

# Méthode de calcul approché très rapide

## de la Transformée de Fourier

Very fast approximate calculus of Fourier transform

### Joseph COHEN

Laboratoire LSD, Institut IMAG, Université J. Fourier, B.P. n° 53X,  
38401 GRENOBLE CEDEX, France.

### Jacques MAX

CENG-LETI, BP n° 85X, 38041 GRENOBLE CEDEX, France.

Licence d'enseignement Mathématiques, ingénieur ESE, DEA d'automatique, auteur de l'ouvrage **Méthodes et techniques de traitement du Signal**, ingénieur au Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA). Jacques Max travaillait sur la Précision des algorithmes de traitement du signal et de filtrage numérique; méthodes simples de calcul et réalisation de filtres. Il est décédé en juillet 1987 (voir éditorial, **Traitement du Signal**, 5, n° 1).

### RÉSUMÉ

Nous étudions dans cet article une méthode de calcul approché de la Transformée de Fourier. Sous certaines conditions, que nous précisons, le calcul des différentes composantes du spectre ne nécessite aucune multiplication. Le calcul ainsi simplifié, peut s'effectuer en temps réel sur un micro-ordinateur non spécialisé.

De plus, le calcul des différentes composantes du spectre s'effectue d'une manière indépendante les unes des autres. On peut donc limiter le calcul aux seules régions du spectre qui intéressent réellement l'utilisateur, et raccourcir ainsi le calcul.

Nous avons vérifié la validité de cette méthode d'approximation sur un signal de spectre connu et sur un signal de parole réel. Le spectre approché est obtenu avec une précision de quelques pour cent à condition que le signal soit suréchantillonné.

### MOTS CLÉS

### SUMMARY

*We study an approximate calculus of the Fourier Transform. Subject to specified conditions, we define, the calculus of the different components of the spectra does not require any multiplication. Thus, the calculus, can be done in real time on an ordinary micro-computer.*

*Moreover, the calculus of the different components of the spectra is done independently of one another. We are able to limit the calculus only to regions to which the user is interested in. The method is very flexible.*

*We tested this method on a signal whose spectra is well known, and on a real speech signal. The precision is of a few percent if the signal is oversampled.*

### KEY WORDS

## 1. Introduction

Les méthodes de calcul de la Transformée de Fourier discrète utilisant un algorithme rapide (FFT) permettent d'obtenir  $N$  composantes de la *Série de Fourier*, d'un signal  $x(t)$  échantillonné en  $N=2^n$  points équidistants de  $\Delta T$  sur l'intervalle  $-N\Delta T/2, +N\Delta T/2$ , au moyen de  $N \log_2 N$  multiplications. Des calculateurs spécialisés, utilisant des coprocesseurs, permettent de calculer un spectre de 1024 points en un temps très court de l'ordre de quelques millisecondes. La FFT permet d'approcher la *Transformée de Fourier* du signal  $x(t)$  en calculant les  $N$  premiers coefficients de la *Série de Fourier*  $x_s(t)$  associée à  $x(t)$ , pour des fréquences bien définies :

$$f_1 = \frac{1}{N\Delta T}, \quad f_2 = \frac{2}{N\Delta T}, \quad f_3 = \frac{3}{N\Delta T}, \quad \dots, \\ f_k = \frac{k}{N\Delta T}, \quad \dots$$

On peut noter que les fréquences  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$  sont définies sans ambiguïté par l'intervalle d'échantillonnage  $\Delta T$  et par  $N$  et que leur répartition spectrale ne peut être modifiée au gré de l'utilisateur. De plus, le calcul étant global, la FFT ne permet pas de calculer un seul coefficient de la *Série de Fourier* indépendamment des autres.

Nous proposons de développer dans cet article une nouvelle méthode de calcul approché des coefficients de la *Série de Fourier*. Ces coefficients peuvent être calculés beaucoup plus rapidement, avec une précision de quelques pour cent, en utilisant systématiquement des filtres passe-bandes numériques de type *Hadamard*, *Walsh* ou *Ter Haar*, sous certaines conditions que nous préciserons. L'utilisation de ces filtres présente les avantages suivants par rapport à la FFT :

1° Ils ne font appel qu'à des additions algébriques. Ne faisant appel à aucune multiplication, ils sont très rapides à calculer, et se prêtent particulièrement bien à une réalisation en circuits intégrés. Les calculs peuvent être effectués en temps réel sur un petit micro-ordinateur non spécialisé.

2° La fréquence centrale de chaque filtre et sa bande passante sont définies par l'utilisateur, indépendamment de  $\Delta T$  et de  $N$ . Celui-ci peut répartir les fréquences de calcul dans le spectre en fonction de ses besoins. La finesse d'analyse est définie par la bande passante du filtre qu'il choisit à son gré.

3° Les calculs du résultat de chaque filtrage sont menés indépendamment les uns des autres. L'utilisateur peut limiter les calculs aux seules régions du spectre qui l'intéressent et abrégé ainsi leur durée. Cette méthode présente une grande souplesse d'utilisation. Elle nécessite toutefois une adaptation préalable du programme de calcul au type de problème à traiter.

4° Quand l'utilisateur définit la bande passante  $\Delta f$  du filtre de type *Hadamard* il définit en même temps la durée  $\Delta \theta = 1/\Delta f$  de la fenêtre temporelle du signal à analyser. Cet intervalle de temps contiendra  $\Delta \theta/\Delta T$  valeurs échantillonnées du signal. Le calcul fera intervenir un nombre variable de valeurs échantillonnées

fonction de la bande passante  $\Delta f$  du filtre de type *Hadamard* choisi et non la totalité des échantillons disponibles. Le calcul est d'autant plus rapide que  $\Delta f$  est plus grand.

Nous rappellerons les propriétés mathématiques des filtres passe-bandes numériques de type *Hadamard*, *Walsh* ou *Ter Haar*; nous montrerons pourquoi ces filtres sont aussi efficaces que les filtres de réponse impulsionnelle sinusoïdale classiques, pour déterminer les amplitudes des différents coefficients d'une *Série de Fourier*. Ils permettent de déterminer les composantes du spectre de Fourier à quelques pour cent près de la valeur exacte sous certaines conditions que nous préciserons. Nous montrerons ensuite comment mettre en œuvre pratiquement ces filtres passe-bandes. Puis, nous traiterons à titre d'exemple un signal académique classique dont le spectre est connu. Cet exemple sera traité en utilisant pour le calcul des coefficients de la *Série de Fourier* toutes les valeurs échantillonnées du signal. Ensuite, nous traiterons à titre d'exemple un signal synthétique comportant plusieurs sinusoïdes de périodes :  $4*5, 4*7, 4*9, 4*11$ . Ces périodes ont été choisies de manière que leur PPCM  $4*5*7*9*11$  soit le plus grand possible par rapport aux périodes individuelles. Les amplitudes varient dans un rapport de 1 à 200. Cet exemple sera traité en définissant au préalable les bandes passantes des filtres de type *Hadamard*. Dans ce cas on utilise un nombre variable de valeurs échantillonnées du signal fonction des bandes passantes. On obtient ainsi un échantillonnage de la *Transformée de Fourier* de la portion du signal considéré. Enfin, nous appliquerons cette méthode à l'analyse d'un signal de parole réel. Nous comparerons les résultats du calcul approché et du calcul exact. Nous pourrions ainsi évaluer le gain en temps de calcul et la précision obtenue par cette nouvelle méthode de calcul approché. Nous rappelons en *appendice* (1) ce qui différencie la *Série de Fourier* de la *Transformée de Fourier*.

## 2. Rappel des propriétés mathématiques des filtres de type Hadamard

La réponse impulsionnelle d'un filtre de type *Hadamard*  $H(f, k, t)$  comportant  $k$  périodes  $T=1/f$  est représentée par la figure 1. C'est une fonction du temps non périodique parce que limitée dans le temps, qui admet une *Transformée de Fourier* continue. Cette fonction peut être considérée comme le produit de deux fonctions : l'une *périodique* de type *Hadamard*, comportant une *infinité de périodes* de la forme :  $\text{signe} \{ \sin(2\pi t/T) \}$ , l'autre, *limitée dans le temps*, est constituée par une fonction porte  $\prod_{k T/2}^{(t)}$  de largeur temporelle  $k T$ .

