

Estimateur d'écartométrie

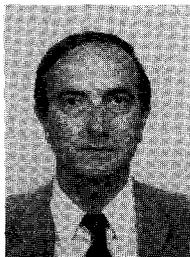
pour radar monopulsé

Estimation of deviation angle in monopulse radar

**Robert FORTET**

Le Centre THOMSON d'Applications Radars (LCTAR), 18-20, rue Grange-Dame-Rose, 78143 VÉLIZY-VILLACOUBLAY.

Ancien élève de l'École Normale Supérieure, Professeur Émérite à l'Université Pierre-et-Marie Curie, Correspondant de l'Académie des Sciences; Ingénieur-Conseil Le Centre THOMSON d'Application Radars.

**Jean ISNARD**

Le Centre THOMSON d'Applications Radars (LCTAR), 18-20, rue Grange-Dame-Rose, 78143 VÉLIZY-VILLACOUBLAY.

Chef du Service Développements Avancés du Centre THOMSON d'Applications Radar où il est entré après des études à l'Université de Nancy et à l'Université de Karlsruhe (Institut für Hochfrequenzphysik und Hochfrequenztechnik). Ingénieur ENSEM.

**Marie-José LAPOINTE**

Le Centre THOMSON d'Applications Radars (LCTAR), 18-20, rue Grange-Dame-Rose, 78143 VÉLIZY-VILLACOUBLAY.

Titulaire d'un diplôme d'ingénieur de l'École Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique (ENSEM) et d'un DEA en Automatique (Nancy, 1982). A travaillé de 1982 à 1986 au Centre THOMSON d'Application Radar dans le département « Développements exploratoires ».

RÉSUMÉ

Dans certains radars cohérents, la mise en œuvre de la technique monopulse nécessite non seulement le choix d'un algorithme stable de calcul de l'écart angulaire, mais aussi l'estimation du biais et de la variance en fonction du nombre d'impulsions : l'objet de cette communication est de fournir les bases théoriques permettant d'évaluer ces résultats.

MOTS CLÉS

Écartométrie, radar Doppler, monopulse, estimation.

SUMMARY

In some coherent radars, applying the monopulse technique requires not only a robust algorithm but also controlling the bias and variance of the estimated angle as a function of pulse number; the paper gives some results about them.

KEY WORDS

Doppler radar monopulse, estimation.

ZUSAMMENFASSUNG

Bei einigen Doppler Radaren setzt die Anwendung der Monopulstechnik nicht nur die Wahl eines stabilen Algorithmus zur Berechnung des Abweichungswinkels voraus, sondern auch eine Schätzung der Schräge und der Asymmetrie je nach Anzahl der Impulse. Die vorliegende Kommunikation hat zum Ziel diese Resultate aufzuzeigen.

STICHWÖRTER

Monopulstechnik.

1. Introduction

Pour de nombreuses applications, l'acquisition, la poursuite et la désignation précises de cibles à l'aide de radars Doppler cohérents nécessitent de doter ces radars d'une capacité de mesure angulaire fine, c'est-à-dire d'une précision angulaire de l'ordre du dixième de l'ouverture du faisceau d'antenne.

A l'intérieur du secteur angulaire de faible ouverture d'un faisceau d'antenne radar, la mesure précise de la direction d'une cible est faite couramment suivant deux méthodes : balayage cône et procédé monopulse.

La méthode de balayage cône du faisceau consiste à effectuer la mesure de manière séquentielle en appliquant au faisceau un mouvement de nutation autour d'un axe de référence différent de l'axe électrique; la direction est extraite par filtrage de la modulation du signal reçu. Cette méthode simple présente les inconvénients d'être lente et assez peu précise.

Le procédé monopulse effectue une mesure instantanée grâce à deux diagrammes d'antenne; l'un, antisymétrique (le diagramme différence) fournit un signal D fonction monotone de l'écart de la cible à l'axe de l'antenne, l'autre symétrique (le diagramme somme), donne un signal S maximal dans l'axe qui permet d'obtenir une écartométrie avec signe et de normaliser la mesure (fig. 1).

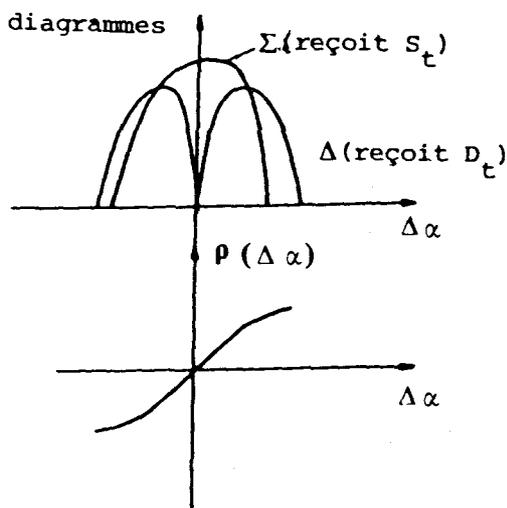


Fig. 1. — Procédé monopulse : diagrammes d'antenne.

En effet des deux diagrammes est extrait un discriminateur d'angle à l'intérieur du diagramme « somme » de l'antenne en faisant le rapport des amplitudes du diagramme différence sur celles du diagramme somme; la pente de cette fonction d'écartométrie $\rho(\Delta\alpha)$ est quasi constante dans la partie centrale du diagramme somme. De nombreux algorithmes sont utilisés pour extraire effectivement l'écart angulaire $\Delta\alpha$ à partir des deux signaux reçus simultanément par l'antenne sur ses deux voies somme et différence.

Il y a de nombreuses années déjà, qu'ont été exposés les avantages généraux de la technique monopulse, en vue de réaliser la fonction écartométrie-poursuite dans les radars [1]. Ses performances théoriques sont connues, en particulier :

(1) Le dépointage angulaire $\Delta\alpha$ de la cible par rapport à l'axe électrique de l'antenne est donné par la relation :

$$\frac{D}{S} = \rho \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0}$$

où D : amplitude du signal sur la voie différence; S : amplitude du signal sur la voie somme; ρ : coefficient de proportionnalité caractérisant l'antenne monopulse; α_0 : ouverture du faisceau d'antenne à 3 dB.

(2) L'écart-type sur la mesure d'écart angulaire $\Delta\alpha$ est donnée par relation :

$$\frac{\sigma_{\Delta\alpha}}{\alpha_0} = \frac{1}{\rho \sqrt{2n(S/B)}}$$

où S/B : rapport signal sur bruit par impulsion; n : nombre d'impulsions intégrées dans la mesure.

Les performances réelles dépendent de l'algorithme choisi pour le calcul de $\Delta\alpha$ à partir des signaux reçus et des effets des bruits thermiques des récepteurs.

En effet, sur la relation donnant $\Delta\alpha$ par exemple, on voit qu'en raison du bruit thermique inhérent à tout récepteur, à un instant donné, le signal reçu sur la voie somme peut être nul et donc rendre le rapport D/S théoriquement infini, c'est-à-dire très fluctuant en pratique. Une étude antérieure a permis de sélectionner un algorithme robuste vis-à-vis des fluctuations dues aux bruits thermiques [2].

Le problème restant est de déterminer l'effet des bruits sur la mesure d'écart et les fluctuations des poursuites en fonction du nombre d'impulsions reçues de la cible,

en particulier dans le cas où ce nombre est faible; cette situation se présente lorsque, pour des raisons opérationnelles, le temps d'observation des cibles doit être réduit. Ce problème, qui conduit nécessairement à l'étude d'un rapport de fonctions de variables aléatoires, a déjà reçu des solutions, mais seulement sous des hypothèses restrictives, par exemple, rapport signal sur bruit supérieur à 12 dB [4], ou encore, durée d'observation importante [3].

La présente communication apporte, pour un algorithme choisi, une solution à large validité.

Après définition de l'estimateur d'écartométrie choisi et des hypothèses de validité, la démarche consiste à examiner les propriétés de la loi bicirculaire liant les signaux des voies somme et différence puis à calculer l'expression de la variance de cet estimateur.

Des simulations faites avec 1024 et 16 échantillons confirment les expressions obtenues pour les deux premiers moments.

1. 1. DÉMARCHE SUIVIE

L'écart angulaire à mesurer $\Delta\alpha$ est directement proportionnel au rapport D/S des signaux reçus sur les voies différence et somme.

Le calcul de ce rapport D/S est fait en pratique sur plusieurs impulsions successives, dans le but de réduire les fluctuations en présence de bruit, en particulier d'éviter une valeur nulle au dénominateur (voie S) entraînant une valeur d'écart infinie. Parmi les algorithmes possibles pour représenter le signal d'écartométrie sont indiquées ci-après trois d'entre eux; ce sont trois combinaisons différentes des N échantillons successifs de chacun des signaux somme et différence à des instants t_i régulièrement espacés de l'intervalle d'échantillonnage Δ .

$$K_N^1 = \sum_{i=1}^N \frac{D(t_i)}{S(t_i)}$$

$$K_N^2 = \frac{\sum_{i=1}^N D(t_i) \cdot S(t_i)}{\sum_{i=1}^N S^2(t_i)}$$

$$K_N^3 = \frac{\sum_{i=1}^N \{ |D(t_i)| \cdot \text{SIGN}[S(t_i) \cdot D(t_i)] \}}{\sum_{i=1}^N |S(t_i)|}$$

SIGN (.) représente la fonction « signe de ».

Malgré la plus grande complexité, c'est le troisième algorithme d'estimation qui a été retenu car il s'est révélé être robuste lors de sa mise en œuvre pratique.

