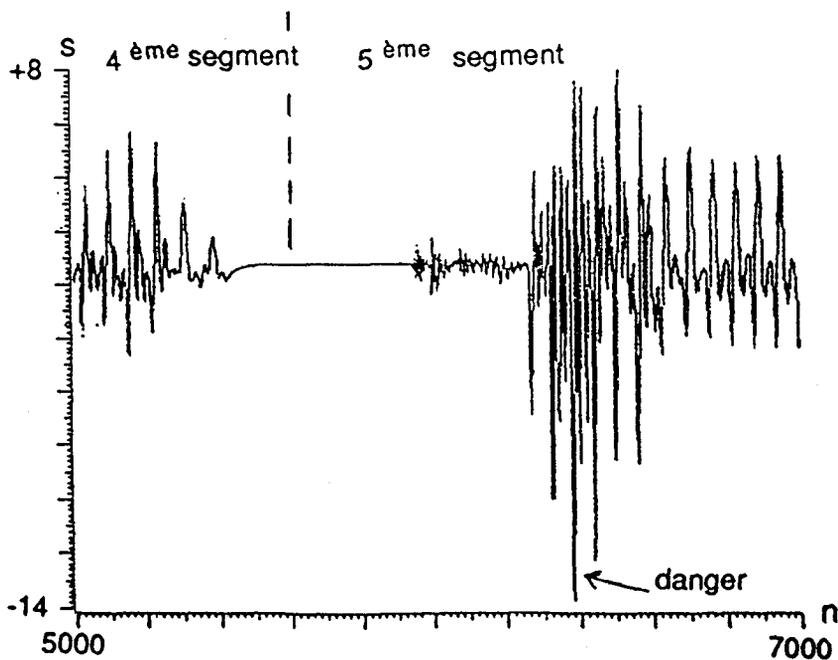


Fig. IV. 7. — Signal de parole synthétique aux alentours de la région instable.

le sens d'une augmentation. En effet il a été mentionné en II. 2. 1 qu'un filtre adaptatif transverse est instable lorsque β dépasse un seuil β_0 proportionnel à l'inverse de la puissance d'entrée. Dans la zone ici observée, β est devenue supérieure à β_0 à cause de l'augmentation de puissance de s . Malgré les très grandes valeurs atteintes, il n'y a pas d'explosion. En effet la puissance de l'entrée revient ensuite à un niveau plus faible, adapté au β . Le filtre qui est transverse finit par s'amortir.

Considérons maintenant un prédicteur *récuratif* ARMA (2, 6) et l'évolution de ses paramètres AR (transverses) par rapport au triangle de stabilité comme illustré sur les figures IV. 8a et 8b. On constate que des sorties du triangle ont lieu et qu'elles sont rapidement suivies par une explosion des paramètres AR. Comme nous le verrons ci-dessous, ceci est un effet induit par la partie récurative du prédicteur adaptatif qui a elle-même des instabilités locales. Or parties transverse et récurative sont couplées par la

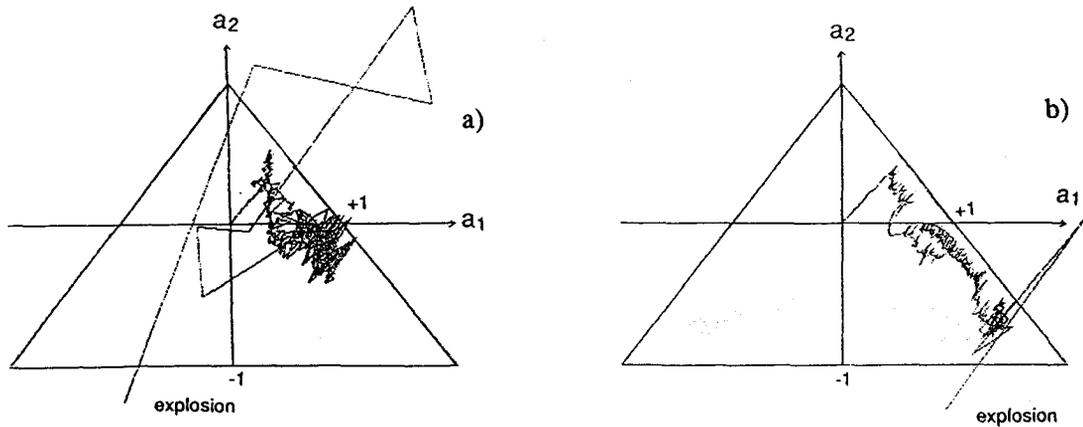


Fig. IV.8. - Paramètres transverses d'un ARMA (2,6) adaptatif avec (C) et $\beta=10^{-2}$. (a) Parole naturelle. (b) Parole synthétique.