$H(f, k, t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$H(f, k, t) = \prod_{k T/2}^{(t)} \text{signe} \{ \sin(2\pi t/T) \}.$$

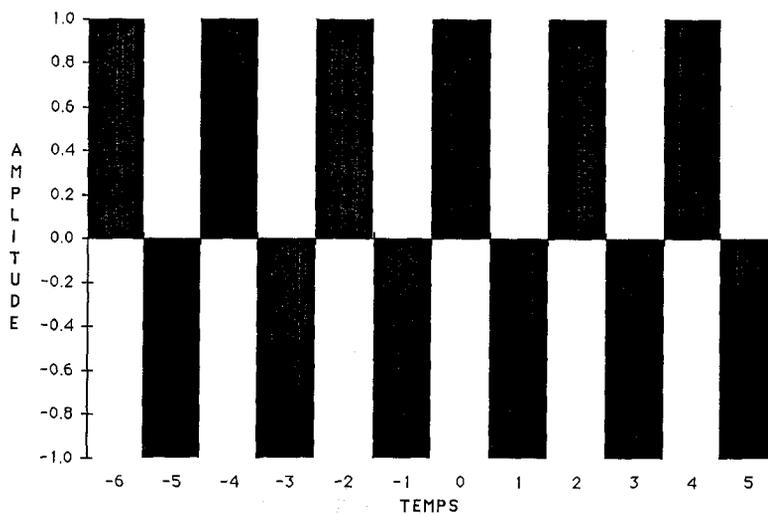


Fig. 1. — Filtre de type Hadamard comportant 6 périodes.

La fonction périodique de durée infinie admet un développement en *Série de Fourier*, qui ne contient que des coefficients d'ordre impairs  $(2I+1)$  dont le module décroît selon  $(2I+1)$ . Cette *Série de Fourier* peut être représentée par une suite de distributions :

$$\frac{4}{\pi} \delta\left(f - \frac{1}{T}\right), \quad \frac{4}{3\pi} \delta\left(f - \frac{3}{T}\right),$$

$$\frac{4}{5\pi} \delta\left(f - \frac{5}{T}\right), \quad \dots,$$

$$\frac{4}{(2I+1)\pi} \delta\left(f - \frac{(2I+1)}{T}\right).$$

La fonction porte de durée  $kT$  admet une Transformée de Fourier en :

$$\frac{\sin(\pi f k T)}{\pi f}$$

dont la bande-passante équivalente est  $\Delta f = 1/kT$ . La *Transformée de Fourier* du produit de deux fonctions est égale au produit de convolution de leur *Transformée de Fourier*. En convoluant la *Transformée de Fourier* d'une fonction porte de largeur  $kT$  par la *Série de Fourier* définie précédemment on obtient le gain complexe  $\mathcal{F}H(T, k, \varphi)$  d'un filtre réel de type *Hadamard*  $H(f, k, t)$ . Le gain complexe  $\mathcal{F}H(T, k, \varphi)$  du filtre de type Hadamard défini précédemment est par définition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(f, k, t) \exp(-2\pi j \Phi t) dt.$$

Le module de cette intégrale est représenté par la figure 2. Le filtre passe-bande  $H(f, k, t)$  sélectionne les fréquences situées au voisinage de  $\varphi = (2I+1)f$ , avec  $I=0, 1, 2, 3, \dots, +\infty$ .

En fait, on cherche à calculer, en général, le module de l'amplitude de la *Transformée de Fourier*. Ce calcul du module nécessite le calcul séparé de deux intégrales correspondants aux composantes paires et impaires

d'un signal  $x(t)$  du type :

$$f_{\cos}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi\varphi t) dt.$$

$$f_{\sin}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi\varphi t) dt$$

Le filtre passe-bande  $H(f, k, t)$  ainsi qu'il a été défini dans la figure 1 est une fonction impaire de  $t$  qui change de signe avec  $t$ . Il ne permet de calculer que la composante  $f_{\sin}(f)$  de la *Transformée de Fourier*. Son gain complexe correspond à l'intégrale :

$$\mathcal{F}H(T, k, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f, k, t) \sin(2\pi\varphi t) dt.$$

Nous définirons, pour calculer la composante  $f_{\cos}(f)$  de la TF, un filtre pair de type *Hadamard*

$$H_q(f, k, t) = \prod_{kT/2}^{(t)} \text{signe} \{ \cos(2\pi t/T) \}$$

dont le gain complexe est :

$$\mathcal{F}H_q(T, k, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_q(f, k, t) \cos(2\pi\varphi t) dt.$$

Les deux modules de  $\mathcal{F}H(T, k, \varphi)$  et de  $\mathcal{F}H_q(T, k, \varphi)$  ont la même expression et sont représentés par la même figure 2.

Pour calculer le filtrage d'un signal  $x(t)$  par un filtre de type *Hadamard*, il faut calculer séparément les deux intégrales :

$$h_{\cos}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) H_q(f, k, t) dt$$

$$h_{\sin}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) H(f, k, t) dt.$$

Le filtre pair  $H_q(f, k, t)$  est le filtre impaire  $H(f, k, t)$  décalé d'un quart de période soit  $H(f, k, t - T/4)$ .

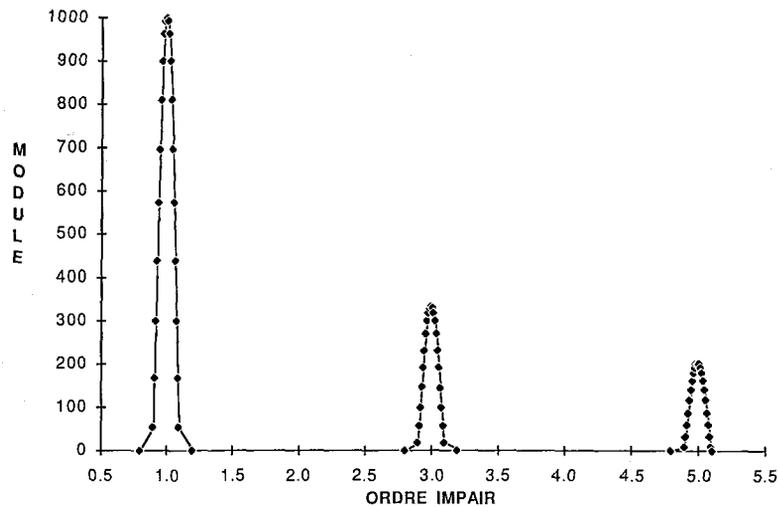


Fig. 2. — Spectre d'un filtre de type Hadamard réel limité dans le temps.

Le module de l'amplitude est alors égal à :

$$A(f) = \sqrt{h_{\cos}^2(f) + h_{\sin}^2(f)}.$$

La valeur de la phase  $\Theta$  est donnée par :

$$\text{tg} \{ \Theta(f) \} = h_{\sin}(f) / h_{\cos}(f).$$

La fréquence centrale du filtre de type Hadamard est fixée par la valeur de  $f=1/T$  et sa bande passante  $\Delta f=1/kT$  par la valeur de  $k$ .

Nous rappelons le *Théorème de Parseval* : Soient deux fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$ , dont les Transformées de Fourier sont  $\mathcal{F}x(\varphi)$  et  $\mathcal{F}y(\varphi)$ . L'intégrale temporelle du produit de  $x(t)$  par  $[y(t)]^*$  est égale à l'intégrale fréquentielle du produit de  $\mathcal{F}x(\varphi)$  par  $[\mathcal{F}y(\varphi)]^*$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)[y(t)]^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}x(\varphi)[\mathcal{F}y(\varphi)]^* d\varphi.$$

Soit  $x(t)$  un signal qui admet une *Transformée de Fourier*  $\mathcal{F}x(\varphi)$  de support borné par la fréquence  $F_{\max}$ .  $\mathcal{F}x(\varphi)$  est par hypothèse, nul à l'extérieur de l'intervalle  $[-F_{\max}, F_{\max}]$ . En appliquant le *Théorème de Parseval*, les intégrales  $h_{\cos}(f)$  et  $h_{\sin}(f)$  sont encore égales aux intégrales sur la fréquence  $\varphi$  des produits de la fonction complexe  $\mathcal{F}x(\varphi)$  par  $\mathcal{F}H_q(T, k, \varphi)$  et  $\mathcal{F}H(T, k, \varphi)$ . Nous voyons sur la figure 3, que si la fréquence  $f$  du filtre de type Hadamard est comprise entre  $F_{\max}/3$  et  $F_{\max}$ , le produit des deux TF ne fera intervenir que le terme fondamental du filtre de type Hadamard; puisque les harmoniques du filtre de type Hadamard sont extérieurs à l'intervalle  $[-F_{\max}, F_{\max}]$ . La *Transformée de Fourier* d'un filtre de réponse impulsionnelle sinusoidale de durée  $1/\Delta f$  a exactement la même forme que le spectre représenté par la figure 2 au **voisinage du fondamental**. On pourra remplacer avantageusement les filtres de réponse impulsionnelle sinusoidale par des filtres de type Hadamard, pour  $f$  compris entre  $F_{\max}/3$  et  $F_{\max}$ , c'est le principe de la détection synchrone.