Car d'une part, la valeur absolue de $S(t_i)$ évite le risque d'avoir, comme pour l'algorithme K_N^1 , un dénominateur presque nul en présence de signaux très bruités et, d'autre part, l'algorithme K_N^3 ne nécessite

pas d'effectuer des calculs quadratiques comme pour l'algorithme K_N^2 , la fonction SIGN (.) étant par ailleurs très facile à réaliser.

Après formulation mathématique du problème (§ 1. 2), il s'agit de trouver les propriétés de cet estimateur d'écartométrie, c'est-à-dire de ses deux premiers moments, en fonction des deux paramètres principaux – nombre d'impulsions et rapport signal à bruit.

On suppose que le radar est cohérent, par conséquent que la vitesse de la cible se traduit sur les signaux reçus $D(t)$ et $S(t)$ par une fréquence Doppler ν . Il est supposé que les bruits B^D et B^S sur les voies différence et somme sont indépendants entre eux.

La forme de l'estimateur choisi conduit à rappeler à l'annexe II les propriétés des lois bicirculaires avant d'établir celles des moments des deux premiers ordres de l'estimateur (§ 3 et 4).

Les cas « extrêmes, bruit nul et signal nul », sont exposés au paragraphe 5 : les résultats confirment les valeurs trouvées expérimentalement.

Après un retour sur le cas général (§ 6), les résultats de simulations sont présentés au paragraphe 7 et les conclusions au paragraphe 8.

1. 2. DÉFINITION FORMELLE D'UN ESTIMATEUR D'ÉCARTOMÉTRIE

L'étude concerne un estimateur d'angle d'un radar « monopulse », dans la situation suivante; soient :

- $\Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$ connu (intervalle d'échantillonnage);
- $S, D \in \mathcal{R}$, $0 \leq D \leq S$: S et D sont fixés, mais inconnus (amplitudes du signal somme, du signal différence);
- $\nu \in \mathbb{R}$, fixé mais inconnu;
- t variable dans \mathbb{Z} .

A chaque $t \in \mathbb{Z}$ est associé un couple (B_t^S, B_t^D) de deux variables aléatoires complexes B_t^S, B_t^D (bruits des voies); on pose :

$$(1. 1) \quad S_t = S e^{2\nu i \nu \Delta t} + B_t^S, \quad D_t = D e^{2\nu i \nu \Delta t} + B_t^D;$$

on observe les valeurs prises par les couples (S_t, D_t) pour $t=1, \dots, N$ où N est un entier > 0 fixé connu; l'objectif est d'en déduire une estimation du rapport D/S par l'estimateur :

$$(1. 2) \quad K_N = \frac{\sum_{t=1}^N |D_t| \Omega_t}{\sum_{t=1}^N |S_t|}$$

où Ω_t a la signification suivante : si $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$, on pose :

$$(1. 3) \quad \Omega(Z_1, Z_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } |Z_1 + Z_2| > |Z_1 - Z_2| \\ 0 & \text{si } |Z_1 + Z_2| = |Z_1 - Z_2| \\ -1 & \text{si } |Z_1 + Z_2| < |Z_1 - Z_2| \end{cases}$$

et :

$$\Omega_t = \Omega(S_t, D_t)$$

1.3. HYPOTHÈSES

On fait les hypothèses que :

- les diverses variables aléatoires B_j^S, B_k^D ($j, k \in \mathbb{Z}$) sont mutuellement indépendantes;
- les B_t^S ($t \in \mathbb{Z}$) obéissent à la même loi de probabilité circulaire (cf. annexe I), de densité (en polaires)

$$f_S(r) dr \frac{d\theta}{2\pi};$$

$f_S(r)$ est bornée sur tout borné;

- les B_t^D ($t \in \mathbb{Z}$) obéissent à la même loi de probabilité circulaire; de densité (en polaires)

$$f_D(r) dr \frac{d\theta}{2\pi};$$

- $f_S(r), f_D(r)$, densités de probabilités respectives de $|B_t^S|, |B_t^D|$ admettent tous les moments intervenant par la suite.

On pose les notations :

$$\begin{aligned} E(|S_t|) &= a, & \mathcal{V}(S_t) &= P^2, \\ E(|D_t| | \Omega_t) &= b, & \mathcal{V}(|D_t| | \Omega_t) &= Q^2, \\ E[(|S_t| - a)(|D_t| | \Omega_t - b)] &= PQ\rho. \end{aligned}$$

1.4. RÉSULTATS

(1) Le moment $E(K_N^h)$ existe, au moins pour $h=0, 1, \dots, 2N-1$.

(2)

$$(1.4) \quad E(K_N) = \frac{b}{a} + \frac{P}{a^3 N} (bP - aQ\rho) + e_1(N),$$

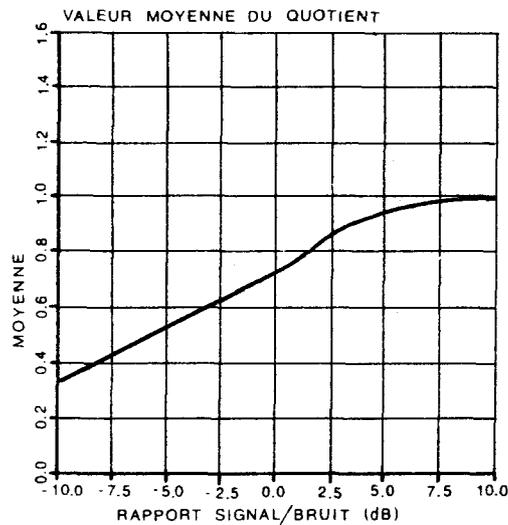
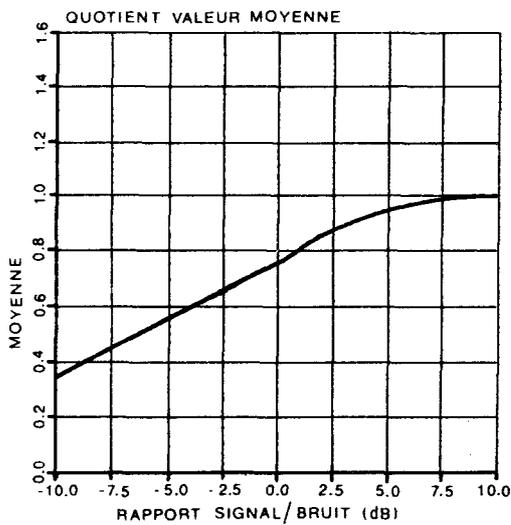


Fig. 2. - Comparaison entre $E(K_N)$ et b/a ($N=1024$). Estimateur d'écartométrie (1024 échantillons, 10 tirages de bruit).

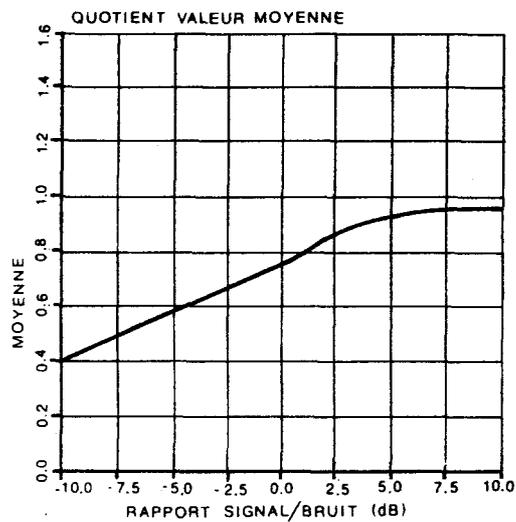
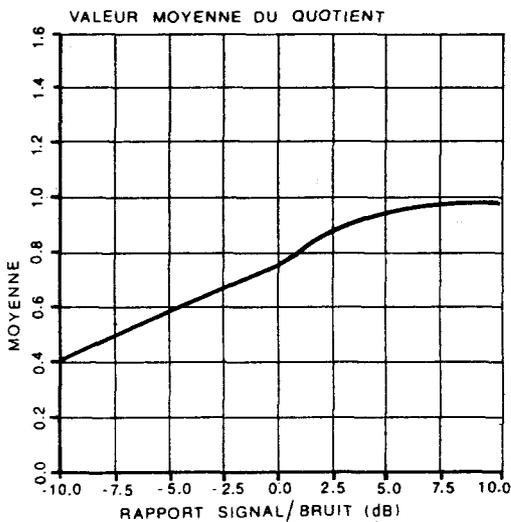


Fig. 3. - Comparaison entre $E(K_N)$ et b/a ($N=16$). Estimateur d'écartométrie (16 échantillons, 40 tirages de bruit).

où :

$$e_1(N) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

(3)

$$(1.5) \quad \mathcal{V}(K_N) = \frac{a^2 Q^2 - 2abPQ\rho + b^2 P^2}{a^4 N} + e_2(N),$$

où :

$$e_2(N) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

Des simulations permettent de conclure que $e_1(N)$, $e_2(N)$ sont négligeables même pour de faibles valeurs de N (par exemple, $N=16$), quel que soit le rapport signal/bruit.

Les simulations montrent que $E(K_N)$ et b/a ont des valeurs identiques à 10^{-5} près pour $N=1024$ et à 10^{-3} près pour $N=16$ quel que soit le rapport signal à bruit (fig. 2 : $N=1024$, fig. 3 : $N=16$).

La variance varie en $1/N$ avec de faibles erreurs. Sur la figure 4 ont été représentés : l'écart-type pour $N=1024$ échantillons (trait plein n° 1), ce même écart-type multiplié par 8 (trait pointillé) et l'écart-type pour $N=16$ échantillons (trait plein n° 3).