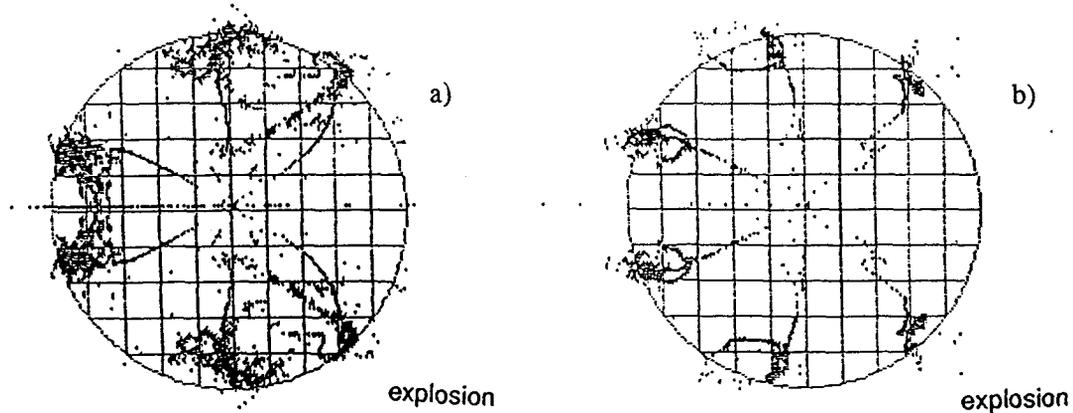


Fig. IV.9. - Pôles d'un MA (6) adaptatif avec (C) et $\beta=10^{-2}$. (a) Parole naturelle. (b) Parole synthétique.

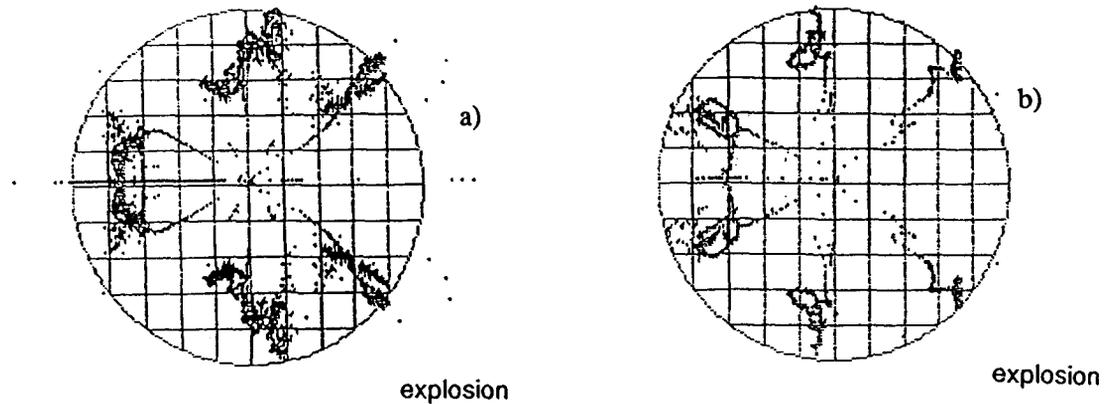


Fig. IV.10. - Pôles d'un ARMA (2, 6) adaptatif avec (C) et $\beta=10^{-2}$. (a) Parole naturelle. (b) Parole Synthétique.

présence de e_n dans l'incrément de A_n et de B_n . De ce fait l'augmentation de $|A_n|$ se trouve accrue par rapport au cas transverse, ce qui amène l'explosion observée.

La stabilité au codeur n'est pas non plus obtenue, comme en témoignent les figures IV.9a et 9b pour un prédicteur récursif MA (6) et IV.10a et 10b pour un prédicteur récursif ARMA (2, 6). Dans les deux cas, pour la parole naturelle ou synthétique, on observe d'abord au cours du temps quelques autostabilisations — d'ailleurs moins prononcées dans le cas ARMA (2, 6) que dans le cas MA (6). (Ce point a déjà été expliqué.) Mais pour une valeur n plus ou

moins tardive une explosion se produit toujours. Là encore il s'agit d'une désadaptation de β au moment d'un saut (augmentation) de puissance de l'entrée. Au début du 3^e segment ($n \cong 4000$) β s'est trouvé trop grand. Ce défaut, qui n'est que transitoire (puisque la puissance de s_n va diminuer sur un segment ultérieur) avait fait croître beaucoup e_n dans le cas du prédicteur transverse, mais sans explosion. Ici au contraire, la croissance s'achève par une explosion irrécupérable à cause du caractère récursif du prédicteur. C'est pour la même raison que l'instabilité se produit plus vite ici qu'avec le prédicteur transverse.