Pour  $f$  inférieur à  $F_{\max}/3$ , le produit du spectre du filtre de type Hadamard, représenté en module par la figure 2, par  $\mathcal{F}x(f)$ , fera intervenir  $\mathcal{F}x(f) - \mathcal{F}x(3f)/3 + \mathcal{F}x(5f)/5 - \dots$ . Le calcul des intégrales  $h_{\cos}(f)$  et  $h_{\sin}(f)$  ne permettra pas de déterminer dans le cas général,  $|\mathcal{F}x(f)|$  mais la somme d'harmoniques :

$$|\mathcal{F}x(f) - \mathcal{F}x(3f)/3 + \mathcal{F}x(5f)/5 - \dots|.$$

Par contre, si  $\mathcal{F}x(f)$  présente un maximum en  $f_M$ , et si comme c'est très souvent le cas,  $\mathcal{F}x(3f_M)/3$ ,  $\mathcal{F}x(5f_M)/5$ ,  $\mathcal{F}x(7f_M)/7$ , sont beaucoup plus petits que  $\mathcal{F}x(f_M)$  on pourra négliger les amplitudes des harmoniques devant le terme principal. Dans ce cas, nous montrerons sur des exemples que les intégrales  $h_{\cos}(f)$  et  $h_{\sin}(f)$  permettent de calculer effectivement, avec une précision de quelques pour cent les amplitudes prépondérantes du spectre que nous appellerons « raies principales ». Nous appellerons « raies secondaires » les autres raies du spectre dont on ne peut pas déterminer ainsi l'amplitude au premier abord. On constate expérimentalement que les amplitudes de ces « raies secondaires » sont en pratique le plus souvent inférieures au dixième des amplitudes des « raies principales ». Dans l'exemple traité ultérieurement, nous avons pratiqué une méthode de soustraction en retranchant systématiquement du signal initial, toute raie principale de type  $A \cos(2\pi ft + \Theta)$  au fur et à mesure qu'on en a déterminé l'amplitude  $A$  et la phase  $\Theta(f)$ , au moyen des deux intégrales  $h_{\cos}(f)$  et  $h_{\sin}(f)$ . En retranchant du signal initial les raies principales, on obtient un nouveau signal dont le module de l'amplitude maximale des raies de a été divisée par un facteur d'au moins 10. On peut alors réitérer le calcul précédent pour déterminer l'amplitude des raies secondaires du signal initial. On peut noter que les raies principales de grande amplitude imposent leurs changements de signes à un signal de valeur moyenne nulle. On obtient une bonne approximation de leur période en mesurant les intervalles de temps qui séparent deux passages à

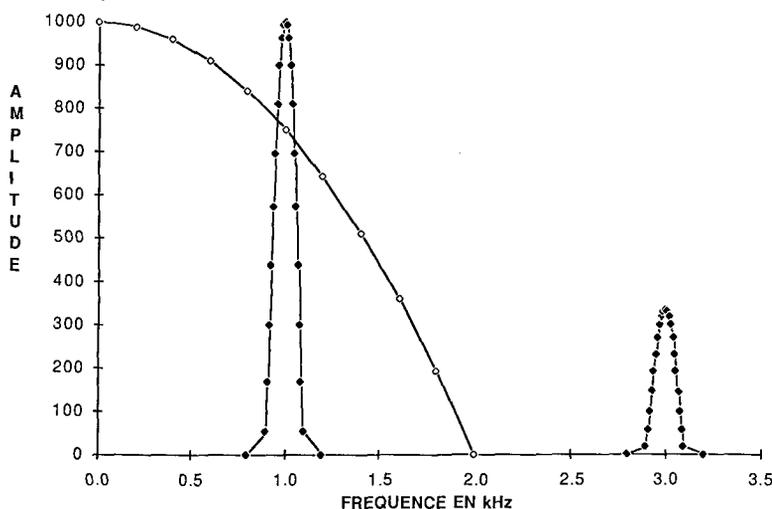


Fig. 3. — Comparaison d'un spectre réel de fréquence maximale 2 kHz par le spectre Hadamard de la figure 2.

zéro du signal. Dans le programme de vérification que nous avons mis au point nous comptons le nombre de valeurs échantillonnées entre deux changements du signe du signal. On obtient ainsi un nombre limité de périodes principales possibles pour lesquelles le programme définit automatiquement les filtres de type *Hadamard* correspondants. En appliquant cette méthode de calcul, nous avons pu déterminer l'amplitude des raies principales et secondaires, mais le calcul est un peu plus long et la méthode proposée moins efficace à utiliser.

On peut aussi filtrer le signal à l'aide de filtres passe-bas numériques de fréquence de coupure  $F_{bas}$ . On pourra dans ces conditions explorer à l'aide des filtres de type *Hadamard* la plage de fréquence  $F_{bas}/3, F_{bas}$ . Mais l'introduction de filtres numériques passe-bas diminue l'intérêt de la méthode proposée. Il est par contre possible de filtrer au préalable le signal à l'aide d'une série de filtres résistances-capacités passe-bas analogiques, et d'échantillonner ensuite les différents signaux correspondants aux différentes régions du spectre à l'aide de filtres de type *Hadamard*.

### 3. Erreurs introduites par le calcul numérique discret

Soit  $x(t)$  le signal à étudier, on suppose connus  $x(n\Delta T)$  les valeurs échantillonnées de ce signal aux instants  $n\Delta T$ , dans l'intervalle temporel  $[-kT/2, kT/2]$ . Un intervalle temporel de  $\Delta t = kT$  ne permet pas de définir une fréquence à mieux que  $\Delta f = 1/kT$ . Les intégrales définies précédemment :  $f_{cos}(f)$  et  $f_{sin}(f)$ , qui déterminent les composantes réelles et imaginaires de la *Transformée de Fourier* seront calculées et remplacées à  $\Delta f = 1/kT$  près par les coefficients de la *Série de Fourier* associée à  $x(t)$

qui sont les valeurs moyennes des intégrales :

$$A_{cos}(f) = 2/kT \int_{-kT/2}^{+kT/2} x(t) \cos(2\pi ft) dt$$

$$B_{sin}(f) = 2/kT \int_{-kT/2}^{+kT/2} x(t) \sin(2\pi ft) dt.$$

On a introduit le facteur multiplicatif deux sur les valeurs moyennes pour normaliser à un, les valeurs moyennes de  $\cos^2(t)$  et  $\sin^2(t)$ .

Les intégrales suivantes où  $H_q(f, k, t)$  et  $H(f, k, t)$  sont limités dans le temps,

$$h_{cos}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) H_q(f, k, t) dt$$

$$h_{sin}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) H(f, k, t) dt$$

seront approchées à  $\Delta f$  près, par les valeurs moyennes des intégrales :

$$\mathcal{H}_{cos}(f) = 1/kT \int_{-kT/2}^{+kT/2} x(t) H_q(f, k, t) dt$$

$$\mathcal{H}_{sin}(f) = 1/kT \int_{-kT/2}^{+kT/2} x(t) H(f, k, t) dt.$$

Pour  $x(t) = \cos(2\pi ft)$ ,  $\mathcal{H}_{cos}$  est égal à  $2/\pi$  et  $\mathcal{H}_{sin}$  est nul; et pour  $x(t) = \sin(2\pi ft)$ ,  $\mathcal{H}_{sin}$  est égal à  $2/\pi$  et  $\mathcal{H}_{cos}$  est nul. On obtiendra les coefficients de la *Série de Fourier* associée à  $x(t)$  en divisant  $\mathcal{H}_{cos}$  et  $\mathcal{H}_{sin}$  par  $4/\pi$ .