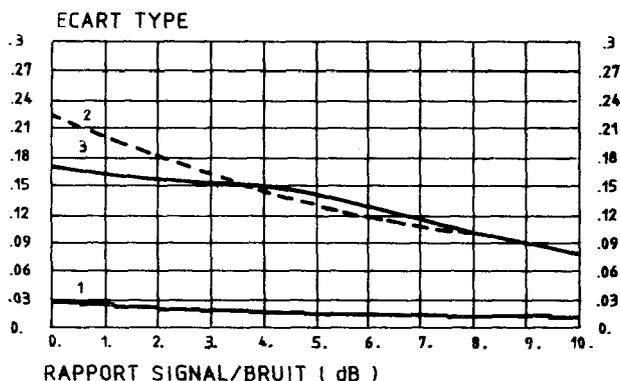


Fig. 4. - Ecart-type en fonction du rapport signal à bruit.

1 : 1024 échantillons, 10 exp.; $\hat{\sigma}(1024)$. 2 : 8 fois la courbe 1; $8 \cdot \hat{\sigma}(1024)$. 3 : 16 échantillons, 40 exp.; $\hat{\sigma}(16)$.

Les cas particuliers « bruits nuls », « signal nul » s'examinent aisément et ne font pas exception au cas général.

2. Premières conséquences de l'algorithme choisi

Un premier point est de remarquer que :

Lemme (2.1) : Si on pose : $Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ (représentations trigonométriques), $\Omega(Z_1, Z_2)$ peut se

définir par :

$$\Omega(Z_1, Z_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \cos(\theta_1 - \theta_2) > 0 \\ 0 & \text{si } \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ -1 & \text{si } \cos(\theta_1 - \theta_2) < 0, \end{cases}$$

d'où résulte que $\Omega(\dots)$ est bicirculaire (cf. annexe I).

Il résulte des hypothèses ci-dessus que :

(a) $\forall t \in \mathbb{Z}$, les v. a. S_t et D_t sont indépendantes entre elles;

(b) les divers couples (S_t, D_t) , ($t \in \mathbb{Z}$) sont mutuellement indépendants;

(c) si $\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_0$ désignent les lois de probabilité de S_0, D_0 respectivement, les lois $\mathcal{L}_{2\pi\nu\Delta t}, \mathcal{M}_{2\pi\nu\Delta t}$ de S_t, D_t se déduisent de $\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_0$ par la rotation d'angle $2\pi\nu\Delta t$ autour de O [origine du plan complexe (Ox, Oy)] : ceci parce que les lois de B_t^S, B_t^D , indépendantes de t , sont circulaires;

(d) les divers couples $(|S_t|, |D_t|)$ ($t \in \mathbb{Z}$), mutuellement indépendants par le (b), ont par le théorème (A. 2. 1) une loi indépendante de t ;

(e) les divers couples $(|S_t|, |D_t|, \Omega_t)$ ($t \in \mathbb{Z}$) de variables aléatoires entrant dans l'algorithme K_N^3 choisi, mutuellement indépendants par le (b), ont par le théorème (A. 2. 1) et le lemme (2. 1), une loi indépendante de t .

Notations

Pour la suite, les notations suivantes seront utilisées :

$$\begin{aligned} -L_N &= \sum_{t=1}^N |S_t|, \quad \bar{L}_N = (1/N) L_N; \\ -M_N &= \sum_{t=1}^N |D_t| \Omega_t, \quad \bar{M}_N = (1/N) M_N; \\ -M'_N &= \sum_{t=1}^N |D_t|, \quad \bar{M}'_N = (1/N) M'_N; \\ -E(|D_t|) &= b', \quad \mathcal{V}(|D_t|) = Q^2. \end{aligned}$$

Notons que :

(a) L_N (ou \bar{L}_N) et M'_N (ou \bar{M}'_N) sont indépendantes;

(b)

$$(2.1) \quad |M_N| \leq M'_N, \quad |\bar{M}_N| \leq \bar{M}'_N$$

$$(c) \quad K_N = M_N/L_N = \bar{M}_N/\bar{L}_N; \quad K'_N = \frac{M'_N}{L_N} = \frac{\bar{M}'_N}{\bar{L}_N}.$$

on a :

$$(2.2) \quad |K_N| \leq K'_N;$$

(e) définissons les v. a. X_N, Y_N, Y'_N par :

$$\begin{aligned} L_N &= Na + \sqrt{N} PX_N \\ M_N &= Nb + \sqrt{N} QY_N \\ M'_N &= Nb' + \sqrt{N} Q'Y'_N \end{aligned}$$

on a :

$$E(X_N) = E(Y_N) = 0; \quad E(X_N^2) = E(Y_N^2) = 1$$

$$E(X_N Y_N) = \rho, \quad E(X_N Y'_N) = 0;$$

d'autre part :

$$(2.3) \quad \begin{cases} K_N = \frac{Nb + \sqrt{N} Q Y_N}{Na + \sqrt{N} P X_N} \\ K'_N = \frac{Nb' + \sqrt{N} Q' Y'_N}{Na + \sqrt{N} P X_N} \end{cases}$$

Rappelons que :

Lemme (2.2) : Avec les hypothèses faites :

(a) lorsque $N \rightarrow +\infty$, la loi de probabilité du couple (X_N, Y_N) tend vers la loi de Gauss (\mathcal{G}), bidimensionnelle de densité :

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right];$$

(b) lorsque $N \rightarrow +\infty$, la loi de probabilité du couple (X_N, Y'_N) tend vers la loi de Gauss (\mathcal{G}') bidimensionnelle, de densité :

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(1/2)(x^2 + y^2)} \quad \blacksquare$$

3. Premiers résultats

Demandons-nous d'abord si, h désignant un entier > 0 , le moment $E(K_N^h)$ d'ordre h de K_N , existe.

D'après (2.1), ce moment existe, si $\exists E(K_N^h)$;

$$E(K_N^h) = E\left(\frac{M_N^h}{L_N^h}\right)$$

donc, vu l'indépendance mutuelle de L_N et M'_N ,

$$E(K_N^h) = E(M_N^h) \times E\left(\frac{1}{L_N^h}\right)$$

nos hypothèses impliquent l'existence de $E(M_N^h)$.

Désignons par $q_S(y)$ la densité de probabilité de $|S_t|$; $q_S(y)$ est donnée par (A.3.6), (A.3.7), en y faisant : $c = S$, $f(r) = f_S(r)$; la densité de probabilité de L_N est la N -ième convoluée $q_S(y)^{* (N)}$ de $q_S(y)$. Si $0 < \omega < S$, on a :

$$(3.1) \quad E\left(\frac{1}{L_N^h}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^h} q_S(y)^{* (N)} dy$$

$$= \int_0^\omega \frac{1}{y^h} q_S(y)^{* (N)} dy + \int_\omega^{+\infty} \frac{1}{y^h} q_S(y)^{* (N)} dy$$

La deuxième intégrale de (3.1) existe évidemment (c'est-à-dire a une valeur finie); désignant par $\bar{f}_S(S|\omega)$ une borne supérieure de $f_S(r)$ sur $(S-\omega, S+\omega)$ — borne dont nous admettons qu'elle est finie —, en vertu du lemme (A.3.2), la première intégrale de (3.1) est majorée par :

$$(3.2) \quad \frac{\bar{f}_S(S|\omega)}{(S-\omega)^N (2N-1)!} \int_0^\omega y^{2N-1-h} dy;$$

de là résulte le :

Lemme (3.1) : L'existence du moment $E(K_N^h)$ est assurée $\forall h = 0, 1, \dots, 2N-1$. \blacksquare

Reportons-nous à (2.2); soit $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement petit; soit $\omega > 0$, définissons les deux événements $\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_Y$ par :

$$\mathcal{E}_X = (|X_N| < \omega), \quad \mathcal{E}_Y = (|Y_N| < \omega),$$

auxquels s'associent leurs contraires respectifs $\bar{\mathcal{E}}_X, \bar{\mathcal{E}}_Y$; prenons ω assez grand pour que, calculées sur la loi (\mathcal{G}) de densité (2.4), les probabilités de $\bar{\mathcal{E}}_X, \bar{\mathcal{E}}_Y$ soient $< \varepsilon$; puis, prenons N assez grand pour que, calculées sur la vraie loi du couple (X_N, Y_N) , on ait :

$$P_r(\bar{\mathcal{E}}_X) < 2\varepsilon, \quad P_r(\bar{\mathcal{E}}_Y) < 2\varepsilon;$$

alors :

$$P_r(\mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_Y) = 1 - P_r(\bar{\mathcal{E}}_X \cup \bar{\mathcal{E}}_Y) > 1 - 4\varepsilon;$$

or, quand $\mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_Y$ est réalisé, le rapport

$$\frac{b + (Q/\sqrt{N}) Y_N}{a + (P/\sqrt{N}) X_N}$$

est arbitrairement voisin de b/a pourvu que N soit assez grand; donc :

Lemme (3.2) : En probabilité,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} K_N = \frac{b}{a}$$

Ce lemme (3.2), suggère que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(K_N) = \frac{b}{a}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{var}(K_N) = 0;$$

cependant, ces propriétés restent à prouver.

