

# Résonance des plaques et des cylindres :

## ondes guidées

Plate and cylinder resonances: guided waves



Jean-Louis IZBICKI

Université du Havre, Laboratoire d'Électronique et d'Automatique-Ultrasons, UERST, place Robert-Schuman, 76610 LE HAVRE

Professeur au Lycée François-I<sup>er</sup>, Docteur de 3<sup>e</sup> cycle, il mène des travaux de recherche qui concernent les ondes guidées et la diffusion acoustique des plaques planes, s'intéressant à la relation entre les notions de modes propres et d'ondes guidées et la diffusion ultrasonore.

Gérard MAZE



Université du Havre, Laboratoire d'Électronique et d'Automatique-Ultrasons, UERST, place Robert-Schuman, 76610 LE HAVRE

Gérard MAZE, Docteur ès-Sciences Physiques, est Maître de Conférences à l'Université du Havre. Il enseigne l'Électronique, l'Électrotechnique et l'Automatique dans le Département « Génie Électrique » de l'IUT du Havre et l'instrumentation et la mesure ultrasonores dans le DEA « Instrumentation et Mesures ». Ses recherches commencées en 1970 portent sur la diffusion des ondes ultrasonores. Il a étudié plus particulièrement l'influence des ondes guidées et a mis au point la « Méthode d'Isolément et d'Identification des Résonances » (MIIR) qui conduit à une « Spectroscopie des Résonances » applicable à la reconnaissance des formes.

Jean RIPOCHE



Université du Havre, Laboratoire d'Électronique et d'Automatique-Ultrasons, UERST, place Robert-Schuman, 76610 LE HAVRE

Professeur d'Université au Havre depuis 1969, il enseigne l'EAA au département Génie Électrique de l'IUT; il assure, en outre, un enseignement portant sur les « Transducteurs Ultrasonores » dans le cadre du DEA « Instrumentation et Mesures » fonctionnant sur trois pôles (Rouen, Le Havre, Caen); il dirige, à l'UERST du Havre, le « Laboratoire d'Électronique et d'Automatique-Ultrasons ». Les travaux du laboratoire sont orientés dans deux directions principales dans le domaine de l'étude et du traitement de signaux ultrasonores : 1<sup>o</sup> la « Diffusion Acoustique » en développant la MIIR (Méthode d'Isolément et d'Identification des Résonances) pour une nouvelle « Spectroscopie Acoustique »; 2<sup>o</sup> la « Microscopie Acoustique » en mettant au point une lentille acoustique d'un type nouveau utilisable en « Contrôle Non Destructif ». D'autres travaux sont poursuivis en Visualisation Animée de phénomènes de propagation.

### RÉSUMÉ

L'étude de la diffusion normale d'une onde plane ultrasonore par des cylindres immergés dans l'eau met en évidence l'existence des résonances qui sont des modes propres de vibration. Quand un mode propre est excité, l'énergie emmagasinée pendant l'excitation forcée est réémise après la fin de celle-ci. L'observation des spectres de rétrodiffusion obtenus par la « Méthode d'Isolément et d'Identification des Résonances » (MIIR) montre l'existence de résonances supplémentaires. Le diagramme de directivité du transducteur en est la cause. Le comportement de ces résonances est analogue à celui des résonances de la plaque. Ceci nous conduit à étudier les modes propres de vibration du cylindre. Toutes les résonances observées expérimentalement sont des modes propres de vibration de la cible.

### MOTS CLÉS

Traitement de signaux ultrasonores, diffusion acoustique, spectroscopie acoustique, acoustique sous-marine, ondes guidées.

## SUMMARY

The study of the normal diffusion of an ultrasonic plane wave by cylinders imbedded in water shows resonances which are the natural modes of vibration. When a natural mode of an elastic target is excited, the energy which is stored during the forced excitation is radiated after the end of the forced excitation. The observation of backscattered spectra obtained by the "Resonance Isolation and Identification Method" (RIIM) from an aluminium cylinder shows supplementary resonances. The directivity pattern of the transducer is the cause of these supplementary resonances. The behaviour of these resonances is analogous to the resonances of plates. This leads us to study the natural modes of the cylinder. All the resonances which are experimentally detected may be considered as normal modes of the target.