Nous remplacerons dorénavant le calcul des intégrales  $h_{cos}(f)$  et  $h_{sin}(f)$  par les valeurs moyennes discrètes  $\mathcal{H}_{cos}^D(f)$  et  $\mathcal{H}_{sin}^D(f)$ .

Si  $2m$  est le nombre d'échantillons par période  $T$ .  $\mathcal{H}_{\cos}^D(f)$  et  $\mathcal{H}_{\sin}^D(f)$  sont des expressions de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\cos}^D(f) = & [x\{(n+1)\Delta T\} + x\{(n+2)\Delta T\} + \dots \\ & + x\{(n+m-1)\Delta T\} - x\{(n+m+1)\Delta T\} \\ & - x\{(n+m+1)\Delta T\} - \dots - x\{(n+2m-1)\Delta T\}] / 2m \end{aligned}$$

Le calcul numérique de  $\mathcal{H}_{\cos}^D(f)$  et  $\mathcal{H}_{\sin}^D(f)$  utilise une méthode des trapèzes pour évaluer d'une manière approchée les intégrales  $h_{\cos}(f)$  et  $h_{\sin}(f)$ . Les valeurs numériques approchées  $\mathcal{H}_{\cos}^D(f)$  et  $\mathcal{H}_{\sin}^D(f)$  se rapprocheront d'autant plus près des valeurs théoriques  $h_{\cos}(f)$  et  $h_{\sin}(f)$  que la largeur des trapèzes sera petite. La largeur des trapèzes est tout simplement l'intervalle de temps  $\Delta T$  qui sépare deux mesures échantillonnées du signal. En d'autres termes l'approximation sera d'autant meilleure que l'intervalle d'échantillonnage  $\Delta T$  sera petit par rapport à la période  $T$ . Nous avons évalué numériquement l'importance de cette erreur dans le cas particulier suivant : nous avons analysé au paragraphe 7 un signal de parole échantillonné à 10 kHz. Pour explorer la plage de fréquence s'étendant de 1 à 3 kHz, nous avons défini 21 filtres de type Hadamard, dont les fréquences centrales s'échelonnent régulièrement tous les 100 Hz entre 1 et 3 kHz. La bande passante de chacun de ces filtres est de  $\Delta f = 100$  Hz. Chaque filtre de type Hadamard de bande-passante 100 Hz analyse un signal de durée temporelle  $\Delta \Theta = 1/\Delta f = 1/100$  de seconde. Dans cet intervalle de temps on dispose de 100 valeurs échantillonnées du signal. Pour une fréquence centrale du filtre de 1 kHz chaque période du filtre de type Hadamard ( $T = 1/1000$  de seconde) contiendra 10 échantillons. Dans ces conditions le calcul approché de la valeur moyenne sera relativement précis. Nous avons reporté

de type Hadamard (fig. 2) au voisinage du fondamental pour  $f = 1$  kHz. Le résultat du calcul concorde d'une manière satisfaisante (erreur inférieure à 5%) avec les prévisions théoriques que nous avons reporté sur la même figure.

Par contre, pour une fréquence centrale du filtre de 3 kHz, chaque période du filtre de type Hadamard ( $T = 1/3000$  de seconde) contiendra seulement 3 échantillons. Le calcul de la valeur moyenne discrète sera moins bon (erreur 10%) avec seulement 3 échantillons par période. Nous avons reporté sur la figure 5 les résultats du calcul numérique du module de la valeur moyenne de  $H(f, k, t) \exp(-2\pi j \phi t)$  pour  $f = 3$  kHz et  $\phi$  variant de 2900 à 3100 Hz par pas de 10 Hz. Le résultat du calcul s'écarte des prévisions théoriques qui est aussi reporté sur la même figure. En anticipant sur la conclusion nous pouvons affirmer dès à présent que l'approximation sera meilleure si le signal de départ est suréchantillonné avec  $\Delta T$  petit par rapport à  $T$ . La méthode de calcul numérique approché que nous proposons cherche à évaluer des intégrales en calculant des valeurs moyennes; le calcul sera d'autant plus précis que le nombre d'échantillons sera plus grand. Nous montrons dans le paragraphe suivant, que le suréchantillonnage n'augmente pas forcément la durée des calculs.

Nous avons reporté sur la figure 6 les amplitudes calculées à la fréquence centrale des 21 filtres de type Hadamard définis précédemment. L'erreur introduite par le calcul approché est de quelques pour cent.

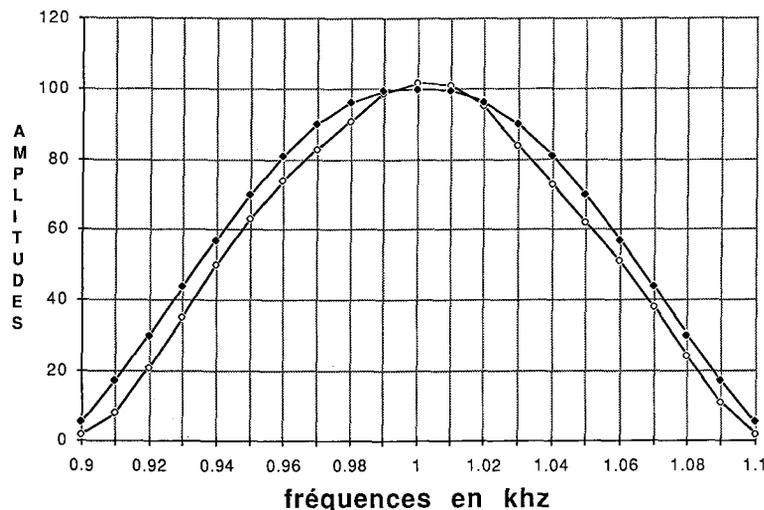


Fig. 4. — Spectre discret d'un filtre Hadamard de bande passante 100 Hz avec 10 échantillons par période.

sur la figure 4 les résultats du calcul numérique du module de la valeur moyenne de  $H(f, k, t) \exp(-2\pi j \phi t)$  pour  $f = 1$  kHz et  $\phi$  variant de 900 à 1100 Hz par pas de 10 Hz. Nous obtenons ainsi le module de la Transformée de Fourier du filtre

#### 4. Filtres de type Hadamard dérivés

Soit  $X(t)$  la primitive du signal  $x(t)$  et  $S(n\Delta T)$  la somme algébrique des  $n$  premières valeurs du signal

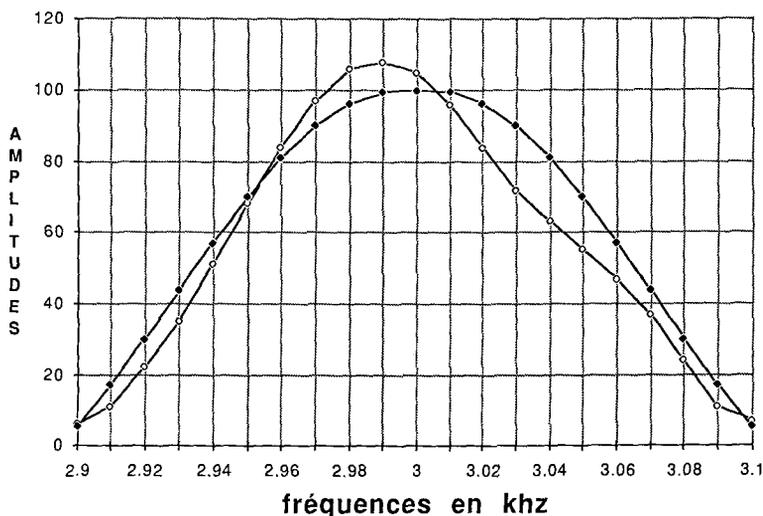


Fig. 5. - Spectre discret d'un filtre Hadamard de bande passante 100 Hz avec 3 échantillons par période.