4. Étude de la variance de K_N

De (2.3) résulte :

$$K_N - \frac{b}{a} = \frac{1}{a^2 \sqrt{N}} \cdot \frac{a Q Y_N - b P X_N}{1 + (P/a \sqrt{N}) X_N}$$

donc :

$$E\left(\left|K_N - \frac{b}{a}\right|^2\right) = \frac{1}{a^4 N} E\left(\left|\frac{a Q Y_N - b P X_N}{1 + (P/a)\sqrt{N} X_N}\right|^2\right);$$

nous poserons :

$$\varphi(x, y) = \left|\frac{a Q y - b P x}{1 + (P/a)\sqrt{N} x}\right|^2,$$

$$\psi(x, y) = |a Q y - b P x|^2.$$

De (2.1) résulte :

$$Q|Y_N| \leq (b+b')\sqrt{N} + Q'Y'_N;$$

d'où puisque M'_N est toujours ≥ 0 , et que $b < b'$, on a toujours :

Lemme (4.1) :

$$\begin{aligned} \varphi(X_N, Y_N) &\leq a^2 [(b+b')\sqrt{N} + Q'Y'_N]^2 \\ &\quad + 2a|b|P|X_N|[(b+b')\sqrt{N} + Q'Y'_N] \\ &\quad + b^2 P^2 X_N^2 \end{aligned}$$

puisque $L_N \geq 0$, on a toujours :

$$(4.1) \quad X_N \geq -\frac{a}{P}\sqrt{N};$$

soit : $0 < \eta < a/P$; définissons les domaines \mathcal{D} , \mathcal{H} , \mathcal{I} , \mathcal{J} de \mathbb{R}^2 (c'est-à-dire : du plan Ox, Oy) suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ (x, y) \mid x \geq -\frac{a}{P}\sqrt{N} \right\}, \\ \mathcal{H} &= \left\{ (x, y) \mid -\eta\sqrt{N} \leq x \leq \frac{a}{P}\sqrt{N} \right\}, \\ \mathcal{I} &= \left\{ (x, y) \mid x > \frac{a}{P}\sqrt{N} \right\}, \\ \mathcal{J} &= \left\{ (x, y) \mid -\frac{a}{P}\sqrt{N} \leq x < -\eta\sqrt{N} \right\}; \end{aligned}$$

$\mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{J}$ sont disjoints, et : $\mathcal{D} = \mathcal{H} \cup \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$; les mêmes lettres $\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{J}$ désigneront, respectivement, les événements suivants, qui concernent X_N seul :

$$\begin{aligned} (X_N, Y_N) \in \mathcal{D}, & \quad (X_N, Y_N) \in \mathcal{H} \\ (X_N, Y_N) \in \mathcal{I}, & \quad (X_N, Y_N) \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

On remarque que les événements $\mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{J}$ ne concernent que X_N (et \mathcal{D} aussi).

Nous noterons $\lambda_N(x, y)$ la densité de probabilité du couple (X_N, Y_N) .

Nous avons donc à étudier :

$$(4.2) \quad E[\varphi(X_N, Y_N)]$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy$$

$$= H_N(\eta) + I_N(\eta) + J_N(\eta)$$

en posant :

$$\begin{aligned} H_N(\eta) &= \int_{\mathcal{H}} \varphi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy \\ I_N(\eta) &= \int_{\mathcal{I}} \varphi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy \\ J_N(\eta) &= \int_{\mathcal{J}} \varphi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Le calcul des intégrales H_N, I_N et J_N à l'annexe V conduit au théorème suivant :

Théorème (4.1) : Lorsque $N \rightarrow \infty$, on a :

$$(4.3) \quad E\left(\left|K_N - \frac{b}{a}\right|^2\right) \sim \frac{a^2 Q^2 - 2ab PQ\rho + b^2 P^2}{a^4 N}$$

ce qui implique :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(K_N) = \frac{b}{a}$$

et pour $N \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{V}(K_N) \leq \sim \frac{a^2 Q^2 - 2ab PQ\rho + b^2 P^2}{a^4 N}$$

Ainsi, pour N grand, K_N est un estimateur « satisfaisant » du rapport b/a .

5. Cas extrêmes

Pour la suite, posons :

$$(5.1) \quad \mu_N = E(K_N), \quad \sigma_N^2 = \mathcal{V}(K_N)$$

notons que (4.3) s'écrit :

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_N^2 + \left(\mu_N - \frac{b}{a}\right)^2 &\sim \frac{a^2 Q^2 - 2ab PQ\rho + b^2 P^2}{a^4 N}, \\ N &\rightarrow +\infty \end{aligned} \right.$$

Cas particulier des bruits nuls

Supposons les « bruits » du paragraphe 1, B_j^S, B_k^D nuls $\forall j, k$. Alors :

$$\begin{aligned} |S_i| &= S, & |D_i| &= D, & \Omega_i &= 1 \\ a &= S, & P &= 0, & b &= D, & Q &= 0 \end{aligned}$$

et :

$$K_N = \frac{D}{S}, \quad \mu_N = \frac{D}{S}, \quad \sigma_N = 0$$

on peut considérer que (5.2) reste valide.

Cas particulier du « signal » nul

Supposons :

$$(5.3) \quad S = D = 0;$$

écrivons en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} B_t^S &= R_t^S e^{i\theta_t^S}, & R_t^S &= |B_t^S|, \\ B_t^D &= R_t^D e^{i\theta_t^D}, & R_t^D &= |B_t^D| \end{aligned}$$

alors :

$$|S_t| = R_t^D, \quad |D_t| = R_t^D$$

d'autre part, d'après le lemme (2.1) :

$$\Omega_t = \begin{cases} 1 & \text{si } \cos(\theta_t^S - \theta_t^D) > 0 \\ -1 & \text{si } \cos(\theta_t^S - \theta_t^D) < 0 \end{cases}$$

donc, vu la circularité des lois de B_t^S et B_t^D :

(a) les trois v. a. $|S_t|$, $|D_t|$, Ω_t sont mutuellement indépendantes;

(b)

$$(5.4) \quad P_r(\Omega_t = 1) = P_r(\Omega_t = -1) = 1/2.$$

On a avec (5.4) :

$$(5.5) \quad \begin{cases} a = E(R_t^S), & P^2 = \mathcal{V}(R_t^S) \\ b = E(R_t^D \Omega_t) = E(R_t^D) E(\Omega_t) = 0 \\ Q^2 = E(R_t^D \Omega_t^2) - b^2 = E(R_t^D) \\ \rho = 0 \end{cases}$$

Étudions directement

$$K_N = \frac{M_N}{L_N}$$

L_N et M_N sont des v. a. indépendantes :

$$E(M_N) = N b = 0; \quad E(M_N^2) = N Q^2;$$

or :

$$\mu_N = E(K_N) = E(M_N) \times E\left(\frac{1}{L_N}\right) = 0$$

$$\sigma_N^2 = E(K_N^2) = E(M_N^2) \times E\left(\frac{1}{L_N^2}\right) = N Q^2 E\left(\frac{1}{L_N^2}\right).$$

Notre problème revient à étudier $E(1/L_N^2)$. Posant comme ci-dessus :

$$L_N = a N \left(1 + \frac{P}{a \sqrt{N}} X_N\right)$$

Il vient :

$$\sigma_N^2 = \frac{Q^2}{a^2 N} E \left[\frac{1}{(1 + (P/a \sqrt{N}) X_N)^2} \right]$$

Il suffit de reprendre pas à pas la méthode du paragraphe 4 et de l'annexe V, pour trouver que :

$$(5.6) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{(1 + (P/a \sqrt{N}) X_N)^2} \right] = 1.$$

D'où finalement :

$$(5.7) \quad \text{pour } N \rightarrow +\infty,$$

$$\sigma_N \sim \frac{Q}{a \sqrt{N}},$$

qui montre que (5.2) reste valide.

6. Retour au cas général

Il a été montré au paragraphe 4 (th. 4.1) que, pour N grand, K_N est effectivement un estimateur « satisfaisant » du rapport b/a ; il s'agit de calculer un terme supplémentaire du développement de $E\{K_N\}$ de manière à connaître la tendance de sa variation [démonstration de l'équation (1.4) du paragraphe 1.4].

Nous savons que :

$$(6.1) \quad K_N - \frac{b}{a} = \frac{1}{a^2 \sqrt{N}} \frac{a Q Y_N - b P X_N}{1 + (P X_N / a \sqrt{N})}.$$

Définissons les fonctions :

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1 + (P/a \sqrt{N}) x}, \\ B(x, y) &= a Q y - b P x \end{aligned}$$

et cherchons à évaluer :

$$(6.2) \quad \mathcal{O} = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) B(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy.$$

Notons d'abord que [cf. lemme (4.1)] :

$$(6.3) \quad |B(X_N, Y_N)| \leq a(b+b') \sqrt{N} + a Q' Y_N + |b| P |X_N|.$$

Nous poserons :

$$(6.4) \quad B'(x, y) = a(b+b') \sqrt{N} + a Q' y + |b| P |x|.$$

Soit η fixe avec : $0 < \eta < 1$; définissons les domaines :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq -\eta \frac{a \sqrt{N}}{P} \right\} \\ \mathcal{J} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < \frac{a \sqrt{N}}{P} \right\}. \end{aligned}$$

et les intégrales correspondantes :

$$\begin{aligned}\bar{H}_N(\eta) &= \int_{\bar{\mathcal{H}}} A(x) B(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy \\ \bar{J}_N(\eta) &= \int_{\bar{\mathcal{J}}} A(x) B(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\mathcal{O} = \bar{H}_N(\eta) + \bar{J}_N(\eta).$$

Sur $\bar{\mathcal{H}}$, on a par la formule de Taylor :

$$(6.5) \quad A(x) = 1 - \frac{Px}{a\sqrt{N}} + \frac{P^2 x^2}{a^2 N} - \frac{P^3 x^3}{a^3 N^{3/2} [1 + \theta(x)(Px/a\sqrt{N})]^4}$$

avec : $0 < \theta(x) < 1$.

