

Décomposition en sous-bandes : une nouvelle approche analytique

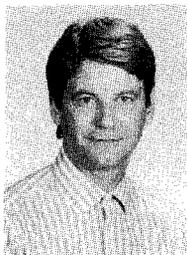
SUBBAND DECOMPOSITION: A NEW ANALYTICAL APPROACH



Bruno PAILLARD

Département de Génie Électrique, Université de Sherbrooke, SHERBROOKE, QUÉBEC, CANADA, J1K 2R1.

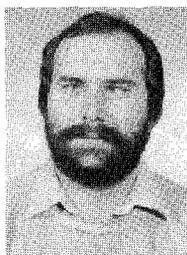
Date de naissance : 16 octobre 1962. 1985 : ingénieur en Génie Électrique, INSA de Lyon, Villeurbanne, France. 1985-1987 : maîtrise es sciences appliquées, CRCS, Génie Électrique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, J1K 2R1, Canada. 1988 : inscrit en doctorat au CRCS, Université de Sherbrooke. Domaine d'intérêt : traitement numérique et codage des signaux de parole et de musique..



Joëi SOUMAGNE

CRCS, Centre de Recherches sur les Communications de l'Université de Sherbrooke, SHERBROOKE, QUÉBEC, CANADA, J1K 2R1.

Licencié es sciences, Université de Lyon (1967). Ingénieur « Supelec » (1969). Maître es science appliquées, Université de Laval, Québec (1973). Docteur ingénieur : traitement du signal numérique : application au codage des signaux audibles (parole, musique de haute qualité).



Philippe MABILLEAU

Département de Génie Électrique, Faculté des science appliquées, Université de Sherbrooke, SHERBROOKE, QUÉBEC, CANADA, J1K 2R1.

Ingénieur ENSEEIH, Toulouse (1977). Ph. D., Université de Sherbrooke, (1983). Domaines d'intérêt : codage numérique de la parole et du signal audio. Mise en œuvre d'algorithmes de traitement du signal sur processeurs spécialisés. Conception d'applications temps réel et distribuées.



Sarto MORISSETTE

Département de Génie Électrique, Faculté des science appliquées, Université de Sherbrooke, SHERBROOKE, QUÉBEC, CANADA, J1K 2R1.

Ingénieur, McGill, Montréal (1962). M. Sc., IIT, Chicago (1966). Professeur titulaire et directeur du centre de recherches sur lmes Communications de l'Université de Sherbrooke. Domaines d'intérêt : traitement numérique du signal appliqué à la parole et la radiophonie.

RÉSUMÉ

Cet article propose une description vectorielle des systèmes de décomposition-reconstruction pour le codage en sous-bandes ainsi qu'un formalisme vectoriel pour l'étude de ces systèmes.

Cette description débouche sur l'énoncé de conditions pour une reconstruction exacte; de plus elle permet de trouver facilement quelques propriétés fondamentales des systèmes à reconstruction exacte, et de généraliser le problème en faisant le lien avec les transformations orthogonales classiques (Fourier, cosinus, ...).

Pour terminer, on étudie les solutions de Galand [1], puis de Smith et Barnwell [8] à la lumière de cette description.

MOTS CLÉS

Codage en sous-bandes, décomposition orthogonale, analyse temps-fréquence, codage de parole, banc de filtres.

SUMMARY

This paper introduces a vectorial description of the subband "decomposition-reconstruction" systems, as well as a vectorial formalism for their analysis.

This description leads to the statement of a set of conditions for an exact reconstruction. Moreover, it facilitates the finding of some fundamental properties of the exact reconstruction systems. It also makes the connection between subband decomposition and the orthogonal transformations (Fourier, cosine, etc.), thus generalizing the problem.

At the end, the solutions of Galand [1] and of Smith and Barnwell [8] are studied in the light of this description.

KEY WORDS

Subband coding, orthogonal decomposition, time-frequency analysis, speech coding, filter banks.

1. Introduction

Lorsqu'elles sont apparues, les méthodes de décomposition en sous-bandes étaient considérées comme des procédés empiriques de traitement du signal, les systèmes de décomposition-reconstruction n'introduisant pas d'erreur n'existant pas. Leur principal avantage était (comme dans le cas du codage par transformée), de concentrer l'énergie du signal suivant certaines composantes fréquentielles. Le déséquilibre introduit dans la répartition d'énergie suivant les différentes composantes pouvant alors être mis sous la forme d'une réduction de la redondance du signal (ou plutôt d'une réduction du bruit de quantification à débit constant).

Historiquement, Esteban et Galand ont été les premiers à énoncer des conditions permettant d'obtenir une reconstruction exacte en 1977 [1]; basée sur la construction qu'ils proposaient, Johnston a effectué en 1980 [4] une optimisation des filtres, permettant d'avoir une très faible erreur de reconstruction.

Plus tard, en 1984, Smith et Barnwell [8] ont proposé une solution analytique plus générale pour la construction des filtres permettant cette fois une reconstruction rigoureusement exacte.

Nous étudions ces deux solutions à la fin de l'article.

Depuis 1987, des solutions encore plus générales sont étudiées, et un gros effort de recherche est consacré à l'établissement d'une théorie de la décomposition en sous-bandes (et plus généralement des méthodes d'analyse temps-fréquence). On peut citer par exemple les travaux de Vetterli [9], de Smith et Barnwell [10], de Vaidyanathan [13], ou de Wackersreuther [14].