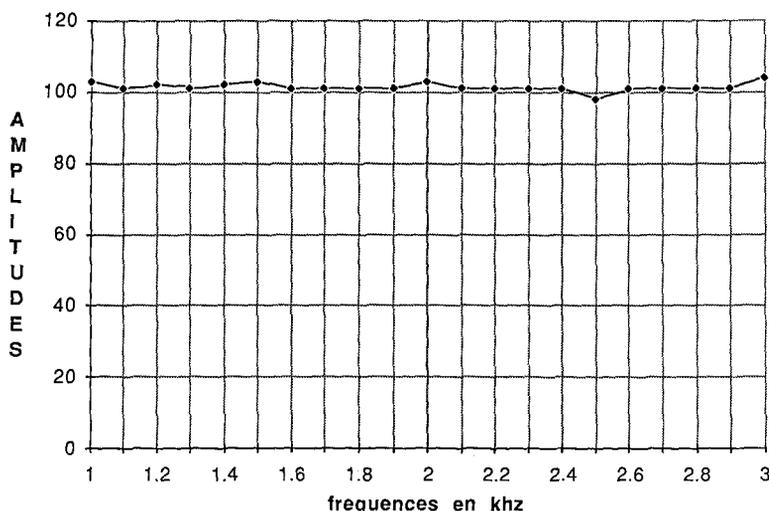


Fig. 6. - Amplitudes à la fréquence centrale des filtres Hadamard.

échantillonné.  $\Delta T S(n\Delta T)$  représente une évaluation numérique par la méthode des trapèzes de  $X(t)$ . Soit  $H(f, 1, t)$  un filtre de type Hadamard comportant une seule période et  $2m$  le nombre d'échantillons par période  $T$ . La valeur moyenne discrète du produit  $x(t)H(f, 1, t)$  fera intervenir des expressions de la forme :

$$\begin{aligned}
 [x(t)H(f, 1, t)] &= [-x\{(n+1)\Delta T\} - x\{(n+2)\Delta T\} - \dots \\
 &\quad - x\{(n+m-1)\Delta T\} + x\{(n+m+1)\Delta T\} \\
 &\quad + x\{(n+m+1)\Delta T\} + \dots \\
 &\quad + x\{(n+2m-1)\Delta T\}]/2m
 \end{aligned}$$

ou encore :

$$(1) \quad [x(t)H(f, 1, t)]2m = +S(n\Delta T) - 2S(n\Delta T + m\Delta T) + S(n\Delta T + 2m\Delta T).$$

La détermination préalable de la suite des valeurs  $S(n\Delta T)$  permet de remplacer  $2m$  additions algébriques de termes en  $x(n\Delta T)$  par seulement trois additions algébriques de termes en  $S(n\Delta T)$ . L'évaluation de la valeur moyenne du signal filtré par un filtre de type Hadamard comportant  $k$  périodes nécessitera  $(2k+1)$  additions algébriques de la suite  $S(n\Delta T)$ . On abrège considérablement la durée des calculs ultérieurs si on détermine au préalable la suite des valeurs  $S(n\Delta T)$  à l'aide de la récurrence simple :

$$S(n\Delta T) = S((n-1)\Delta T) + x(n\Delta T).$$

On peut aussi éviter le calcul numérique de la suite  $S(n\Delta T)$  en échantillonnant non pas le signal  $x(t)$  mais plutôt sa primitive  $X(t)$  obtenue en intégrant  $x(t)$  à l'aide d'un filtre analogique résistance-capacité.

L'expression (1) est la représentation échantillonnée approchée d'une fonction  $\mathfrak{S}(t)$  dépendant du temps :

$$\mathfrak{S}(t) = +S(t) - 2S(t+T/2) + S(t+T)$$

$\mathfrak{S}(t)$  est encore égale à l'expression suivante dans laquelle on introduit les distributions de Dirac :

$$\mathfrak{S}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau) \{ \delta(\tau-t) - 2\delta(\tau-t-T/2) + \delta(\tau-t-T) \} dt$$

ou encore en changeant de signe devant l'intégrale :

$$\mathfrak{S}(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau) \{ -\delta(\tau-t) + 2\delta(\tau-t-T/2) - \delta(\tau-t-T) \} dt.$$

Plus généralement, soient  $x(t)$  et  $y(t)$  deux fonctions dépendant du temps,  $X(t)$  une primitive de  $x(t)$  et  $y'(t)$  la dérivée de  $y(t)$ . Nous supposons de plus que le produit  $X(t)y(t)$  s'annule à l'infini. En intégrant par parties l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) dt$$

on obtient l'égalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) dt = 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)y'(t) dt.$$

Les intégrales  $h_{\cos}(f)$  et  $h_{\sin}(f)$  seront obtenues en remplaçant dans l'expression précédente  $y(t)$  par  $H_q(f, k, t)$  et  $H(f, k, t)$ .  $y'(t)$  est la dérivée au sens des Distributions des filtres de type Hadamard, et a pour expression :

$$H'(f, 1, t) = -\delta(\tau-t) + 2\delta(\tau-t-T/2) - \delta(\tau-t-T)$$

pour le filtre  $H(f, 1, t)$  comportant une seule période. Nous appellerons  $H'(f, 1, t)$  un filtre de type *Hadamard Dérivé* comportant une seule période. Nous définirons un filtre de type *Hadamard Dérivé* comportant  $k$  périodes par l'expression :

$$H'(f, k, t) = -\delta(\tau-t) + 2\delta(\tau-t-T/2) - 2\delta(\tau-t-T) + 2\delta(\tau-t-3T/2) - 2\delta(\tau-t-2T) + \dots + 2\delta(\tau-t-kT-T/2) - \delta(\tau-t-kT)$$

$H'(f, k, t)$  contiendra seulement  $(2k+1)$  termes.

$H'_q(f, k, t)$  se déduira de  $H'(f, k, t)$  en décalant l'origine des temps d'un quart de période. Il contiendra aussi seulement  $(2k+1)$  termes.

L'application des filtres de type *Hadamard Dérivé* au signal intégré  $-X(t)$  permet d'obtenir  $h_{\sin}(f)$  et  $h_{\cos}(f)$ .

En effet :

$$(2) \quad h_{\sin}(f) = X(t) - 2X(t+T/2) + 2X(t+T) - 2X(t+3T/2) + 2X(t+2T) - \dots - 2X(t+kT-T/2) + X(t+kT).$$

On obtiendra  $h_{\cos}(f)$  en remplaçant dans l'expression de  $h_{\sin}(f)$ ,  $t$  par  $t+T/4$ , c'est-à-dire en décalant le filtre d'un quart de période.

L'utilisation de la dérivée au sens des Distributions des filtres de type *Hadamard* comportant  $k$  périodes, permet de limiter le nombre d'additions à  $(2k+1)$  seulement pour calculer numériquement  $h_{\cos}(f)$  ou  $h_{\sin}(f)$ .

L'approximation numérique discrète de  $h_{\sin}(f)$  représentée par la formule (1) consiste à remplacer les valeurs théoriques de la forme  $X(t+nT)$  dans la formule (2) par les valeurs numériques approchées par la méthode des trapèzes de cette intégrale sous la

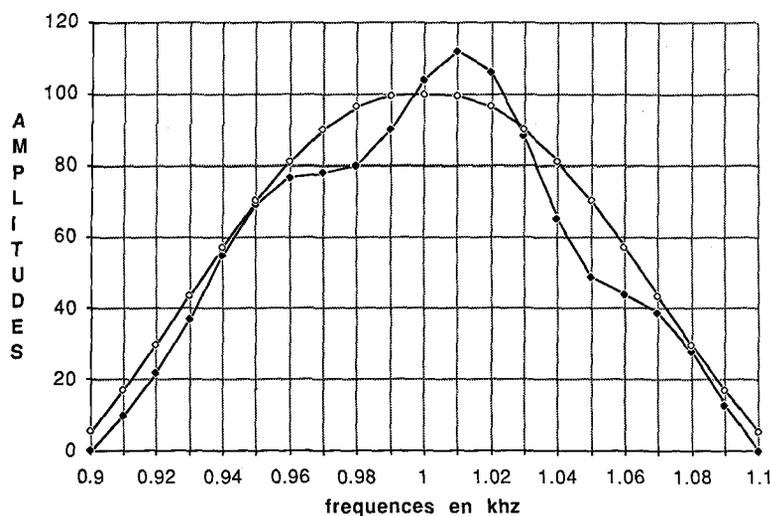


Fig. 7. - Spectre discret d'un filtre Hadamard dérivé approché avec 10 échantillons par période.

forme  $\Delta T S(t + p \Delta T)$  où  $t + p \Delta T$  est le plus près possible de  $t + n T$ . L'erreur introduite par le calcul numérique sera d'autant plus faible que l'échantillonnage sera plus serré; mais le nombre d'additions ( $2k + 1$ ) reste lui constant, il ne dépend que du nombre  $k$  de périodes définies par l'utilisateur. Le suréchantillonnage permet d'accroître la précision des calculs sans en augmenter la durée.