## KEY WORDS

Signal processing in ultrasonics, acoustic scattering, acoustic spectroscopy, underwater acoustics, guided waves.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction
  2. Approche théorique
  3. Études expérimentales
  4. Conclusion
- Remerciements  
Bibliographie

## 1. Introduction

La diffusion d'une onde ultrasonore par un cylindre infini immergé dans l'eau a été étudiée théoriquement surtout depuis 1951 [1]. En particulier il a été établi qu'il existe une relation étroite entre deux phénomènes : les résonances d'un corps élastique et les ondes circonférentielles qui circulent à sa périphérie. La Méthode d'Isolement et d'Identification des Résonances (MIIR) a confirmé expérimentalement l'existence des ondes circonférentielles. Elle a permis d'identifier les modes de vibration (référéncés par la lettre  $n$ ). Quelques différences existent entre les résultats donnés par la « Resonance Scattering Theory » (RST) [2, 3] et les observations expérimentales [4] : il s'agit de la présence de résonances supplémentaires, c'est-à-dire non prévues par la RST. Cet article a pour but d'interpréter ces différences.

Le caractère de propagation parallèlement à la plaque que présente les ondes de Lamb, nous a conduit à réexaminer les modes propres de vibration des cylindres quand on considère une propagation guidée parallèlement à l'axe du cylindre, l'essentiel du travail théorique ayant déjà été publié [5, 6].

## 2. Approche théorique

L'obtention des modes de Lamb pour la plaque est très classique [7]. Pour trouver les modes de vibration d'un cylindre il est possible de suivre un chemin analogue. Il faut toutefois remarquer que le problème qui sera traité suppose que le cylindre est dans le vide, ce qui n'est pas le cas expérimental car le cylindre est dans l'eau. Cependant, comme il a été vérifié pour la plaque, la présence de l'eau ne modifie pas sensiblement la fréquence des modes propres, il est donc tout à fait convenable de traiter le problème de la propagation dans le cylindre dans le vide, seuls les modes propres seront pris en compte, le problème du couplage eau-aluminium devra être traité ultérieurement.

L'équation de propagation d'une onde ultrasonore dans un corps isotrope s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}),$$

$\mathbf{u}$ , vecteur déplacement,  $\rho$ , masse volumique du corps;  $\lambda$  et  $\mu$ ; coefficients de Lamé.

Le vecteur déplacement peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} \varphi + \operatorname{rot} \psi.$$

On recherche des solutions harmoniques. On peut montrer que les solutions peuvent s'écrire :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \varphi = A J_n(hr) \cos n\theta \exp j(K_z z - \omega t), \\ \psi_r = B J_{n+1}(Kr) \sin n\theta \exp j(K_z z - \omega t), \\ \psi_\theta = -B J_{n+1}(Kr) \cos n\theta \exp j(K_z z - \omega t), \\ \psi_z = C J_n(Kr) \sin n\theta \exp j(K_z z - \omega t), \end{array} \right.$$

avec :

$$h^2 = \frac{\omega^2}{C_L^2} - K_z^2, \quad K^2 = \frac{\omega^2}{C_T^2} - K_z^2$$

$$C_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad C_T^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Des conditions aux limites vont permettre d'obtenir l'équation des fréquences propres, elles s'écrivent :

$$T_{rr} = T_{rz} = T_{r\theta} = 0 \quad \text{en } r = a,$$

$a$ , rayon du cylindre.

Après avoir exprimé les composantes du tenseur des contraintes en fonction du potentiel scalaire  $\phi$  et des composantes du potentiel vecteur  $\psi$  et en reportant les solutions (1), on obtient un système linéaire de trois équations à trois inconnues. Le déterminant associé s'écrit :

$$|M| = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{11} &= \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{C_L}{C_T} \right)^2 (ha)^2 - n^2 - n \right] J_n(ha) + ha J_{n-1}(ha), \\ M_{12} &= [n^2 + n - (Ka)^2] J_n(Ka) - (Ka) J_{n-1}(Ka), \\ M_{13} &= 2n [Ka J_{n-1}(Ka) - (n+1) J_n(Ka)], \\ M_{21} &= n [ha J_{n-1}(ha) - (n+1) J_n(ha)], \\ M_{22} &= -n [Ka J_{n-1}(Ka) - (n+1) J_n(Ka)], \\ M_{23} &= 2Ka J_{n-1}(Ka) - J_n(Ka) [2n^2 + 2n - (Ka)^2], \\ M_{31} &= -ha J_{n-1}(ha) + n J_n(ha), \\ M_{32} &= -\frac{K^2 - K_z^2}{2K_z^2} [Ka J_{n-1}(Ka) - n J_n(Ka)], \\ M_{33} &= n J_n(Ka). \end{aligned}$$