Les remarques qui constituent cet article s'inscrivent dans ce cadre. Elles visent plus particulièrement à montrer que la *décomposition* en sous-bandes, loin d'être un *procédé empirique*, est un outil très cohérent en traitement du signal, et que les transformées orthogonales classiques (transformée de Fourier discrète, transformée en cosinus discrète, ...) en sont des cas particuliers, pas nécessairement les plus intéressants.

On y définit aussi un formalisme matriciel pour l'étude des systèmes de décomposition-reconstruction qui permet de clarifier un certain nombre de points, et de trouver quelques-unes de leurs propriétés fondamentales.

De plus, on verra que l'intérêt des outils développés pour la décomposition en sous-bandes dépasse large-

ment ce cadre, et que ceux-ci trouvent d'autres applications, notamment pour le transmultiplexage.

2. Description du système de décomposition-reconstruction

Dans tout ce qui suit, on étudie le cas particulier d'une décomposition en deux sous-bandes pour plus de simplicité, mais tout pourrait être étendu sans restriction à N sous-bandes, N étant n'importe quel entier, pas nécessairement une puissance de deux.

2.1. DESCRIPTION FONCTIONNELLE

Décomposition

Elle peut être décrite par les trois étapes suivantes représentées à la figure 1.

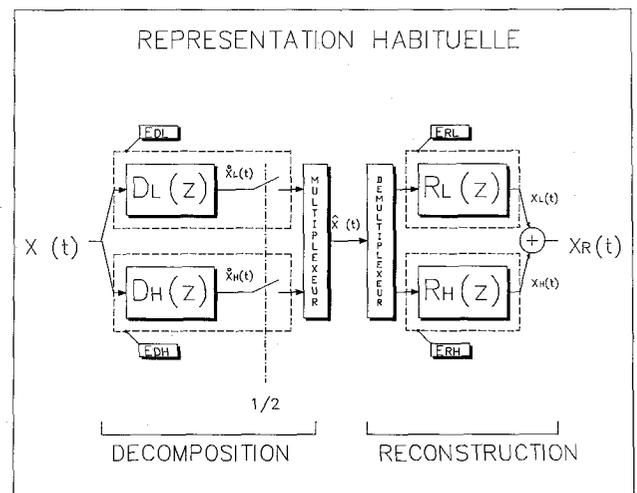


Fig. 1. — Représentation habituelle.

— Le signal d'entrée X est décomposé en deux sous-bandes \hat{X}_L et \hat{X}_H par les filtres D_L (passe-bas) et D_H (passe-haut).

A la sortie de chaque filtre, comme les signaux \hat{X}_L et \hat{X}_H ont une bande passante deux fois plus étroite que X, on peut les sous-échantillonner en ne gardant qu'un échantillon sur deux; on a donc pour représenter X autant d'échantillons par unité de temps dans

l'ensemble \hat{X}_L et \hat{X}_H (les signaux présents à l'entrée du multiplexeur) qu'en avait X lui-même.

— On peut donc multiplexer \hat{X}_L et \hat{X}_H pour donner \hat{X} , de même dimension que X .

Reconstruction

Elle est à son tour composée des trois séquences suivantes :

— Le signal \hat{X} est démultiplexé pour retrouver \hat{X}_L et \hat{X}_H .

— Les signaux \hat{X}_L et \hat{X}_H sont interpolés pour restituer tous les échantillons perdus lors du sous-échantillonnage. Cette interpolation se fait par filtrage de \hat{X}_L et \hat{X}_H par R_L et R_H .

— Enfin, la somme de X_L et X_H permet de retrouver le signal X_R que l'on espère aussi proche que possible de X .

2.2. BANDE PASSANTE DU SYSTÈME

On souhaite que $X_R(t) = X(t)$.

Le filtrage de X par D_L se fait par convolution de X avec la réponse impulsionnelle $D_L(t)$ du filtre D_L ; on verra plus loin comment cette convolution peut s'interpréter vectoriellement.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \hat{X}_L(z) &= X(z) \cdot D_L(z) \\ \hat{X}_H(z) &= X(z) \cdot D_H(z) \end{aligned}$$

Il est possible de traduire l'opération de sous-échantillonnage comme étant l'addition du signal $\hat{X}_L(t)$ [respectivement $\hat{X}_H(t)$] et du signal $\hat{X}_L(t)$ où on a changé le signe d'un échantillon sur deux :

Ce qui pour les transformées en z s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{X}_L(z) &= \frac{1}{2} [X(z) \cdot D_L(z) + X(-z) \cdot D_L(-z)] \\ \hat{X}_H(z) &= \frac{1}{2} [X(z) \cdot D_H(z) + X(-z) \cdot D_H(-z)] \end{aligned}$$

On a donc après filtrage de « reconstruction »

$$\begin{aligned} X_L(z) &= \frac{1}{2} R_L(z) \cdot [X(z) \cdot D_L(z) + X(-z) \cdot D_L(-z)] \\ X_H(z) &= \frac{1}{2} R_H(z) \cdot [X(z) \cdot D_H(z) + X(-z) \cdot D_H(-z)] \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} X_R(z) &= \frac{X(z)}{2} [R_L(z) \cdot D_L(z) + R_H(z) \cdot D_H(z)] \\ &\quad + \frac{X(-z)}{2} [R_L(z) \cdot D_L(-z) + R_H(z) \cdot D_H(-z)] \end{aligned}$$

On notera tout de suite que dans le cas général, bien que ce système soit parfaitement linéaire, il n'a pas de fonction de transfert $X_R(z)/X(z)$ [à cause du terme $X(-z)$].