Si on remplace dans l'expression (2) les termes de la forme  $X(t)$  par l'expression dérivée  $x(t)$  on obtiendra le filtrage du signal dérivé  $x'(t)$  par un filtre de type Hadamard :

$$(3) \quad h'_{\sin}(f) = x(t) - 2x(t + T/2) + 2x(t + T) - 2x(t + 3T/2) + 2x(t + 2T) \dots - 2x(t + kT - T/2) + x(t + kT)$$

$h'_{\cos}(f)$  sera obtenu en décalant l'origine des temps d'un quart de période.

$h'_{\sin}(f)$  et  $h'_{\cos}(f)$  seront approchés en remplaçant les valeurs de  $x(t)$  par la valeur échantillonnée la plus voisine. Le suréchantillonnage permet d'accroître la précision du calcul du spectre de la dérivée du signal sans en augmenter la durée. L'utilisation de la formule (3) permet d'éviter le calcul numérique de la suite  $S(n\Delta T)$ .

La détermination du spectre du signal dérivé  $x'(t)$  permet de calculer, si besoin en est, le spectre de  $x(t)$  en divisant chaque amplitude du spectre dérivé par  $j\omega$ . Nous montrerons au paragraphe 7, dans l'analyse d'un signal de parole, que le spectre de la dérivée du signal est aussi intéressant à analyser que le spectre du signal lui-même. Le calcul du spectre de la dérivée permet d'effectuer automatiquement un filtrage passe-bas en minorant les basses fréquences.

Nous avons défini la fréquence centrale du filtre de type *Hadamard* et sa *bande passante* indépendamment de l'intervalle d'échantillonnage. Nous avons évalué numériquement les expressions (3) en remplaçant  $x(t)$  par la valeur  $x(n\Delta T)$  immédiatement voisine et inférieure.

Quand on ne dispose que de trois échantillons par période  $T$ , l'écart entre  $t$  et  $n\Delta T$  est en moyenne d'un tiers de période. Nous avons testé et vérifié la validité de l'approximation assez grossière ainsi réalisée. Dans ce but, nous avons calculé numériquement et tracé le gain complexe de ces filtres de type Hadamard dérivés approchés. Nous avons repris les mêmes fréquences et bande-passante que précédemment pour définir 21 filtres de type dérivé approché. Nous avons tracé leur spectre en calculant la valeur moyenne du produit de ces filtres par des réponses impulsionnelles sinusoïdales. Nous avons reporté sur les figures 7-8-9 les résultats du calcul numérique. L'examen de ces Transformées de Fourier montre que l'approximation adoptée distord les spectres. Les amplitudes à la fréquence centrale des filtres de type Hadamard, ainsi calculées sont précises à quelques pour cent près si on dispose de quatre ou cinq valeurs échantillonnées par période  $T$  du filtre. L'erreur atteint 10% pour trois valeurs échantillonnées par période  $T$ . Cette méthode de calcul approchée est intéressante dans la mesure où le signal est suréchantillonné avec un

intervalle  $\Delta T$  inférieur au cinquième de la période  $T$ . Dans ces conditions on n'introduit pas une erreur trop grande en remplaçant  $x(t)$  par  $x(n\Delta T)$ .

### 5. Vérification de la méthode de calcul des coefficients de la série de Fourier d'un signal connu

Nous nous proposons de vérifier dans ce paragraphe qu'on peut effectivement calculer à quelques pour cent près, les amplitudes des harmoniques de la *Série de Fourier*, à l'aide de filtres de type *Hadamard*, à condition de soustraire du signal initial les « raies principales » au fur et à mesure qu'on en a déterminé l'amplitude et la phase.

Nous avons traité numériquement un signal triangulaire représenté par la figure 10. La série de Fourier de ce signal est composée d'harmoniques impairs décroissants en module selon  $1/(2I + 1)^2$ . Nous avons calculé les amplitudes successives des 12 premiers harmoniques à l'aide de filtres de type Hadamard en utilisant une méthode de soustraction.

Le programme de vérification mis au point, appelle de manière itérative un sous-programme qui calcule successivement pour le  $I$ -ième harmonique de fréquence  $(2I + 1) * f$ , à chaque cycle :

- 1° la valeur moyenne discrète  $\mathcal{H}_{\sin}^D((2I + 1) f)$  de l'intégrale du produit  $x(t) H((2I + 1) f, k, t)$ ;
- 2° l'amplitude normée  $\mathcal{H}_{\sin}^D((2I + 1) f) * (2I + 2)^2$ ;
- 3° la nouvelle valeur du signal  $x(t)$  obtenue en retranchant le  $I$ -ième harmonique

$$x(t) = x(t) - A_0 \sin \{ 2\pi(2I + 1) f t \} / (2I + 1)^2.$$

Nous avons reporté sur la figure 11 les amplitudes normées  $\mathcal{H}_{\sin}^D((2I + 1) f) / (2I + 1)^2$  en fonction de  $I$ . Les filtres de type *Hadamard* permettent de calculer à quelques pour cent près les amplitudes des différents harmoniques de la *Série de Fourier*.

### 6. Transformée de Fourier

Nous avons étudié dans l'exemple précédent, le cas d'un signal dont le nombre de changements de signe est petit sur la durée considérée. Dans ce cas les « raies principales » de grande amplitude, qui imposent leurs changements de signes au signal de valeur moyenne nulle, sont situées dans les très basses fréquences. Pour un tel type de signal la méthode de calcul de la *Série de Fourier*, qui prend en compte tous les échantillons, est très appropriée. Nous proposons d'étudier maintenant un type de signal comportant de nombreux changements de signes. Les « raies principales » sont alors réparties dans tout le spectre. Nous utiliserons une méthode de calcul approché, dans laquelle le nombre d'échantillons utilisés est

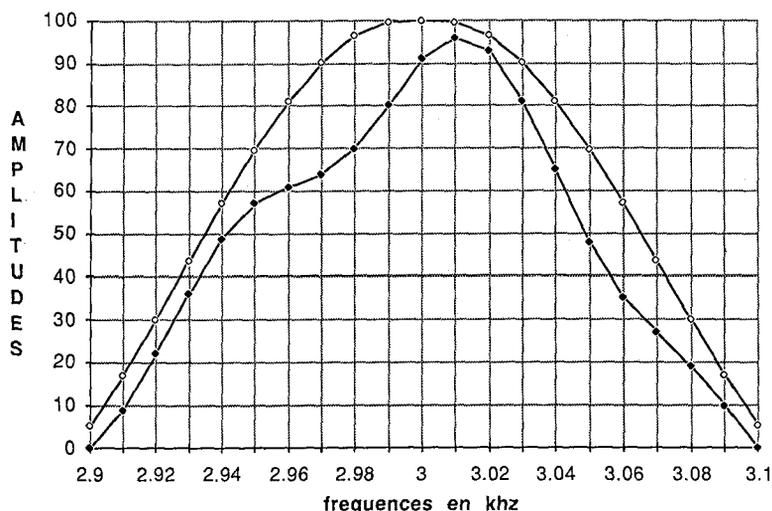


Fig. 8. — Spectre discret d'un filtre Hadamard dérivé approché avec 3 échantillons par période.