Posons :

$$(6.6) \quad \Omega(x) = 1 - \frac{P}{a\sqrt{N}} x + \frac{P^2}{a^2 N} x^2$$

$$(6.7) \quad \bar{H}_1 = \int_{\bar{\mathcal{H}}} \Omega(x) B(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy$$

$$(6.8) \quad \bar{H}_2 = \frac{-P^3}{a^3 N^{3/2}} \times \int_{\bar{\mathcal{H}}} \frac{x^3 B(x, y)}{[1 + \theta(x)(Px/a\sqrt{N})]^4} \lambda_N(x, y) dx dy$$

de sorte que :

$$(6.9) \quad \bar{H}_N | \eta) = \bar{H}_1 + \bar{H}_2.$$

Étude de \bar{H}_2

En tenant compte de (6.4), de ce que $\bar{\mathcal{H}} \subset \mathcal{D}$, de ce que $E(Y'_N) = 0$, on trouve :

$$|\bar{H}_2| \leq \frac{a(b+b')P^3}{a^3(1-\eta)^4 N} E(|X_N|^3) + \frac{|b|P^4}{a^3(1-\eta)^4 N^{3/2}} E(|X_N|^4);$$

tenant compte de l'annexe IV, on a la limitation, valable dès que N est assez grand :

$$(6.10) \quad |\bar{H}_2| \leq \frac{3a(b+b')P^3}{a^3(1-\eta)^4 N} + \frac{3|b|P^4}{a^3(1-\eta)^4 N^{3/2}}$$

Étude de \bar{H}_1

Posons d'abord :

$$\bar{H}_0 = \int_{\infty} \Omega(x) B(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy$$

il vient :

$$(6.11) \quad \bar{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{b}{a} P^2 - PQP \right) + \frac{P^2}{aN} \left[QE(X_N^2 Y_N) - \frac{b}{a} PE(X_N^3) \right].$$

Maintenant posons :

$$\bar{H}_3 = \int_{\bar{\mathcal{J}}} \Omega(x) B(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy$$

avec (6.3), (6.4) et puisque sur $\bar{\mathcal{J}}$: $|x| < a\sqrt{N}/P$, on a :

$$|\bar{H}_3| \leq 3 \int_{\bar{\mathcal{J}}} [a(b+b')\sqrt{N} + aQy + |b|a\sqrt{N}] \lambda_N(x, y) dx dy$$

puisque Y'_N et X_N sont indépendantes et que : $E(Y'_N) = 0$, ceci se réduit à :

$$|\bar{H}_3| \leq 3[(b+b') + |b|] a\sqrt{N} \left(X_N < \eta \frac{a\sqrt{N}}{P} \right);$$

d'après l'inégalité de Tschebichev et annexe IV, on a donc :

$$(6.12) \quad |\bar{H}_3| \leq \frac{9}{a^3 N^{3/2}} [2|b| + b']$$

dès que N est assez grand. Or :

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_0 - \bar{H}_3;$$

il en résulte :

Lemme (6.1) : $\forall 0 < \eta < 1$ fixé, si $N \rightarrow +\infty$:

$$\bar{H}_N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{b}{a} P^2 - PQP \right) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Étude de $J_N(\eta)$

Introduisons les domaines :

$$\bar{\mathcal{J}}_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{-a\sqrt{N}}{P} < x \leq \frac{\omega}{P\sqrt{N}} - \frac{a\sqrt{N}}{P} \right\}$$

$$\bar{\mathcal{J}}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{\omega}{P\sqrt{N}} - \frac{a\sqrt{N}}{P} < x < -\eta \frac{a\sqrt{N}}{P} \right\}$$

où ω , avec : $0 < \omega < S$, est fixé quelconque; introduisons les intégrales correspondantes :

$$\bar{J}_1 = \int_{\bar{\mathcal{J}}_1} A(x) B(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy;$$

$$\bar{J}_2 = \int_{\bar{\mathcal{J}}_2} A(x) B(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy.$$

En calquant les méthodes du paragraphe 4 et de l'annexe V, relatives aux intégrales J, on voit que pour $N \rightarrow +\infty$:

(a) $|\bar{J}_1|$ tend vers 0, plus vite que toute puissance > 0 de $1/N$;

(b) $|\bar{J}_2| = O(1/N^{3/2})$;

donc :

Lemme (6.2) : Si $N \rightarrow +\infty$,

$$\bar{J}_N(\eta) = O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

D'où le :

Théorème (6.1) : Si $N \rightarrow +\infty$

$$\mu_N = \frac{b}{a} + \frac{P}{a^3 N} (bP - aQP) + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

7. Résultats de simulations

7.1. MOMENT DU PREMIER ORDRE DE L'ESTIMATEUR K_N

(A) Écrivons (1.4) :

$$E(K_N) = \frac{b}{a} + \omega_1(N);$$

la théorie prouve :

$$\omega_1(N) = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{pour } N \rightarrow \infty;$$

mais elle ne renseigne pas sur $\omega_1(N)$ pour les valeurs de N qui ne sont pas grandes; et à ce sujet le rapport signal/bruit peut influencer sur ce point. Une première série de simulations a eu pour objet d'apporter de l'information sur ces points; les opérations effectuées sont les suivantes :

(1) On a obtenu des estimations fiables \hat{a} , \hat{b} de a et de b (et par suite une estimation \hat{b}/\hat{a} de b/a) par les moyennes empiriques \hat{a} , \hat{b} d'un grand nombre (1024) d'échantillons indépendants de $|S_i|$ d'une part, de $|D_i| \Omega_i$ d'autre part.

(2) Pour $N=1024$, on a estimé $E(K_{1024})$ par la moyenne empirique $\hat{E}(K_{1024})$ de 10 échantillons indépendants de K_{1024} ; et comparé cette estimation à celle ci-dessus de b/a ; il en résulte une estimée $\hat{\omega}_1(1024)$ de $\omega_1(1024)$.

(3) Pour $N=16$, on a estimé $E(K_{16})$ par la moyenne empirique $\hat{E}(K_{16})$ de 40 échantillons indépendants de K_{16} ; il en résulte une estimée $\hat{\omega}_1(16)$ de $\omega_1(16)$.

(4) Ces trois opérations ont été répétées pour diverses valeurs du rapport signal/bruit, conformément au tableau I.

7.2. MOMENT DU DEUXIÈME ORDRE DE L'ESTIMATEUR K_N

Avec

$$A^2 = \frac{a^2 Q^2 - 2abQP + b^2 P^2}{a^4},$$

écrivons (1.5);

$$\sigma_N = \frac{A}{\sqrt{N}} [1 + \omega_2(N)];$$

la théorie prouve que

$$\omega_2(N) = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

si $N \rightarrow +\infty$, mais là encore, elle ne renseigne pas sur $\omega_2(N)$ pour les valeurs petites et moyennes de N : pour obtenir quelque information à ce sujet, on a par simulation procédé aux opérations suivantes :

(1) Estimation $\hat{\sigma}(1024)$ de $\sigma(1024)$, obtenue par la variance empirique de 10 échantillons indépendants de K_{1024} .

(2) Estimation $\hat{\sigma}(16)$ de $\sigma(16)$ obtenue par la variance empirique de 40 échantillons indépendants de K_{16} .

(3) Calcul de

$$\frac{\hat{\sigma}_{16} - 8 \hat{\sigma}_{1024}}{8 \hat{\sigma}_{1024}} = \hat{\omega}_2;$$

$\omega_2(1024)$ étant négligeable, $\hat{\omega}_2$ donne l'ordre de grandeur de $\omega_2(16)$.

Les trois opérations ont été effectuées pour diverses valeurs du rapport signal/bruit, y compris dans le cas « bruit pur »; les résultats sont consignés au tableau II. Les fluctuations aléatoires de simulation sont sensibles; mais il est clair que, même pour une valeur de N aussi petite que $N=16$, $\omega_2(16)$ ne dépasse 10% que pour les très petits rapports signal/bruit.

Les mêmes estimations sont présentées graphiquement à la figure 4; la figure 5 donnent les mêmes éléments, pour des valeurs plus grandes du rapport signal/bruit (en décibels, de 8 à 20).

ÉCART TYPE

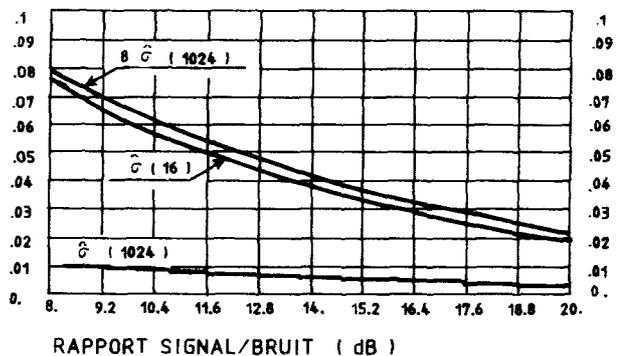


Fig. 5.