Ceci est dû au sous-échantillonnage qui impose une référence temporelle au traitement et brise ainsi l'inva-

riance stricte du processus; un tel système est connu sous le nom de « linéaire et variant périodiquement ». A cause de cela, de même que pour les systèmes comprenant des modulateurs, il est difficile d'étudier la décomposition en sous-bandes à l'aide de la transformée en z (sauf dans des cas particuliers, comme les bancs de filtres de Galand). A cet égard, le formalisme matriciel présenté dans la suite est avantageux.

3. Approche vectorielle de la décomposition en sous-bandes

Il est possible pour chaque étape du processus $E_{D_L}, E_{D_H}, E_{R_L}$ et E_{R_H} , fig. 1), d'envisager une interprétation vectorielle.

3.1. POSITION DU PROBLÈME

Soit un espace vectoriel de signaux E , de dimension infinie, dans lequel on représente X , et dont la configuration symbolique est présentée à la figure 2.

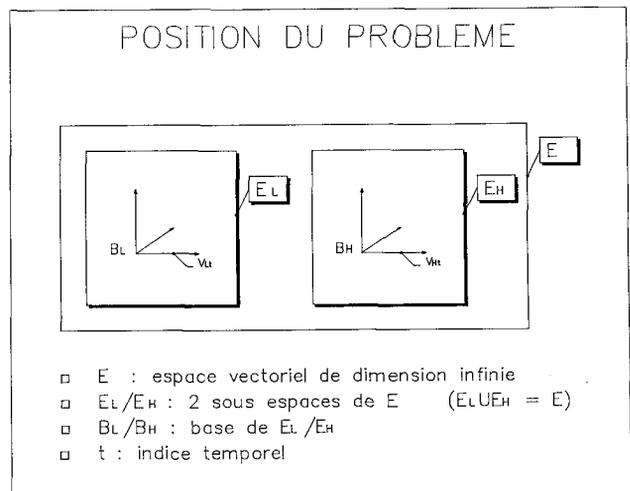


Fig. 2. — Position du problème.

— Dans cet espace, on définit deux sous-espaces E_L et E_H (dont l'union est E), qui représentent les basses fréquences et les hautes fréquences de X .

— Dans ces deux sous-espaces E_L et E_H , on considère deux bases de vecteurs (B_L et B_H).

— Tous les vecteurs de B_L ou B_H sont construits par décalages temporels de deux (N pour un banc de N filtres) échantillons des réponses impulsionnelles retournées temporellement de D_L et D_H .

— On appelle $V_{L,t}$ les vecteurs de B_L , on appelle $V_{H,t}$ les vecteurs de B_H .

Avec l'indice temporel « t » variant de $-\infty$ à $+\infty$.

— La base B_L est génératrice des composantes de basse fréquence de X .

— La base B_H est génératrice des composantes de haute fréquence de X .

3.2. DESCRIPTION DES ÉTAPES ASSOCIÉES AUX TECHNIQUES DE DÉCOMPOSITION-RECONSTRUCTION

La figure 3 représente l'étape E_{D_L} (filtrage de X par le filtre de décomposition passe-bas D_L et sous-échantillonnage). De la sorte, chaque échantillon sortant du filtre D_L et du décimateur, peut être interprété comme le résultat du produit scalaire (projection orthogonale) du vecteur d'entrée X avec un des vecteurs de B_L .

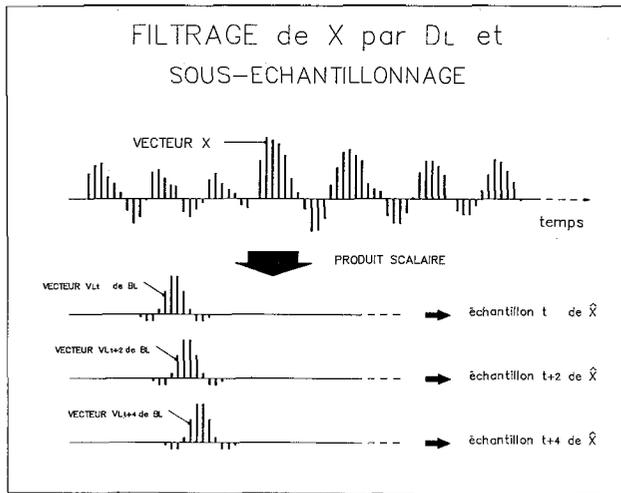


Fig. 3. — Filtrage de X par D_L et sous-échantillonnage.

Par construction de la base chaque vecteur de B_L est effectivement obtenu par décalage temporel de deux échantillons de la réponse impulsionnelle retournée de D_L .

Ainsi l'étape E_{D_L} est le calcul de toutes les projections orthogonales de X sur des axes représentés par les vecteurs de B_L (*idem* pour E_{D_H}).

Note : Bien que la figure 3 représente une décomposition à l'aide d'un filtre à réponse impulsionnelle symétrique, aucune restriction n'est faite à ce sujet dans la suite, et des filtres à phase non linéaire peuvent être envisagés aussi bien.

De la même façon, les étapes E_{R_L} et E_{R_H} représentent la reconstruction des deux projections de X (sur E_L et E_H) à partir des produits scalaires de X avec les vecteurs des bases B_L et B_H .

L'addition de ces deux projections devant, autant que possible, redonner X .

3.3. DESCRIPTION MATRICIELLE

La représentation matricielle de tout le processus de décomposition peut être analysée à partir de la figure 4. On y constate que les lignes de cette matrice sont formées d'une alternance de :

- un vecteur de B_L (identifié par le symbole \square);
- un vecteur de B_H (identifié par le symbole \circ).