Si  $K_z \rightarrow 0$  ce qui est le cas étudié ici car l'angle d'ouverture du faisceau incident est faible, il est permis de se ramener à un déterminant  $2 \times 2$ . Après avoir multiplié la seconde colonne par  $K_z^2$  on a  $K_z^2 M_{12} \rightarrow 0$  et  $K_z^2 M_{22} \rightarrow 0$ , donc  $M=0$  entraîne :

$$\begin{aligned} Ka J_{n-1}(Ka) - n J_n(Ka) &= 0, \\ M_{11} M_{23} - M_{21} M_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'écrire en posant

$$\Omega = \omega a / C_T \simeq Ka; \quad \alpha = C_T / C_L :$$

$$(2) \quad \Omega J_{n-1}(\Omega) - n J_n(\Omega) = 0.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad J_n(\alpha\Omega) J_{n-1}(\Omega) &\left[ 2\Omega \left( n^3 - n + \frac{\Omega^2}{2} \right) \right] \\ &+ J_n(\alpha\Omega) J_n(\Omega) \left[ \frac{\Omega^4}{2} - 2n(n+1)\Omega^2 \right] \\ &+ J_{n-1}(\alpha\Omega) J_{n-1}(\Omega) [2(1-n^2)\alpha\Omega^2] \\ &+ J_{n-1}(\alpha\Omega) J_n(\Omega) [2n^3 - 2n + \Omega^2] \alpha\Omega = 0. \end{aligned}$$

Pour chaque mode  $n$  de vibration, il existe plusieurs racines. Celles-ci sont notées  $(n, m)$ . Le nombre  $m$  est l'ordre dans lequel se présentent les résonances pour  $n=1$  lorsque la fréquence réduite  $Ka$  croît.

Les racines de l'équation (3) correspondent aux familles  $m=1, 3, 5, 6$ . Les résonances calculées par la RST sont notées  $(n, l)$ . Les racines de l'équation (3) correspondent aux familles  $l=1, 2, 3, 4$  de la RST. L'écart relatif entre valeurs calculées par la RST et valeurs obtenues par le calcul présenté dans ce travail est toujours inférieur à 3%.

Les racines de l'équation (2) qui correspondent aux familles  $m=2, 4, 7$  sont d'autres modes de vibration du cylindre. Il existe un très bon accord entre la fréquence des résonances supplémentaires obtenues expérimentalement et la fréquence des résonances de la série  $m=2$  (fig. 1). Il est intéressant de remarquer que les résonances supplémentaires sont en relation avec le seul terme du déterminant qui dépend de  $K_z$ . Les trajectoires de Regge pour les ondes du type  $m=1$  ( $l=1$ ),  $m=2$ ,  $m=3$  ( $l=2$ ),  $m=4$ ,  $m=5$  ( $l=3$ ),  $m=6$  ( $l=4$ ),  $m=7$  sont présentées sur la figure 1.

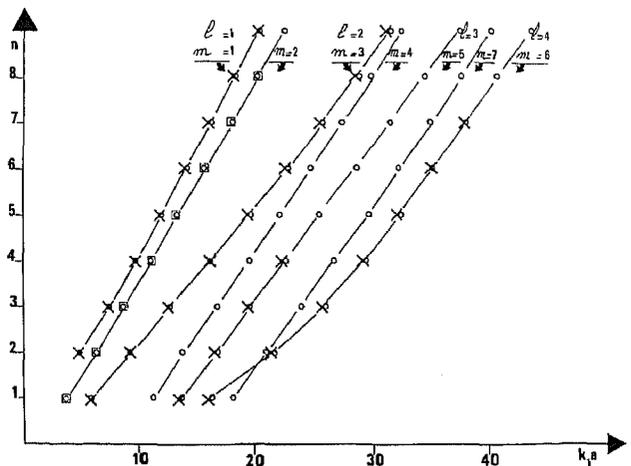


Fig. 1. — Trajectoires de Regge. Croix, valeurs calculées par la RST; cercles, valeurs calculées avec la méthode exposée; carrés, résonances supplémentaires observées expérimentalement. On a  $3100.K = 1470.K_1$ .

Dans l'état actuel, il est possible de rendre compte théoriquement de toutes les résonances observées expérimentalement. Il reste toutefois à préciser la signification exacte des nombres  $l$  ou  $m$ .