Les données numériques, figurant au tableau I, sont présentées en graphiques aux figures 2 et 3; pour N grand ($N=1024$), elles confirment ce qui était attendu; l'apport nouveau est que même pour la petite

TABLEAU I

\hat{b}/\hat{a}	$\hat{E}(K_{1,024})$	$\hat{\omega}_1 (1024)$	$\hat{E}(K_{1,6})$	$\hat{\omega}_1 (16)$	S/B (dB)
100 408	100 412	$4 \cdot 10^{-5}$	099 048	$-16,6 \cdot 10^{-3}$	10
100 383	100 389	$6 \cdot 10^{-5}$	098 868	$-15,5 \cdot 10^{-3}$	8
097 082	097 087	$5 \cdot 10^{-5}$	095 212	$-18,7 \cdot 10^{-3}$	5
090 172	090 180	$8 \cdot 10^{-5}$	089 970	$-2 \cdot 10^{-3}$	3
079 951	079 958	$7 \cdot 10^{-5}$	079 565	$-3,9 \cdot 10^{-3}$	1
074 448	074 453	$5 \cdot 10^{-5}$	075 829	$+13,8 \cdot 10^{-3}$	0
034 921	034 934	$13 \cdot 10^{-5}$	038 948	$+4 \cdot 10^{-3}$	-10

Ainsi, ces figures 2 et 3 montrent la robustesse de l'algorithme choisi dans le cas d'un faible nombre, 16, d'impulsions sur l'objectif et même pour de faibles rapports signal à bruit; ce résultat illustre bien le fait que conformément au théorème (H, I) K_N est un estimateur « satisfaisant » et en outre rapidement convergent.

TABLEAU II

Signal/bruit (dB)	$\hat{\sigma} (1024)$	$8 \hat{\sigma} (1024)$	$\hat{\sigma} (16)$	$\hat{\omega}_2$
10	0,010	0,080	0,0797	$-0,37 \cdot 10^{-2}$
8	0,0125	0,100	0,0995	$-0,50 \cdot 10^{-2}$
5	0,0162	0,1296	0,1404	$+8,33 \cdot 10^{-2}$
3	0,0204	0,1632	0,1530	$-6,25 \cdot 10^{-2}$
1	0,0251	0,2008	0,1656	$-17,53 \cdot 10^{-2}$
0	0,0282	0,2256	0,1650	$-26,86 \cdot 10^{-2}$
-10	0,0183	0,1464	0,2400	$+36,93 \cdot 10^{-2}$
Bruit pur	0,033	0,264	0,253	$-4,17 \cdot 10^{-2}$

valeur $N = 16$, $\omega_1 (.)$ reste négligeable; ceci, d'ailleurs, quel que soit le rapport signal/bruit, qui a cependant une influence réelle.

8. Conclusion

Les deux premiers moments de la variable aléatoire représentant l'écart angulaire de la cible par rapport à l'axe électrique d'une antenne monopulse, ont été calculés dans le cas où le nombre d'impulsions reçues est grand; les simulations confirment les expressions théoriques obtenues en particulier pour de faibles rapports signal à bruit.

Conformément à la théorie, cet écart angulaire estimé avec l'algorithme choisi a un écart-type décroissant comme la racine carrée du nombre d'impulsions servant à son calcul; ceci permet d'obtenir des valeurs peu fluctuantes d'écart angulaire même avec un petit nombre d'impulsions, 16 par exemple.

Remerciements

Les résultats figurant dans cet article sont extraits d'une étude financée avec le concours de la Direction des Recherches, Études et Techniques (DRET, Groupe 2), qui a bien voulu en autoriser la publication et que nous remercions.

Manuscrit reçu le 13 décembre 1985.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. DUNN et D. HOWARD, Precision tracking with mono-pulse radar, *Electronics*, 22, 1980, p. 51-56.
- [2] Document interne LCTAR, référence COR 13 021.
- [3] I. KANTER, The ratios of functions of random variables, *IEEE Trans. on AES*, 13, 1977.
- [4] S. SHARENSEN, Angle estimation accuracy with a mono-pulse radar in the search mode, *IRE Trans. ANE*, 9, 1962.

Annexe I

Loi de probabilité bicirculaire

On considère le plan complexe (Ox, Oy) (Ox =axe des réels; Oy =axe des imaginaires purs); équivalent à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

$Z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous forme trigonométrique :

$$Z = r e^{i\theta}; \quad r = |Z| \geq 0;$$

θ , argument de Z , défini à $2k\pi$ près.

Une fonction réelle de Z , c'est-à-dire une fonction $f(r, \theta)$ de (r, θ) , est *circulaire*, si elle ne dépend pas de θ .

Soient $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$ avec les représentations :

$$Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad Z_2 = r_2 e^{i\theta_2};$$

une fonction réelle de (Z_1, Z_2) , c'est-à-dire une fonction $f(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ de $(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ est *bicirculaire*,

si θ_1 et θ_2 n'y interviennent que par leur différence $(\theta_1 - \theta_2)$.

Considérons une loi de probabilité \mathcal{L}_0 sur \mathbb{C} , c'est-à-dire la répartition d'une masse totale 1, sur (Ox, Oy) ; soit \mathcal{L}_α la loi ou répartition déduite de \mathcal{L}_0 par la rotation d'angle α autour de O. Si \mathcal{L}_0 admet une densité, soit $f(r, \theta)$ en représentation trigonométrique, \mathcal{L}_α a pour densité $f(r, \theta - \alpha)$.

Disons que \mathcal{L}_0 est circulaire, si $\forall \alpha, \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_0$. Dans le cas où \mathcal{L}_0 admet la densité $f(r, \theta)$, cela équivaut à : $f(r, \theta) = f(r)$ est circulaire, et ne dépend pas de θ .

Soit Z une variable aléatoire (v. a.) complexe; soit en notations trigonométriques (ou coordonnées polaires) : $Z = R e^{i\Theta}$ avec :

$$R = |Z|,$$

$\Theta = \text{argument de } Z$.

Si la loi de probabilité \mathcal{L}_0 de Z est circulaire :

- (a) les v. a. R et Θ sont indépendantes;
- (b) Θ est de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$, plus généralement sur tout intervalle d'amplitude 2π .

Si \mathcal{L}_0 admet une densité, nous écrivons son élément différentiel (en coordonnées polaires) sous la forme :

$$f(r) dr \frac{d\theta}{2\pi}$$

Annexe II

Transformation des lois de probabilité bicirculaires

Soient : $\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_0$ deux lois de probabilité sur (Ox, Oy) ; $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha$ les lois qui s'en déduisent respectivement par la rotation α . Soient Z_1, Z_2 deux variables aléatoires (v. a.) complexes, de lois respectives $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha$ et indépendantes; de sorte que la loi du couple (Z_1, Z_2) est la loi produit $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{M}_\alpha$.

Considérons des fonctions réelles bicirculaires de (Z_1, Z_2) par exemple les deux fonctions $a(Z_1, Z_2)$ et $b(Z_1, Z_2)$; définissons les v. a. (réelles) A, B par :

$$A = a(Z_1, Z_2), \quad B = b(Z_1, Z_2)$$

En notations trigonométriques, avec : $Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ les fonctions $a(\cdot, \cdot), b(\cdot, \cdot)$ s'écrivent :

$$a(r_1, r_2, \theta_1 - \theta_2) \quad b(r_1, r_2, \theta_1 - \theta_2).$$

Considérons la loi de probabilité du couple (A, B) : ou plutôt sa fonction caractéristique (f. c.) $\varphi(u, v)$ définie par :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad \varphi(u, v) = E[e^{i(uA + vB)}]$$

Supposons que $\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_0$ admettent des densités; il sera évident que cette restriction n'enlève rien à la

généralité du théorème en vue et permet une écriture plus simple. Soient donc $f(r_1, \theta_1), g(r_2, \theta_2)$ les densités (en coordonnées polaires) de $\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_0$: on a :

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[ua(r_1, r_2, \theta_1 - \theta_2) + vb(r_1, r_2, \theta_1 - \theta_2)]} \\ &\quad \times f(r_1, \theta_1 - \alpha) g(r_2, \theta_2 - \alpha) dr_1 dr_2 d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned}$$

En changeant $\theta_1 - \alpha$ en $\theta_1, \theta_2 - \alpha$ en θ_2 et puisque θ_1 et θ_2 ne sont définis qu'à $2k\pi$ près, on a aussi bien :

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[ua(r_1, r_2, \theta_1 - \theta_2) + vb(r_1, r_2, \theta_1 - \theta_2)]} \\ &\quad \times f(r_1, \theta_1) g(r_2, \theta_2) dr_1 dr_2 d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned}$$

où α ne figure plus. Donc :

Théorème (A.2.1) : Si $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha$ se déduisent de $\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_0$ par la rotation d'angle α ; si Z_1, Z_2 de lois $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha$ respectivement, sont indépendantes; si $a(\cdot, \cdot), b(\cdot, \cdot)$ sont bicirculaires; la loi de probabilité du couple (A, B) où :

$$A = a(Z_1, Z_2), \quad B = b(Z_1, Z_2),$$

est indépendante de α .

Annexe III

Soient $c \in \mathbb{R}$ avec $c > 0$; $Z = R e^{i\Theta}$ ($R = |Z|, \Theta = \text{argument de } Z$), une v. a. complexe dont la loi de probabilité est circulaire; en coordonnées polaires, son élément différentiel sera décrit :

$$f(r) dr \frac{d\theta}{2\pi}$$

impliquant qu'il y a densité de probabilité.

On recherche la densité de probabilité $p(x)$ de :

$$X = |c + R e^{i\Theta}|^2 = c^2 + R^2 + 2cR \cos \Theta$$

Commençons par chercher la densité de probabilité $p(x/r)$ de X , conditionnelle quand $R = r$.