La matrice de dimension infinie est construite par décalages de deux positions de ces blocs élémentaires de deux lignes.

Pour trouver les échantillons de \hat{X} , on effectue le produit scalaire de X avec chacune des lignes de la matrice, séquentiellement.

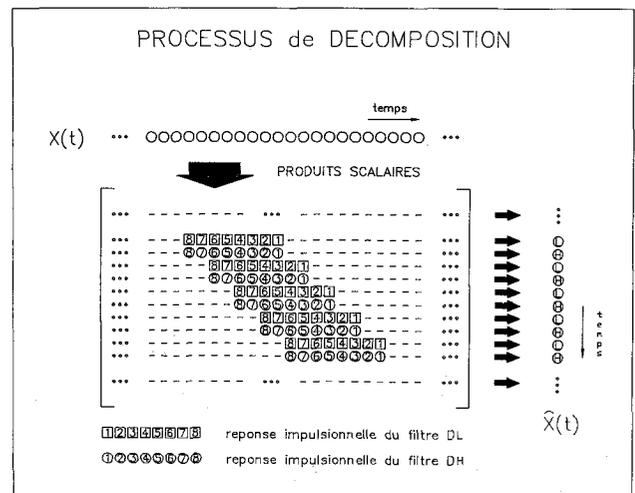


Fig. 4. — Processus de décomposition.

Comme on peut voir, du fait que les vecteurs de B_L et B_H sont construits en retournant temporellement les réponses impulsionnelles de D_L et D_H , les résultats de ces produits scalaires forment bien un échantillon sur deux de la convolution de X avec les filtres D_L et D_H . Ils donnent alternativement une composante de basse fréquence et une composante de haute fréquence de \hat{X} .

4. Conditions pour une reconstruction exacte

Nous pouvons dès à présent énoncer les conditions pour une reconstruction exacte :

Condition 1

Si on veut être capable de reconstruire séparément dans chacune des branches du processus la projection de X sur le sous-espace E_L (la composante basse fréquence de X) à partir des seuls échantillons de \hat{X}_L , et la projection de X sur E_H à partir des seuls échantillons de \hat{X}_H , et que la somme de ces deux projections redonne X , il est nécessaire que le sous-espace vectoriel E_L soit orthogonal au sous-espace vectoriel E_H .

En d'autres mots, la réponse impulsionnelle de D_L doit être orthogonale à la réponse impulsionnelle de D_H , et à toutes ses versions temporellement décalées de $2 \times K$ échantillons (K entier).

Condition 2

Bien que ce ne soit pas strictement une condition nécessaire, c'est une pratique courante de chercher des bases B_L et B_H orthogonales. Autrement dit la réponse impulsionnelle de D_L (respectivement D_H) doit être orthogonale à toutes ses versions décalées de $2 \times K$ échantillons (K entier $\neq 0$).

C'est exactement le but de l'optimisation pour les filtres de Galand.

Nous resterons dans ce contexte pour tout ce qui suit. Note : Il est assuré que certains systèmes à reconstruction exacte peuvent exister sans pour autant vérifier la condition 1. Ce sont les systèmes où on ne cherche

pas à reconstruire les projections de X sur E_L et E_H dans chaque branche du processus, mais où on désire seulement que la somme des sorties des filtres R_L et R_H donne X.

Ces systèmes n'ont pas été considérés ici.

5. Propriétés diverses

On peut déduire facilement de ces considérations quelques propriétés des systèmes à reconstruction exacte.

5.1. ORTHOGONALITÉ DE X_L et X_H

Comme les deux sous-espaces vectoriels E_L et E_H sont orthogonaux, les deux signaux X_L et X_H (qui représentent respectivement la composante basse fréquence et la composante haute fréquence de X) sont parfaitement orthogonaux, et ce, même si leurs spectres se recouvrent (en fait, quels que soient leurs spectres).

5.2. PROPRIÉTÉS DE LA RECONSTRUCTION

On peut affirmer que si la matrice de décomposition « D » (donnant \hat{X} en fonction de X) est orthogonale, le processus de reconstruction est représenté par la matrice transposée « R » (fig. 5) de cette matrice de décomposition « D ».

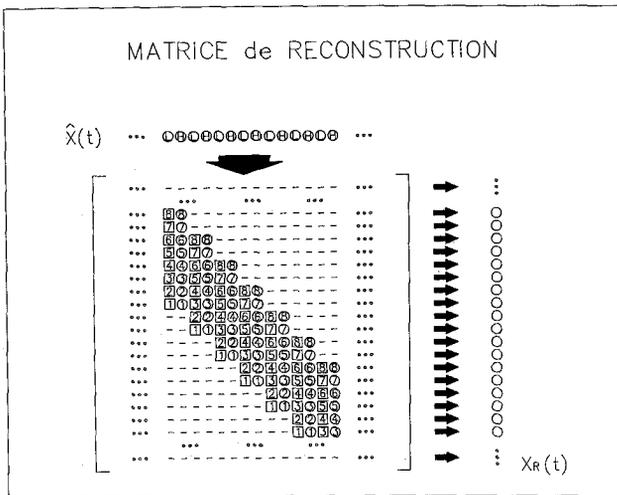


Fig. 5. — Matrice de reconstruction.

Il y a deux points importants à noter à propos de cette matrice « R » :

— Sa structure est exactement la même que celle de la matrice de décomposition : elle est construite par décalages de deux échantillons de blocs élémentaires de deux lignes.