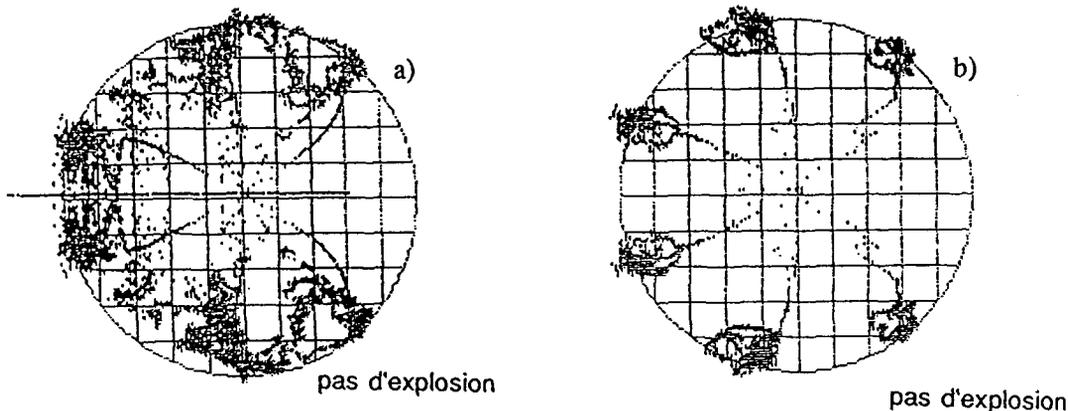


Fig. IV.11. — Pôles d'un MA (6) adaptatif avec (N) et $\beta=10^{-2}$.
(a) Parole naturelle. (b) Parole synthétique.

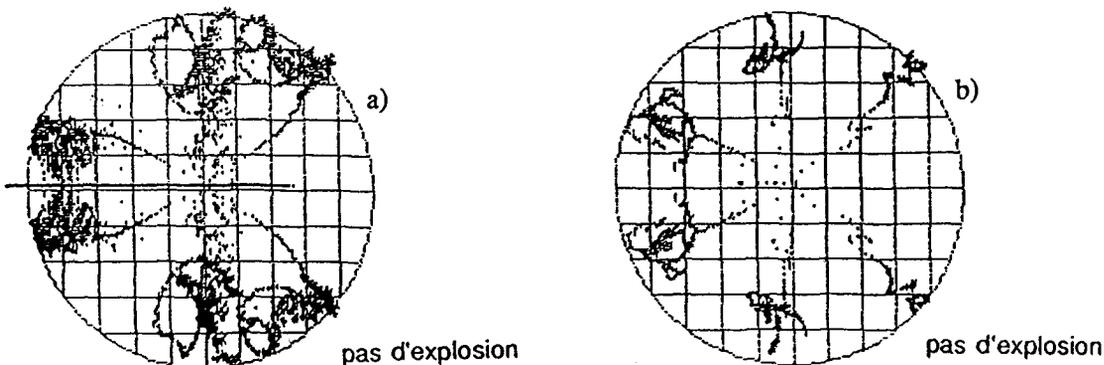


Fig. IV.12. — Pôles d'un ARMA (2, 6) adaptatif avec (N) et $\beta=10^{-2}$. (a) Parole naturelle. (b) Parole synthétique.

En conclusion les instabilités observées avec l'algorithme (C) ne sont pas fondamentalement dues aux caractères récurrents du prédicteur, mais sont amplifiées par lui. Ces instabilités sont dues au caractère non stationnaire du signal d'entrée qui fait qu'à certaines périodes (celles des signaux puissants) la valeur du pas d'incrément β de l'algorithme est trop élevée. C'est précisément à ce problème que l'algorithme (N) avec erreur *a posteriori* apporte un remède par la normalisation implicite de β qu'il contient.

IV.3. ALGORITHME AVEC ERREUR *a posteriori*

Pour bien voir l'intérêt de cet algorithme nous conserverons la valeur élevée $\beta=10^{-2}$. Les figures IV.11 a et 11 b et IV.12 a et 12 b donnent le comportement des pôles (*stabilité du codeur*) pour un prédicteur MA (6) et ARMA (2, 6) respectivement, lorsque l'algorithme d'adaptation est (N). On constate :

- que les explosions de l'algorithme (C) sont supprimées, grâce à la normalisation implicite du pas d'adaptation contenue dans l'algorithme (N). Celle-ci rend (N) insensible aux changements de puissance des signaux, tels qu'ils se produisent dans les signaux de parole;
- que le phénomène d'autostabilisation demeure, mais qu'il est amorti,
- que la partie AR (2) est très utile car elle supprime pratiquement toutes les autostabilisations de la partie

MA (6) qui lui est couplée. Ce phénomène a déjà été expliqué théoriquement (*cf.* § III. 5).