Posant :

$$(A.3.1) \left\{ \begin{aligned} x &= c^2 + r^2 + 2cr \cos \theta \\ dx &= -2cr \sin \theta d\theta \\ &= \pm 2cr \sqrt{1 - \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \pm \sqrt{[(c+r)^2 - x][x - (c-r)^2]} d\theta; \end{aligned} \right.$$

la probabilité que Θ soit compris entre θ et $\theta + d\theta$ est $d\theta/2\pi$; d'autre part, si on change θ en $-\theta, \cos \theta$ et

donc x ne changent pas; on a donc:

(A. 3. 2)

$$p(x/r) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 [(c+r)^2 - x][x - (c-r)^2]}}$$

à quoi il faut adjoindre d'après (A. 3. 1):

(A. 3. 3) $(c-r)^2 \leq x \leq (c+r)^2$

Dans un quadrant ($O_r, O_x; r \geq 0, x \geq 0$) traçons les deux courbes (paraboles) d'équations:

$$(c-r)^2 = x, \quad (c+r)^2 = x$$

leur disposition est celle de la figure (A. 3. 1).

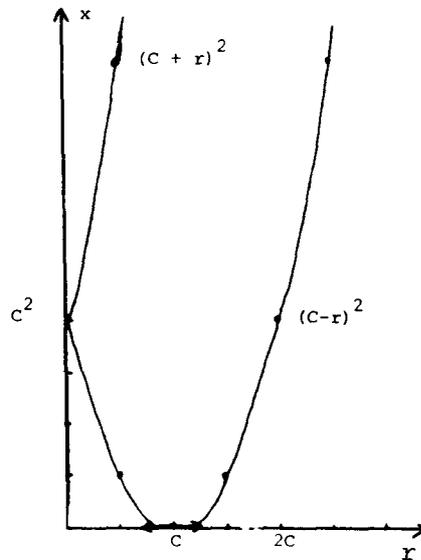


Fig. A. 3. 1

De là résulte:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{c-\sqrt{x}}^{c+\sqrt{x}} \frac{f(r) dr}{\sqrt{(r+c-\sqrt{x})(r+c+\sqrt{x})(r-c+\sqrt{x})(c+\sqrt{x}-r)}}, & 0 < x < c^2 \\ \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{x}-c}^{\sqrt{x}+c} \frac{f(r) dr}{\sqrt{(r+c-\sqrt{x})(r+c+\sqrt{x})(r-c+\sqrt{x})(c+\sqrt{x}-r)}}, & c^2 < x \end{cases}$$

Cherchons maintenant la densité de probabilité $q(y)$ de:

$$Y = \sqrt{X};$$

Avec:

$$y^2 = x.$$

on a:

$$q(y) dy = p(x) dx = 2yp(y^2) dy$$

soit:

$$q(y) = 2yp(y^2)$$

donc:

$$(A. 3. 4) \quad q(y) = \begin{cases} \frac{2y}{\pi} \int_{c-y}^{c+y} \frac{f(r) dr}{\sqrt{(r+c-y)(r+c+y)(r-c+y)(c+y-r)}} & \text{si } 0 \leq y \leq c \\ \frac{2y}{\pi} \int_{y-c}^{y+c} \frac{f(r) dr}{\sqrt{(r+c-y)(r+c+y)(r-c+y)(c+y-r)}} & \text{si } y \geq c \end{cases}$$

où les intégrales peuvent évidemment se transformer de diverses façons; par exemple, posant:

$$r = c + yZ$$

(A. 3. 4) s'écrit :

$$(A. 3. 6) \quad q(y) = \frac{y}{\pi c} \int_{-1}^{+1} \frac{f(c+yZ) dZ}{\sqrt{[1-(y(1-Z)/2c)][1+(y(1+Z)/2c)](1-Z^2)}}, \quad 0 \leq y \leq c$$

De façon analogue, en posant :

$$r = y + cZ$$

(A. 3. 5) s'écrit :

$$(A. 3. 7) \quad q(y) = \frac{1}{\pi} \int_1^{+1} \frac{f(y+cZ) dZ}{\sqrt{[1-(c/2y)(1-Z)][1+(c/2y)(1+Z)](1-Z^2)}}, \quad y > c$$

En vérification, on remarque que si $c=0$, (A. 3. 7) donne :

$$q(y) = f(y)$$

comme il se doit.

Soient : $g(y)$ une densité de probabilité sur $[0, +\infty)$; $g_n(y) = g(y)^{* (n)}$ sa n -ième convoluée (n entier ≥ 1); on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in [0, +\infty), \\ g_{n+1}(y) &= \int_0^{+\infty} g_n(y-z) g(Z) dZ; \\ g_1(Z) &= g(Z) \end{aligned}$$

Supposons que $\exists \omega$, avec $\omega > 0$, tel que :

$$\forall y \in [0, \omega], \quad g(y) < y.$$

On montre par récurrence le :

Lemme (A. 3. 1) : On a :

$$\forall y \in [0, \omega], \quad g_n(y) = g(y)^{* (n)} < \frac{1}{(2n-1)!} y^{2n-1}.$$

Revenons à $q(y)$; soit ω avec : $0 < \omega < c$ en supposant $c > 0$; désignons par

$$f(c/\omega)$$

une borne supérieure de $f(r)$ sur $[c-\omega, c+\omega]$; il résulte de (A. 3. 6) que :

$$(A. 3. 8) \quad y \in [0, \omega], \quad q(y) < \frac{\bar{f}(c/\omega)}{(c-\omega)} y.$$

On déduit alors du lemme (A. 3. 1), et en désignant par $q(y)^{* (n)}$ la n -ième convoluée de $q(y)$, le :

Lemme (A. 3. 2) : si $c > 0$, $\forall 0 < \omega < c$, on a :

$$(A. 3. 9) \quad q(y)^{* (n)} < \frac{\bar{f}(c/\omega)^n}{(c-\omega)^n (2n-1)!} y^{2n-1}, \quad \forall y \in [0, \omega],$$

Annexe IV

Rappels de résultats classiques sur les moments

Soit \mathcal{U} une v. a. (réelle); h étant un entier > 0 , on suppose que \exists les moments :

$$\mu_\alpha = E(\mathcal{U}^\alpha), \quad \alpha = 0, 1, \dots, 2h;$$

avec :

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = 0$$

Soient $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_N$, N v. a. mutuellement indépendantes, toutes de même loi que \mathcal{U} ; on pose :

$$V_N = \sum_{t=1}^N U_t = \sqrt{\mu_2 N} W_N$$

pour h fixé, on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(W_N^{2h}) = \frac{(2h)!}{2^h h!}$$

par exemple :

(A. 4. 1) pour $h=2$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(W_N^4) = 3$$

(A. 4. 2) pour $h=4$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(W_N^8) = \frac{35}{2}$$

Annexe V

Étude de la variance de K_N

Après avoir effectué (cf. §4) une partition de l'espace \mathcal{D} pour lequel $x \geq -(a/P) \sqrt{N}$, en trois sous-espaces disjoints $\mathcal{M}, \mathcal{I}, \mathcal{J}$, il est possible de calculer sur chacun de ceux-ci les intégrales H_N, I_N et J_N .

1. ÉTUDE DE H

Sur \mathcal{M} , on a :

$$\left(1 - \frac{P}{a\sqrt{N}}x\right)^2 < \frac{1}{(1 + (P/a\sqrt{N})x)^2} < \frac{1}{(1 - (\eta P/a)^2)}$$

donc :

$$(A.5.1) \quad \left(1 - \frac{P}{a\sqrt{N}}x\right)^2 \psi(x, y) < \varphi(x, y) < \frac{\psi(x, y)}{(1 - (\eta P/a)^2)}$$

Posons :

$$H_0 = \int_{\mathcal{X}} \psi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy$$

$$H_1 = \int_{\mathcal{X}} \psi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy$$

$$H_2 = \int_{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} \psi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy$$

$$H_3 = \int_{\mathcal{X}} \left(-2 \frac{P}{a\sqrt{N}}x + \frac{P^2}{a^2 N}x^2\right) \lambda_N(x, y) dx dy$$

On voit que :

$$0 < H_1, \quad 0 < H_2, \quad H_1 + H_2 = H_0$$

et

Lemme (4.5.1) :

$$H_0 = E[(a Q Y_N - b P X_N)^2] = a^2 Q^2 + b^2 P^2 - 2ab PQ \rho. \blacksquare$$

On a :

$$|H_3| \leq \frac{2P}{a\sqrt{N}} \int_{\mathcal{X}} \left[|x| + \frac{P}{2a\sqrt{N}}x^2\right] \psi(x, y) dx dy \leq \frac{2P}{a\sqrt{N}} \int_{\mathcal{X}} \left[|x| + \frac{P}{2a\sqrt{N}}x^2\right] \psi(x, y) dx dy$$

soit :

$$(A.5.2) \quad |H_3| \leq \frac{2P}{a\sqrt{N}} E \left\{ \left[|X_N| + \frac{P}{a\sqrt{N}} X_N^2 \right] \psi(X_N, Y_N) \right\}$$

Rappelons que si A, B sont 2 v. a. réelles, on a :

$$E(|AB|) \leq \sqrt{E(A^2)E(B^2)}$$

D'après l'annexe IV, (A.5.2) donne :

Lemme (A.5.2) : \exists une constante α , telle que :

$$\forall \eta, \quad \forall N, \quad |H_3| < \frac{\alpha}{\sqrt{N}}$$

Notons $\psi'(X_N, Y_N)$ la majorante de $\psi(X_N, Y_N)$ indiquée par le lemme (A.5.1); H_2 peut s'interpréter par :

$$H_2 = P_r(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}) E[\psi'(X_N, Y_N) / \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}]$$

donc :

$$(A.5.3) \quad H_2 \leq P_r(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}) E[\psi'(X_N, Y_N) / \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}]$$