Le processus de reconstruction peut donc toujours être représenté sous la forme d'un processus de décomposition : bien entendu, rien n'assure la causalité des filtres utilisés pour la reconstruction lorsqu'elle est représentée ainsi. C'est un résultat très général qui est valable même dans le cas d'une décomposition

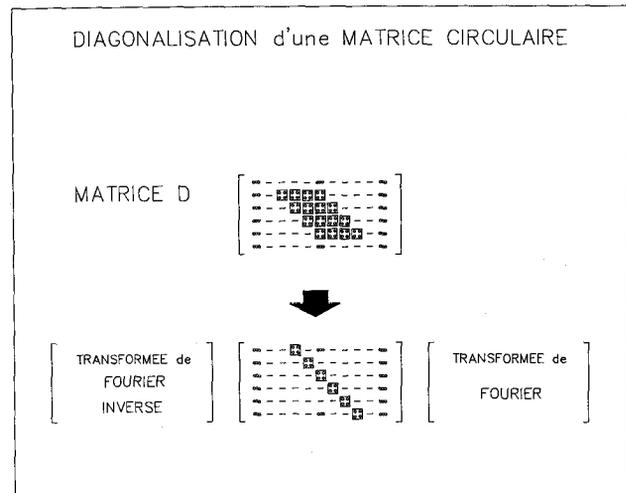


Fig. 6. — Diagonalisation d'une matrice circulaire.

non orthogonale. Ce résultat peut être considéré comme une extension, au cas des systèmes linéaires variant périodiquement, du principe suivant (énoncé pour les systèmes linéaires invariants) : « Le processus inverse d'un filtrage invariant est aussi un filtrage invariant ».

Il peut se démontrer assez simplement en considérant la matrice de décomposition D comme circulaire par blocs de 2×2 .

On peut alors la diagonaliser par application de la transformée de Fourier (fig. 6).

On obtient alors la matrice diagonale par blocs T dont les éléments diagonaux représentent la transformée de Fourier d'une ligne de D. (Transformée de Fourier sur des éléments matriciels de 2×2 éléments.)

On peut écrire

$$D = F^{-1} \times T \times F$$

Il est alors facile d'inverser D (en supposant que l'inverse existe) en inversant T.

L'inverse T^{-1} de T est aussi diagonale par blocs. Et donc l'inverse R (matrice de reconstruction) de D est :

$$R = F^{-1} \times T^{-1} \times F$$

et est aussi circulaire par blocs.

— Deuxièmement on voit que les échantillons de réponses impulsionnelles de D_L et D_H apparaissent dans l'ordre direct sur les lignes de R, alors qu'ils apparaissent dans l'ordre inverse pour la matrice de décomposition.

Autrement dit les réponses impulsionnelles des filtres de reconstruction R_L et R_H sont construites simplement en retournant temporellement celles de D_L et D_H [11]. Ce résultat, par ailleurs, a été noté par Vaidyanathan [13].

5.3. FILTRES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE

Comme les réponses impulsionnelles de R_L et R_H sont des versions retournées temporellement de D_L et D_H , il est impossible de trouver un système réalisable utili-

sant des filtres à réponse impulsionnelle infinie, car si D_L et D_H sont causaux, R_L et R_H devraient être anti-causaux (avec des filtres à réponse impulsionnelle finie, on peut toujours décaler temporellement R_L et R_H pour les rendre causaux, ce qui n'a pas d'autre conséquence que de retarder X_R).

6. Comparaison avec l'analyse par transformation orthogonale

Nous appelons « analyse par transformation orthogonale », le processus de décomposition du signal par des transformations orthogonales segmentaires usuelles (transformation de Fourier discrète, transformations en cosinus discrète, ...).

La figure 7 représente la matrice associée à une telle décomposition. (On représente ici une transformation orthogonale segmentaire sur deux points pour faciliter la comparaison avec une décomposition en deux sous-bandes présentée précédemment, mais généralement ces transformations sont utilisées sur plus de points (128, 256, ...))

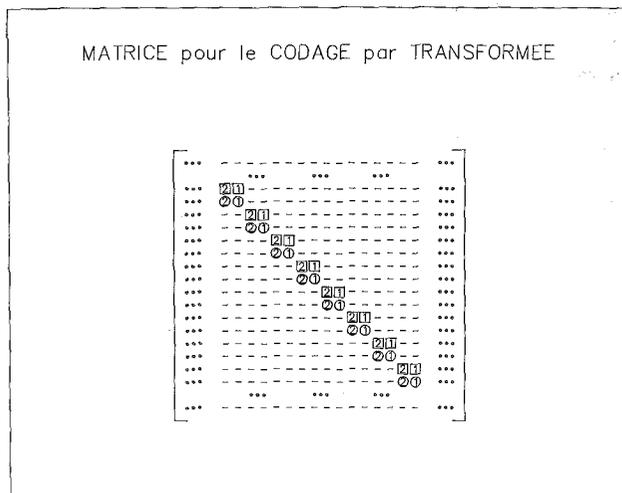


Fig. 7. — Matrice représentant une décomposition par transformation orthogonale.

Il est évident que ce type de matrice est très proche d'une matrice de décomposition en sous-bandes, la seule différence est que les blocs élémentaires de deux lignes (représentant les deux réponses impulsionnelles des filtres D_L et D_H) ne se recouvrent pas temporellement; la décomposition peut alors s'effectuer par segmentation du signal, puis par décomposition de chaque segment en appliquant une sous-transformation en dimension N (ici $N=2$).

La décomposition par transformation orthogonale est donc le cas limite de la décomposition en sous-bandes quand le nombre de filtres est égal au nombre de coefficients de chacun des filtres.