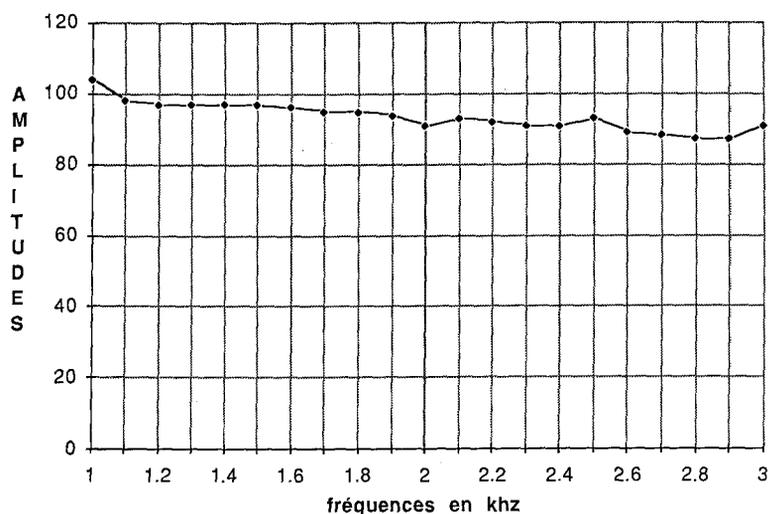


Fig. 9. — Amplitudes à la fréquence centrale des filtres Hadamard dérivés approchés.

fonction de la bande-passante du filtre d'Hadamard définie par l'utilisateur.

Nous avons généré un signal changeant souvent de signe, en ajoutant quatre sinusoïdes d'amplitudes respectives 1000, 100, 10 et 5 et de périodes (4 \* 5, 4 \* 7, 4 \* 9, 4 \* 11).

Ce signal est échantillonné sur 1024 valeurs. Pour se rapprocher des conditions expérimentales réelles où on dispose d'un signal quantifié sur 2<sup>n</sup> valeurs, le signal est quantifié sur plus ou moins 2<sup>10</sup> = 1024 valeurs entières. On effectue tous les calculs sur des entiers ce qui accélère le traitement numérique. Deux programmes ont été mis au point sur un micro-ordinateur *Macintosh*. Ils permettent l'un de comparer les performances du filtre de type Hadamard à la méthode classique, et l'autre de présenter et de développer une technique de calcul adapté à ce type de signal.

Dans le premier programme, un sous-programme calcule en fonction d'une période T donnée, à chaque cycle de calcul, les valeurs moyennes suivantes étendues sur une période T de la réponse impulsionnelle du filtre de type Hadamard :

$$1/k T \int_0^{kT} x(t) \sin (2 \pi t/T) dt$$

$$1/k T \int_0^{kT} x(t) \text{signe} \{ \sin (2 \pi t/T) \} dt.$$

Le programme principal évalue la valeur moyenne étendue sur k périodes T des intégrales précédentes. Il apprécie la convergence de la moyenne quand k croît, et l'amélioration de la précision apportée par le k-ième terme supplémentaire.

# APPLICATIONS

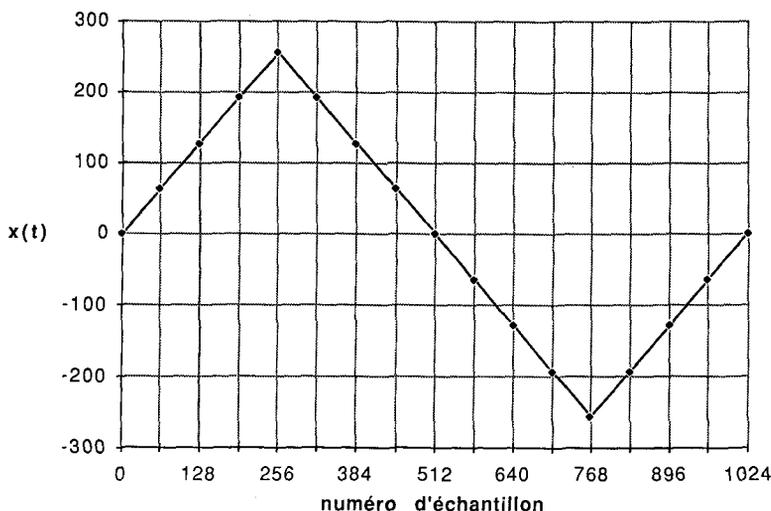


Fig. 10. — Signal  $x(t)$  dont on a calculé les coefficients de la série de Fourier.

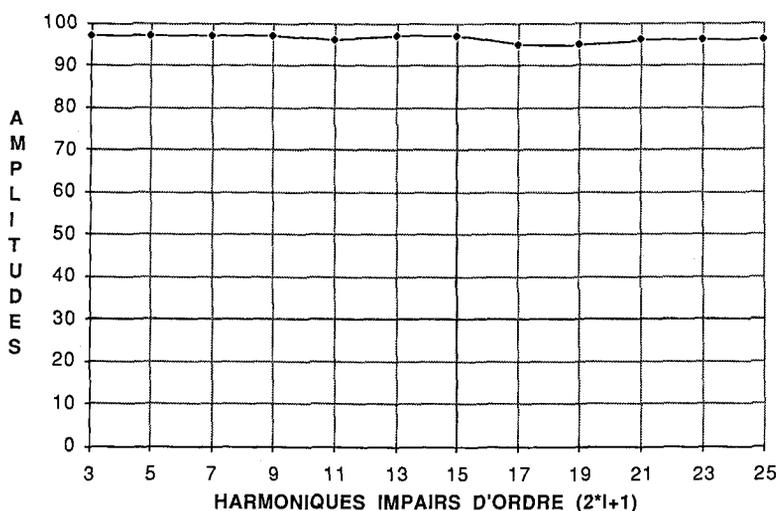


Fig. 11. — Coefficients normés de la série de Fourier du signal  $x(t)$  calculés par Hadamard.

Remarquons que le nombre de valeurs échantillonnées utilisées dans le calcul est variable en fonction de la période  $T$  choisie. Par ailleurs la Transformée de Fourier des filtres de type Hadamard dont la réponse impulsionnelle ne comporte que quelques périodes  $kT$  à une bande passante suffisamment large pour englober des fréquences voisines de  $f=1/T$ .

On observe les résultats suivants en faisant varier la période  $T$ .

1° La période  $T$  choisie n'est pas voisine d'une fréquence contenue dans le signal.

Dans ce cas, les moyennes successives divergent très rapidement. Au bout de trois ou quatre périodes seulement, on peut décider de l'existence ou de la non-existence d'une fréquence dans le signal pour la fréquence correspondante à l'aide de deux critères. D'une part l'erreur introduite par le  $k$ -ième terme supplémentaire dans l'évaluation de la moyenne

augmente au lieu de diminuer; d'autre part la valeur moyenne varie et change de signe. Ces deux critères ont été utilisés dans le second programme.

2° la période  $T$  est voisine d'une fréquence effectivement contenue dans le signal. Nous distinguerons trois cas selon l'amplitude de la fréquence :

(a) L'AMPLITUDE EST GRANDE (1 000)

Dans ce cas, les deux moyennes calculées à l'aide des deux types de filtres convergent très rapidement et de la même manière. Au bout de quatre ou cinq périodes seulement, on obtient une bonne approximation de la valeur limite moyenne.

Les deux méthodes de calcul offrent la même précision et le rapport des amplitudes est bien égal à  $4/\pi$ .

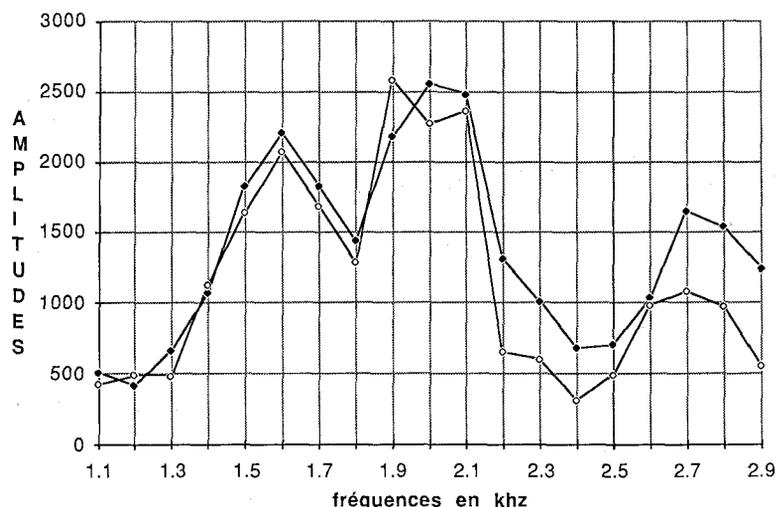


Fig. 12. — Spectre d'un signal de parole réel (blanc) et spectre Hadamard dérivé approché (noir).

Remarquons que l'amplitude principale impose son rythme, le passage à zéro du signal est fonction de cette période.