En résumé, la stabilité BIBO d'un prédicteur récurrent adaptatif gouverné par l'erreur *a posteriori* s'étend encore aux entrées non stationnaires comme la parole.

V. Conclusion

Dans cet article on a présenté et étudié le phénomène d'autostabilisation qui apparaît pour un prédicteur ARMA (récurrent) adapté avec l'algorithme LMS récurrent ou avec l'algorithme de l'erreur *a posteriori*, lorsque le modèle du signal d'entrée n'est pas SPR. C'est le cas pour un signal stationnaire ayant des composantes sinusoïdales pour lequel le prédicteur optimal a tous ses pôles sur le cercle unité. L'autostabilisation se produit toujours pour ces signaux, si petite soit la valeur du pas d'incrément β . Néanmoins, au prix d'une complexité de calcul un peu supérieure, l'algorithme avec erreur *a posteriori* atteint de meilleurs résultats au niveau de la stabilité car les autostabilisations sont amorties.

Cette étude a permis d'induire le comportement de ces mêmes algorithmes en présence de signaux non stationnaires, comportant localement des composantes sinusoïdales. C'est le cas des signaux de parole. En présence de parole naturelle ou synthétique, on

constate d'une part que les non-stationnarités limitent l'autostabilisation dans le sens de moins d'instabilités locales : c'est seulement lorsque β est fort qu'apparaît l'autostabilisation. C'est là une différence majeure avec le cas des signaux stationnaires. On constate d'autre part que le calibrage de β est critique à cause des variations de puissance au cours du temps — par exemple les sauts d'un segment de parole au suivant. Fort heureusement la normalisation implicite de β réalisée par l'erreur *a posteriori* effectuée automatiquement ce régle. Ceci assure une stabilité BIBO à l'algorithme correspondant.

Cette étude montre la nécessité d'étendre l'analyse de stabilité des filtres récurrents adaptatifs au cas où les signaux d'entrée sont non stationnaires, ainsi que l'avantage qu'il y a, lorsque la complexité de calcul le permet, à utiliser un algorithme avec erreur *a posteriori*.

Manuscrit reçu le 12 septembre 1988.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. LJUNG et T. SODERSTROM, *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge, Mass., London, 1983.
- [2] J. M. TRAVASSOS-ROMANO et M. BELLANGER, Pôles et zéros des prédictors numériques, *Traitement du Signal*, 3, n° 2, 1986, p. 67-77.
- [3] O. MACCHI et M. JAIDANE, Stability of an adaptive ARMA predictor in presence of narrow band signals, *2nd IFAC Workshop on ACSP*, Lund, July 1986, p. 417-422.
- [4] B. WIDROW et S. D. STEARNS, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, 1985.
- [5] M. JAIDANE, O. MACCHI et N. K. M'SIRDI, Autostabilisation des prédictors ARMA adaptatifs à entrée sinusoïdale contrôlés par l'erreur *a priori* et *a posteriori*, *11^e Colloque GRETSI*, Nice, 1-5 juin 1987, p. 297-300.
- [6] O. MACCHI, Advances in adaptive filtering, in *Digital Communications*, E. BIGLIERI, G. PRATI, éd., North-Holland, 1986, p. 41-57.
- [7] C. DONCARLI et P. DE LARMINAT, Analyse de la stabilité globale d'un algorithme d'identification récurrente des systèmes linéaires stochastiques discrets, *RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control*, v. 12, n° 3, 1978, p. 269-276.
- [8] M. BONNET, Codage numérique des signaux par quantification et prédiction adaptatives couplées, *Thèse d'État*, Université de Paris-Sud, janvier 1988, (chap. 3, p. 81).
- [9] CCITT Red Book; *Digital Networks, Transmission Systems and Multiplexing Equipment*, Genève, 1985, Recommendation G 721.
- [10] M. JAIDANE-SAIDANE, Stabilité des prédictors récurrents adaptatifs: application à la numérisation des signaux téléphoniques, *Thèse d'État*, Université Paris-Sud, juillet 1987.
- [11] Y. GRENIER et P. CHEVALIER, *Signaux test de GRECO SARTA*, GT6, 1987.
- [12] V. SOLO, The convergence of AML, *IEEE-Tac*, AC-24, n° 6, décembre 1979, p. 958-962.
- [13] I. D. LANDAU, A feedback system approach to adaptive filtering, *IEEE Trans. Inf. Theory*, V. IT 30, Mars 1984, p. 251-262.
- [14] M. JAIDANE-SAIDANE et O. MACCHI, Quasi periodic self-stabilization of adaptive ARMA predictors, *Int. J. Adaptive Contr. and Signal Proc.*, v. 2, 1988, p. 1-31.
- [15] N. K. M'SIRDI, Modélisation paramétrique adaptative et application à l'analyse spectrale, *Thèse d'État*, USM Grenoble, septembre 1988.