Bien sûr, la plupart des propriétés des transformations orthogonales segmentaires s'appliquent aussi à la décomposition en sous-bandes, par exemple dans le cas d'une quantification des signaux \hat{X}_L et \hat{X}_H , la variance de l'erreur de quantification commise sur le

signal reconstruit X_R est égale à la somme des variances des erreurs commises sur \hat{X}_L et \hat{X}_H (cette propriété est vraie tant que la transformation est orthogonale).

Dans de nombreux cas, une décomposition par transformation orthogonale est utilisée, alors qu'une décomposition en sous-bandes pourrait être avantageuse : par exemple, dans le cas où une bonne séparation harmonique entre les composantes fréquentielles est désirée, du fait que pour la décomposition en sous-bandes l'analyse peut se faire sur une durée de signal bien plus importante que le nombre de composantes.

7. Critère d'erreur

Dans la pratique, un problème qui se pose est l'obtention de bases de décomposition B_L et B_H orthogonales. En effet, dans le cas où les vecteurs de B_L et B_H ne forment pas une base exactement orthonormée de l'espace E , l'utilisation de la matrice transposée pour la reconstruction va introduire une erreur entre X_R et X .

Le critère que nous proposons, basé sur une mesure de l'orthogonalité des bases de décomposition, permet d'estimer l'erreur quadratique moyenne entre X_R et X en supposant que X est un signal aléatoire dont tous les échantillons ont une distribution gaussienne identique et indépendante des autres échantillons (signal gaussien i. i. d.); et ce, même dans le cas général où le système n'a pas de fonction de transfert. Dans le cas particulier des filtres de Galand où le système a une fonction de transfert, ce même critère est parfaitement équivalent au critère spectral utilisé par Johnston pour optimiser les filtres (cf. solution de Galand/Johnston, section 8), mais conduit à un calcul plus rapide et plus précis.

On appelle « C » ce critère d'erreur.

On définit C comme la somme des carrés de tous les produits scalaires de deux vecteurs distincts de B_L ou B_H .

Bien sûr, il y a dans B_L comme dans B_H , une infinité de vecteurs, mais comme les filtres D_L et D_H ont un nombre fini de coefficients, il n'y a qu'un nombre fini de produits scalaires distincts potentiellement non nuls.

On peut considérer trois groupes de produits scalaires :

- (a) Les produits scalaires d'un vecteur de B_L avec un vecteur de B_H .
- (b) Les produits scalaires de deux vecteurs de B_L .
- (c) Les produits scalaires de deux vecteurs de B_H .

Dans le cas (a) les produits scalaires d'un vecteur de B_L avec un vecteur de B_H sont en fait les échantillons pairs de la fonction d'intercorrélation des réponses impulsionnelles de D_L et D_H (incluant l'échantillon d'indice 0).

Si M est le nombre de coefficients des filtres D_L et D_H , il y a approximativement M produits scalaires potentiellement non nuls à effectuer (selon que M est pair ou impair).

Dans les cas (b) et (c) les produits scalaires des vecteurs de B_L ou B_H entre eux sont les échantillons pairs des fonctions d'autocorrélation des filtres D_L et D_H (omettant l'échantillon d'indice 0, équivalent à la norme de ces réponses impulsionnelles). Comme les fonctions d'autocorrélation sont paires, ces produits scalaires sont égaux deux à deux.

Pour chacune des bases B_L et B_H il y a approximativement $M/2$ produits scalaires à effectuer.

Le critère est donc la somme d'environ $3 \times M$ produits scalaires, son évaluation nécessite le calcul et la sommation d'environ $2 \times M$ produits scalaires, chacun de ces produits scalaires nécessite en moyenne $M/2$ additions-multiplications. L'évaluation de ce critère est donc une affaire de M^2 additions-multiplications environ, dans le cas général.

La relation que nous introduisons ici entre les produits scalaires des vecteurs des bases de décomposition B_L et B_H et les fonctions d'auto et d'intercorrélation des réponses impulsionnelles de D_L et D_H anticipe l'interprétation vectorielle que nous ferons du critère spectral de Johnston.

8. Solution de Galand/Johnston

Cette solution comporte deux étapes :

- Des conditions de construction définies par Esteban et Galand en 1977 [1] qui assurent l'orthogonalité des deux sous-espaces vectoriels E_L et E_H .
- Une optimisation due à Johnston en 1980 [4] qui assure l'orthogonalité des vecteurs V_{L_i} et V_{H_i} à l'intérieur de chacune des bases B_L et B_H .

8.1. CONSTRUCTION

Les quatre conditions de construction sont :

- (1) Les filtres sont à réponse impulsionnelle finie, à nombre pair de coefficients, et le filtre D_L est à réponse impulsionnelle symétrique (à phase linéaire).
- (2) $D_H(z) = D_L(-z)$.
- (3) $R_L(z) = D_L(z)$.
- (4) $R_H(z) = -D_L(-z)$.

Si on étudie ces conditions en les comparant aux conditions définies à la section 4 pour une reconstruction exacte :

– La condition (3) ci-dessus indique que la réponse impulsionnelle de R_L est une version retournée temporellement de la réponse impulsionnelle de D_L (qui est la réponse impulsionnelle de D_L elle-même si D_L est à phase linéaire).