Y'_N est indépendante de X_N , $E(Y'_N) = 0$, $E(Y'^2_N) = 1$ notant $\mu_N(x)$ la densité de probabilité de X_N , (A.5.3) se réduit à :

$$(A.5.4) \quad H_2 \leq [a^2(b+b')^2 N + a^2 Q^2] P_r(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}) + 2a|b|(b+b')P\sqrt{N} \int_{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} |x| \mu_N(x) dx + b^2 P^2 \int_{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} x^2 Y_N(x) dx$$

(a) Comme

$$E(X^2_N) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mu_N(x) dx = 1$$

on a :

$$(A.5.5) \quad \forall \eta > 0 \text{ fixé, } \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} x^2 \mu_N(x) dx = 0$$

(b) Sur $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$, $|x| > \eta\sqrt{N}$; d'après l'inégalité de Tschebishev,

$$P_r(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}) = \int_{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} \mu_N(x) dx < \frac{E(X^4_N)}{\eta^4 N^2}$$

d'après l'annexe IV, \exists une constante β telle que, $\forall N$, $E(X^4_N) < \beta$, donc :

$$(A.5.6) \quad \forall \eta > 0 \text{ fixé, } \forall N, \quad P_r(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}) < \frac{\beta}{\eta^4 N^2}$$

(c) D'après l'inégalité de Schwarz :

$$\int_{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} |x| \mu_N(x) dx \leq \left[\int_{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} x^2 \mu_N(x) dx \right]^{1/2} \left[\int_{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} \mu_N(x) dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_{\infty} x^2 \mu_N(x) dx \right]^{1/2} \sqrt{P_r(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z})}$$

donc avec (A.5.6) :

$$(A.5.7) \quad \int_{\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}} |x| \mu_N(x) dx \leq \frac{\sqrt{\beta}}{\eta^2 N}$$

d'où avec (A. 5. 4), (A. 5. 5), (A. 5. 6) et (A. 5. 7) le :

Lemme (A. 5. 3):

$$\forall \eta > 0 \text{ fixé, } \lim_{N \rightarrow +\infty} H_2 = 0.$$

D'après (4. 3):

$$H_1 + H_3 < H_N(\eta) < \frac{1}{(1 - (\eta P/a)^2)} H_1$$

donc puisque $H_2 > 0$:

(A. 5. 8)

$$H_0 - H_2 + H_3 < H_N(\eta) < \frac{1}{(1 - (\eta P/a)^2)} H_0$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire; choisissons $\eta > 0$ tel que :

$$(A. 5. 9) \quad 1 < \frac{1}{(1 - (\eta P/a)^2)} < 1 + \varepsilon$$

(A. 5. 8) donne :

$$H_0 - H_2 + H_3 < H_N(\eta) < (1 + \varepsilon) H_0$$

d'après les lemmes (4. 3), (4. 4), il suffit alors de prendre N assez grand, pour que H_2 et $|H_3|$ soient arbitrairement petits; donc :

Lemme (A. 5. 4): Si ε est > 0 arbitraire, $\forall \eta$ satisfaisant à (A. 5. 9), $\exists N(\eta)$ entier > 0 tel que :

$$\begin{aligned} \forall N \geq N(\eta), \\ H_0 - \varepsilon < H_N(\eta) < (1 + \varepsilon) H_0 \end{aligned}$$

2. ÉTUDE DE I_N

Sur \mathcal{J} , $x > a\sqrt{N}/P$; donc :

$$\begin{aligned} I_N &< \frac{1}{4} \int_{\mathcal{J}} \psi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy \\ &< \frac{1}{4} \int_{\mathcal{J} \cup \mathcal{J}'} \psi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy < \frac{1}{4} H_2 \end{aligned}$$

d'après le lemme (A. 5. 3), on a donc :

Lemme (A. 5. 6):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = 0$$

3. ÉTUDE DE $J_N(\eta)$

Soit $0 < \omega < S$; définissons les domaines :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \left\{ (x, y) / -\frac{a\sqrt{N}}{P} < x < \frac{\omega}{P\sqrt{N}} - \frac{a\sqrt{N}}{P} \right\} \\ \mathcal{J}_2 &= \left\{ (x, y) / \frac{\omega}{P\sqrt{N}} \leq x < -\eta\sqrt{N} \right\} \end{aligned}$$

les symboles $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ désignant aussi les événements :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \left(-\frac{a}{P}\sqrt{N} < X_N < \frac{\omega}{P\sqrt{N}} - \frac{a}{P}\sqrt{N} \right) \\ \mathcal{J}_2 &= \left(\frac{\omega}{P\sqrt{N}} - \frac{a}{P}\sqrt{N} \leq X_N < -\eta\sqrt{N} \right) \end{aligned}$$

La définition de \mathcal{J}_2 est valide, dès que N est assez grand pour que

$$\frac{\omega}{P\sqrt{N}} - \frac{a}{P}\sqrt{N} < -\eta\sqrt{N};$$

soient les intégrales correspondantes :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\mathcal{J}_1} \varphi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy \\ J_2 &= \int_{\mathcal{J}_2} \varphi(x, y) \lambda_N(x, y) dx dy \end{aligned}$$

de sorte que: $J_N(\eta) = J_1 + J_2$, $J_1 > 0$, $J_2 > 0$ sur \mathcal{J}_1 , $0 < L_N < \omega$; d'autre part :

$$\varphi(X_N, Y_N) = a^4 N \left| \frac{M_N}{L_N} - \frac{b}{a} \right|^2 < a^4 N \left| \frac{M'_N}{L_N} + \frac{b'}{a} \right|^2$$

on peut écrire :

$$(A. 5. 10) \quad \begin{aligned} J_1 &= P_r(\mathcal{J}_1) E(\varphi(X_N, Y_N) / \mathcal{J}_1) \\ &\leq a^4 N P_r(\mathcal{J}_1) E\left(\left| \frac{M'_N}{L_N} + \frac{b'}{a} \right|^2 / \mathcal{J}_1 \right) \end{aligned}$$

M'_N et L_N sont indépendantes;

$$E(M'_N) = N b', \quad E(M'^2_N) = N Q'^2 + N^2 b'^2$$

on notera comme au paragraphe 3, $q(y)^{* (N)}$ la N -ième convoluée de la densité de probabilité $q(y)$ de $|S_i|$; (A. 5. 10) donne :

$$\begin{aligned} J_1 &\leq a^2 b'^2 N \int_0^\omega q(y)^{* (N)} dy \\ &\quad + 2 a^3 b'^2 N^2 \int_0^\omega \frac{1}{y} q(y)^{* (N)} dy \\ &\quad + a^4 N (N Q'^2 + N^2 b'^2) \int_0^\omega \frac{1}{y^2} q(y)^{* (N)} dy \end{aligned}$$

de (3. 2) résulte :

$$\begin{aligned} \int_0^\omega q(y)^{* (N)} dy &< \frac{\bar{f}_S(S/\omega) \omega^{2N}}{(S-\omega)^N \cdot 2N(2N-1)!}, \\ \int_0^\omega \frac{1}{y} q(y)^{* (N)} dy &< \frac{\bar{f}_S(S/\omega) \omega^{2N-1}}{(S-\omega)^N (2N-1)(2N-1)!}, \\ \int_0^\omega \frac{1}{y^2} q(y)^{* (N)} dy &< \frac{\bar{f}_S(S/\omega) \omega^{2N-2}}{(S-\omega)^N (2N-2)(2N-1)!} \end{aligned}$$

d'où (en notant que J_1 ne dépend pas de η):

Lemme (A. 5. 6):

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} J_1 = 0$$

Sur \mathcal{J}_2 , $L_N > \omega$; à l'imitation de (4. 12), mais en y remplaçant \mathcal{J}_1 par \mathcal{J}_2 , on a:

$$(A. 5. 11) \quad J_2 < a^4 \text{NP}_r(\mathcal{J}_2) E\left(\left|\frac{M'_N}{\omega} + \frac{|b|^2}{a}\right|/\mathcal{J}_2\right) \\ < a^4 \text{NP}_r(\mathcal{J}_2) \left[\frac{NQ'^2 + N^2 b'^2}{\omega^2} + 2 \frac{|b|}{a} \frac{Nb'}{\omega} + \frac{b'^2}{a^2} \right]$$

d'autre part, sur \mathcal{J}_2 , $|X_N| > \eta N$; l'inégalité de Tschebichev:

$$\text{P}_r(\mathcal{J}_2) \leq \frac{E(X_N^2)}{\eta^2 N^4}$$

montre avec annexe IV. 2, que:

Lemme (A. 5. 7): $\forall 0 < \eta < a/P$ fixé,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_2 = 0.$$

Récapitulant les lemmes (A. 5. 1), (A. 5. 4), (A. 5. 5), (A. 5. 6), (A. 5. 7), nous obtenons le:

Théorème (A. 5. 1): Lorsque $N \rightarrow +\infty$, on a:

$$(A. 5. 12) \quad E\left(\left|K_N - \frac{b}{a}\right|^2\right) \sim \frac{H_0}{a^4 N} \\ = \frac{a^2 Q^2 - 2ab \text{PQP} + b^2 P^2}{a^4 N}$$

ce qui implique:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(K_N) = \frac{b}{a}$$

et pour $N \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{V}(K_N) \leq \sim \frac{a^2 Q^2 - 2ab \text{PQP} + b^2 P^2}{a^4 N}$$

Ainsi, pour N grand, K_N est un estimateur « satisfaisant » du rapport b/a .