(b) L'AMPLITUDE EST INTERMÉDIAIRE (100)

Dans ce cas, les moyennes calculées à l'aide des deux types de filtres convergent lentement. Il faut intégrer sur une quinzaine de périodes de la réponse impulsionnelle avant d'obtenir la valeur moyenne limite. En effet, dans ce cas on intègre sur un intervalle de temps  $k T_m$  ( $a=100$ ) qui n'est pas égal à un multiple entier de la période principale  $k T_p$  ( $a=1000$ ). Les termes principaux intégrés sur une fraction de leur période introduisent une erreur de calcul systématique sur la valeur moyenne des termes secondaires. La précision de calcul obtenues par les deux types de filtres est comparable. On ne gagne rien en utilisant un filtre sinusoïdal beaucoup plus long à calculer que le filtre de type Hadamard. Nous préconisons d'éliminer les raies principales du signal en les soustrayant avant de calculer les raies secondaires.

(c) L'AMPLITUDE EST FAIBLE (10 et 5)

Les moyennes calculées aussi bien par le filtre sinusoïdal que par le filtre de type Hadamard ne convergent pas sur le nombre (1024) d'échantillons choisis. Les deux méthodes de calcul sont équivalentes. Il est impératif dans ce cas, de soustraire au préalable du signal les raies de grande amplitude quel que soit le type de filtre choisi.

Le second programme procède par soustraction. On commence par compter le nombre de valeurs échantillonnées entre deux passages au zéro du signal. Ce calcul permet de sélectionner un nombre très limité de périodes principales possibles  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ . On calcule le résultat du filtrage par Hadamard pour les périodes ainsi sélectionnées. L'étude de la convergence de la moyenne et de son éventuel changement de signe permet d'arrêter très vite le calcul en l'absence

de raie. Dans ce cas, on n'a traité que les premières valeurs échantillonnées. Par contre le calcul de l'amplitude est poursuivi jusqu'au bout, pour tenir compte de toutes les valeurs du signal échantillonné si la précision s'améliore. On soustrait du signal la fréquence correspondante avec l'amplitude ainsi calculée.

On constate que les raies d'amplitude moyenne sont ainsi éliminées au premier passage. On recommence tout le cycle de calcul une seconde fois pour éliminer les raies de très faible amplitude. Il ne reste après ce second traitement dans le signal que le bruit de quantification composé de 0, +1, -1. Les amplitudes des différentes raies calculées à l'aide du filtre de type Hadamard sont bien dans le rapport  $4/\pi$  des amplitudes introduites au départ dans le signal. En conclusion nous pouvons affirmer que les filtres de type Hadamard donnent des résultats comparables aux filtres sinusoïdaux pour calculer les raies principales. Le calcul des raies secondaires nécessite une soustraction préalable.

## 7. Signal de parole réel

Pour évaluer les performances de cette nouvelle méthode de calcul approché, nous avons traité un signal de parole échantillonné à 10 000 Hz fourni par M. Guerin de l'Institut de la Communication Parlée à Grenoble. Nous avons placé 21 filtres passe-bandes équidistants dans l'intervalle 1 000, 3 000 Hz. Un pouvoir séparateur de 100 Hz est obtenu à l'aide de fenêtres temporelles de 1/100 de seconde, soit 10 ms qui contiennent 100 valeurs échantillonnées. Nous avons calculé l'amplitude exacte de la Transformée de Fourier du signal dérivé, en multipliant les valeurs dérivées échantillonnées par  $\sin(2\pi\phi n\Delta T)$  et par  $\cos(2\pi\phi n\Delta T)$ , en prenant la valeur moyenne des intégrales de ces produits, et en calculant le module

de l'amplitude. Il faut bien noter que dans ce cas les deux intégrales sont intégrées sur le même intervalle de temps. Nous avons calculé par ailleurs les valeurs approchées des amplitudes à l'aide de la méthode développée précédemment. Nous avons utilisé deux filtres passe-bandes de type *Hadamard dérivé et approchés*, décalés d'un quart de période pour obtenir les deux composantes orthogonales de l'amplitude. Contrairement au cas précédent, ces deux composantes orthogonales ne sont pas intégrées sur le même intervalle de temps mais sur deux intervalles de temps décalés d'un quart de période. Les deux méthodes de calcul sont équivalentes si le spectre du signal analysé reste invariant pendant la durée de la fenêtre temporelle plus un quart de période.

Le programme détaillé utilisé pour calculer le spectre est donné en *appendice* (2). Ce programme tel qu'il est présenté n'est pas une version optimisée pour réduire la durée des calculs; il a été écrit en *Pascal* pour en faciliter la lecture, le contrôle et l'exécution. Nous avons reporté sur la même figure 12) les spectres calculés par les deux méthodes. On observe une bonne concordance entre le calcul approché et le calcul exact tant que le nombre de valeurs échantillonnées par période du filtre est supérieur à quatre. Le calcul du spectre de la dérivée du signal permet d'éliminer automatiquement les composantes basses fréquences du spectre qui sont de grande amplitude dans un signal de parole. On retrouve sans distorsion les fréquences de résonance des cavités vocales.

Il est possible que la mauvaise concordance entre le calcul exact et le calcul approché pour des fréquences supérieures à 2 kHz ait pour origine la différence entre les fenêtres temporelles utilisées par les deux méthodes. Nous avons implicitement admis tout au long de cet exposé que le spectre du signal  $x(t)$  reste constant au cours du temps. Ce n'est pas le cas pour un signal de parole dont le spectre varie continuellement au cours du temps.

Le calcul a été effectué sur un micro-ordinateur *Macintosh* équipé d'un microprocesseur MC68000. Le temps de calcul d'une addition est au plus de l'ordre de 1  $\mu$ s. Le calcul complet précédent nécessite 800 additions. Il s'effectuerait en moins de 1 ms, soit le dixième de la fenêtre temporelle choisie (10 ms). Avec la venue sur le marché grand public des microprocesseurs MC68020 le temps de calcul précédent est divisé par quatre; il s'effectuerait en moins de 200  $\mu$ s.

## 8. Conclusion

La méthode de calcul approché que nous proposons ne prétend pas rivaliser avec les méthodes classiques

de la FFT, mais dans de très nombreux cas elle permettra d'obtenir un résultat suffisamment approché avec d'une durée de calcul beaucoup plus faible.

Dans le cas de la parole, pour évaluer les spectres moyennés sur 10 ms, il est clair que la méthode que nous proposons peut très facilement donner lieu à une intégration sur circuit du fait de l'absence de multiplication. Le temps de calcul d'un tel spectre, compte tenu du nombre d'additions, s'étendrait à moins de 200  $\mu$ s en utilisant la méthode proposée.

Cette méthode ne prétend pas non plus remplacer les méthodes de calcul de la TFD sans multiplication (arithmétique distribuée) mais nous ne connaissons pas d'application pratique de cette récente théorie.

*Manuscrit reçu le 15 janvier 1987.*

## BIBLIOGRAPHIE

1. *Transformation de Fourier*  
R. M. BRACEWELL, *The Fourier Transform and its Applications*, MacGraw Hill, 1965.
- J. MAX, *Méthodes et Techniques de Traitement du Signal*, Masson, 4<sup>e</sup> éd, premier volume.
2. *Transformée de Fourier discrète (FFT)*  
E. O. BRIGHAM, *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, 1974.
- J. MAX, *Méthodes et Techniques de Traitement du Signal*, Masson, 4<sup>e</sup> éd., premier volume.
- J. LIFERMAN, *Les Méthodes Rapides de la Transformation du Signal*, Masson, 1974.
3. *Filtres de type Hadamard*  
K. RUMATOWSKI, Walsh Transform Applied to Digital Filtering, *Signal Processing*, 10, 1986, p. 253-263.
4. *Analyse d'un signal de parole*  
FLANAGAN, *Speech Analysis, Synthesis and Perception*, Springer Verlag, 1972.
5. *Calculs sans multiplication de la TFD*  
P. DUHAMEL, Algorithmes des Transformations Discrètes rapides pour convolutions cycliques et de convolutions cycliques pour Transformées Rapides, *Thèse de Doctorat d'État en Sciences Physiques*, Université de Paris-Sud, 9 septembre 1980.
- H. J. NUSSBAUER, *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*, Springer Verlag, 1982.