– Par substitution de $D_L(-z)$ par $D_H(z)$ [en utilisant l'équation (1) ci-dessus] dans l'équation (4) ci-dessus, on trouve :

$$R_H(z) = -D_H(z)$$

On remarque que l'opposée de la réponse impulsionnelle de $D_H(z)$ [c'est-à-dire $-D_H(z)$] est égale à sa version temporellement retournée [c'est-à-dire $D_H(z^{-1})$], pour la construction particulière définie par la condition (1).

– La condition (2) est la clé de voûte de la construction : pour obtenir $D_H(t)$, on inverse le signe d'un échantillon sur deux de $D_L(t)$.

Cette manière de procéder a deux avantages :

- Elle assure que le spectre de $D_H(t)$ est le spectre miroir par rapport à $F_e/4$ (F_e : fréquence d'échantillonnage) de celui de $D_L(t)$; donc si D_L est passe-bas, D_H sera passe-haut.
- Elle assure que tous les vecteurs V_{L_i} de B_L sont orthogonaux à tous les vecteurs V_{H_i} de B_H , par exemple :

La figure 8 présente le produit scalaire d'un vecteur V_{L_i} avec un vecteur V_{L_i+4} . Dans ce cas les produits individuels de composantes s'annulent deux à deux [(a) avec (d), (b) avec (c)].

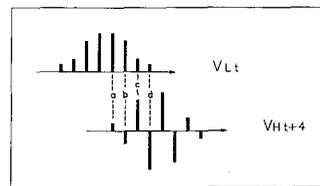


Fig. 8. – Produit scalaire d'un vecteur de la base B_L avec un vecteur de la base B_H .

Donc ces quatre conditions assurent l'orthogonalité des sous-espaces vectoriels E_L et E_H .

8.2. OPTIMISATION

Johnston a utilisé pour son optimisation un critère en deux parties :

- La première est un critère d'erreur de reconstruction que nous allons discuter ici.
- La deuxième partie du critère d'optimisation visait à maximiser la réjection hors-bande des filtres de décomposition; nous n'étudions pas cette deuxième partie.

Le critère d'erreur utilisé par Johnston est :

L'intégrale sur le cercle de rayon unité de

$$[|D_L(z)|^2 - |D_L(-z)|^2 - 1]^2$$

est nulle.

Dans le cas particulier de la construction de Galand,

$$|D_L(z)|^2 - |D_L(-z)|^2$$

est la fonction de transfert X_R/X du système [4].

On peut remarquer que :

- $|D_L(z)|^2$ est la transformée en z de la fonction d'autocorrélation de $D_L(t)$.
- $|D_L(-z)|^2$ est la transformée en z de la fonction d'autocorrélation de $D_L(t)$ où on a inversé les échantillons de rang impair.

Donc :

– $|D_L(z)|^2 - |D_L(-z)|^2$ est la transformée en z de la fonction d'autocorrélation de $D_L(t)$ où on a annulé les échantillons de rang impair (à un coefficient 2 près).

– $|D_L(z)|^2 - |D_L(-z)|^2 - 1$ est la transformée en z de la fonction d'autocorrélation de $D_L(t)$ où on a

annulé les échantillons de rang impair et l'échantillon de rang 0.

Chacun des échantillons non nuls de la version temporelle de $|D_L(z)|^2 - |D_L(-z)|^2 - 1$ est donc un des produits scalaires de deux vecteurs distincts de la base B_L .

Donc (par le théorème de Parseval) :

L'intégrale sur le cercle unité de $|D_L(z)|^2 - |D_L(-z)|^2 - 1$

est égale à la somme des carrés de tous les produits scalaires de vecteurs distincts de la base B_L (une des trois parties du critère d'erreur défini à la section 7).

Dans le cas particulier de la construction de Galand :

$$|D_L(z)|^2 - |D_L(-z)|^2 = |D_H(z)|^2 - |D_H(-z)|^2$$

Ainsi donc le critère de Johnston mesure aussi l'orthogonalité des vecteurs à l'intérieur de la base B_H (la deuxième partie du critère C).

Toujours dans le cas particulier de la construction de Galand, chaque vecteur de B_L est parfaitement orthogonal à tous les vecteurs de B_H (donc ici, la troisième partie du critère C est toujours nulle).

On peut donc conclure que le critère invoqué par Johnston pour l'optimisation des filtres de Galand est un cas particulier du critère défini à la section 7, valable quand le système a une fonction de transfert.

9. Solution de Smith et Barnwell

Elle est très semblable, dans l'approche, à la solution de Galand/Johnston ; toutefois elle est un peu plus générale, et le problème est résolu de manière analytique, permettant d'obtenir une reconstruction rigoureusement exacte.

Elle comprend aussi deux étapes :

- Des conditions de construction qui assurent l'orthogonalité entre les deux sous-espaces vectoriels E_L et E_H .

- une condition pour la recherche des filtres D_L et D_H qui assure l'orthogonalité des vecteurs dans chacune des bases B_L et B_H .

9.1. CONDITIONS DE CONSTRUCTION

Les trois conditions sont :

(1) $D_H(z) = z^{-1} \cdot D_L(-z^{-1})$.

(2) $R_L(z) = D_L(z^{-1})$.

(3) $R_H(z) = D_H(z^{-1})$.

(Elles ne sont cependant pas présentées sous cette forme dans l'article de Smith et Barnwell. On présente ici un ensemble équivalent de conditions, plus cohérent avec l'optique de l'approche vectorielle choisie.)

On retrouve dans les conditions précédentes (2) et (3) le fait que les filtres de reconstruction R_L et R_H sont obtenus en retournant temporellement les réponses impulsionnelles des filtres de décomposition D_L et D_H . La condition (1) assure que tous les vecteurs de B_L sont orthogonaux à tous les vecteurs de B_H . En effet on constate sur la figure 9, représentant un produit

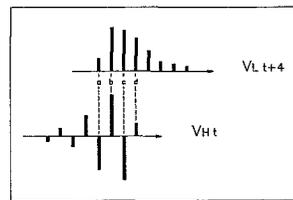


Fig. 9. - Produit scalaire d'un vecteur de la base B_L avec un vecteur de la base B_H .

scalaire particulier d'un vecteur de B_L avec un vecteur de B_H , que les produits de composantes s'annulent par paires.

Cette condition est aussi un moyen d'assurer que le filtre D_H sera passe-haut si D_L est passe-bas.

9.2. CONDITION POUR LA RECHERCHE DES FILTRES

Cette condition est exprimée par l'énoncé : tous les échantillons de rang pair de la réponse impulsionnelle de $D_L(z) \cdot D_L(z^{-1})$ sont nuls (sauf l'échantillon de rang 0).

Comme pour l'optimisation de Johnston, il faut remarquer que la version temporelle de $D_L(z) \cdot D_L(z^{-1})$ est la fonction d'autocorrélation de $D_L(t)$, et donc les échantillons de rang pair de cette fonction d'autocorrélation représentent les produits scalaires de vecteurs distincts de B_L .

Ici aussi, si la condition de construction (1) est vérifiée, cette condition sur le filtre D_L assure aussi l'orthogonalité des vecteurs de la base B_H .

10. Conclusion

Depuis quelques années les systèmes de décomposition/reconstruction en sous-bandes connaissent un intérêt grandissant. L'approche présentée ici montre que la décomposition en sous-bandes est un outil puissant et cohérent en traitement du signal. Son domaine d'application est bien plus important que les seuls codages de parole ou d'image.

En effet, ces méthodes trouvent des applications dans les techniques d'analyse temps/fréquence en offrant des alternatives souvent avantageuses aux transformations orthogonales segmentaires telles que la transformation en cosinus discrète.

Elles trouvent aussi, comme le souligne M. Vetterli [9], des applications potentielles importantes en transmultiplexage. Le problème du transmultiplexage est le problème dual du problème de codage, on cherche alors à construire un signal unique (en vue de sa transmission sur une ligne physique), à partir de signaux provenant de plusieurs sources, de manière à pouvoir le décomposer facilement au récepteur. Entre le multiplexage temporel, où les signaux constituants occupent des segments disjoints du signal dans l'espace du temps, et le multiplexage fréquentiel où les signaux constituants occupent des segments disjoints du signal dans l'espace des fréquences, les techniques du codage en sous-bandes offrent un éventail de solutions où les signaux constituants peuvent

éventuellement se recouvrir partiellement dans l'espace temporel ou fréquentiel, et donc conduisent à une meilleure utilisation de cet espace.

Manuscrit reçu le

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. R. GALAND et D. ESTEBAN, Application of Quadrature Mirror Filters to Split Band Voice Coding Schemes, *Proce. of 1977 ICASSP*, May 1977, p. 191-195.
- [2] C. R. GALAND et D. ESTEBAN, Design and Evaluation of Parallel Quadrature Mirror Filters, *Proc. of 1983 ICASSP*, p. 224-227.
- [3] C. R. GALAND et H. J. NUSSBAUMER, New Quadrature Mirror Filter Structures, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-32, #3, June 1984, p. 522-530.
- [4] J. D. JOHNSTON, A Filter Family Designed for Use in Quadrature Mirror Filter Banks, *Proc. of 1980 ICASSP*, April 1980, p. 291-294.
- [5] H. J. NUSSBAUMER, Complex Quadrature Mirror Filters, *Proc. of 1983 ICASSP*, p. 221-223.
- [6] V. K. JAIN et R. E. CROCHIERE, A Novel Approach to the Design of Analysis/Synthesis Filter Banks, *Proc. of 1983 ICASSP*, p. 228-231.
- [7] T. P. BARNWELL, Subband Coder Design Incorporating Recursive Quadrature Filters and Optimum ADPCM Coders, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-30, #5, Oct. 1982, p. 751-765.
- [8] M. J. T. SMITH et T. P. BARNWELL, A Procedure for Designing Exact Reconstruction Filter Banks for Tree Structured Subband Coders, *Proc. of 1984 ICASSP*, p. 27.1.1-27.1.4.
- [9] M. VETTERLI, A Theory of Multirate Filter Banks, *IEE Trans. on ASSP*, ASSP-35, #3, March 1987.
- [10] M. J. T. SMITH et T. P. BARNWELL, A New Filter Bank Theory for Time-Frequency Representation, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-35, #3, March 1987.
- [11] B. PAILLARD, J. SOUMAGNE, P. MABILLEAU et S. MORISSETTE, Filters for Subband Coding, Analytical Approach, *Proc. of 1987 ICASSP*, #4, p. 50.1.1-50.2.4.
- [12] P. P. VAIDYANATHAN et P. HOANG, The perfect Reconstruction QMF BANK: New Architectures, Solutions and Optimization Strategies, *Proc. of 1987 ICASSP*, #4, p. 50.3.1.-50.3.4.
- [13] P. P. VAIDYANATHAN, Theory and Design of M Channel Maximally Decimated QMF with Arbitrary M, Having Perfect Reconstruction Property, *IEEE Trans. on ASSP*, April 1987, p. 476-492.
- [14] G. WACKERSREUTHER, Some New Aspects of Filters for Filter Banks, *IEEE Trans. on ASSP*, October 1986, p. 1182-1200.