### 3. Études expérimentales

Des cylindres pleins de section circulaire en aluminium sont étudiés. Les cylindres ont une longueur supérieure à 1 m et un diamètre compris entre 4 et 12 mm. Ils sont insonés (\*) à l'aide de transducteurs à large bande directifs dont le disque actif piézoélectrique a un diamètre de 4 cm. L'insonation se fait normalement à son axe, elle couvre tout le diamètre mais pas toute la longueur. L'émission ultrasonore se

(\*) Ce néologisme utilisé par l'auteur fera prochainement l'objet d'une note dans la rubrique « Terminologie ».

fait sous la forme d'un train de sinusoïdes dont la durée est liée au diamètre du cylindre, la durée moyenne choisie est de 200  $\mu$ s.

Deux études peuvent être faites :

— En monostatique le transducteur émetteur-récepteur détecte les signaux provenant de la zone insonée. Lors de travaux précédents [8, 9] nous avons montré que l'écho rétrodiffusé a une forme caractéristique pour certaines fréquences appelées fréquences de résonances : il peut se décomposer en un premier régime transitoire, en un régime permanent où l'amplitude est constante, et en un second régime transitoire qui apparaît lorsque l'insonation forcée a cessé et dont l'amplitude décroît exponentiellement en fonction du temps. Cette observation nous conduit à faire deux enregistrements en fonction de la fréquence : le premier consiste à mesurer l'évolution de l'amplitude du régime permanent, nous traçons alors « le spectre de rétrodiffusion »; le second consiste à mesurer l'amplitude du second régime transitoire quelques microsecondes après la fin de l'insonation forcée, nous traçons alors « le spectre des résonances ».

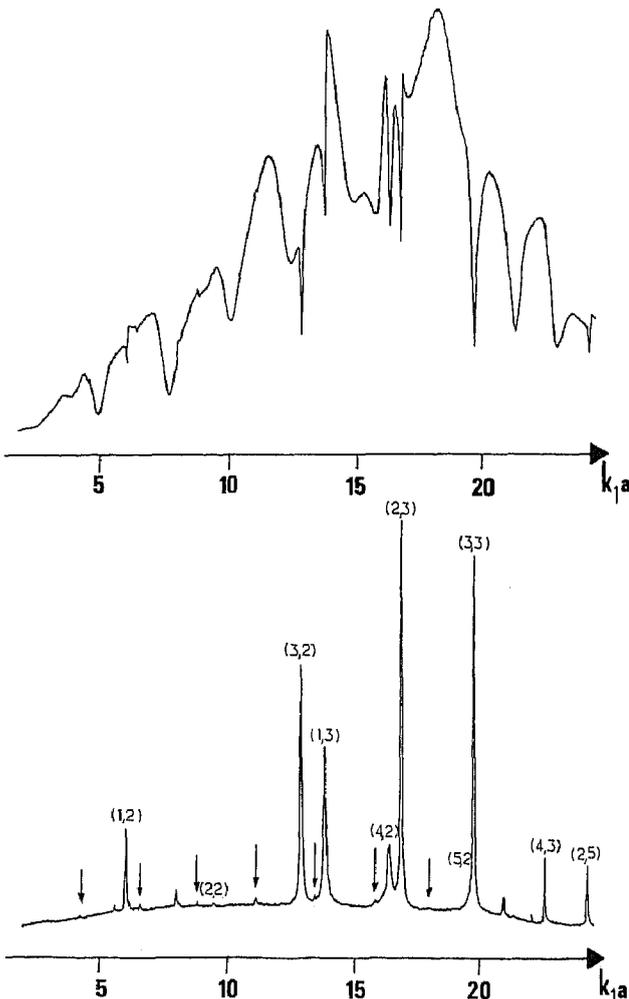


Fig. 2. — a, spectre du signal rétrodiffusé; b, spectre des résonances. L'angle d'incidence est nul.

— En bistatique le transducteur récepteur qui est du même modèle que l'émetteur détecte les signaux émis normalement en dehors de la zone insonée.

Dans le cas du cylindre, il est possible d'enregistrer le spectre de rétrodiffusion (fig. 2 A) et le spectre des résonances (fig. 2 B) en fonction de la fréquence réduite  $K_1 a$  ( $K_1$ , nombre d'onde de l'onde ultrasonore dans l'eau;  $a$ , rayon du cylindre). Dans des travaux précédents [10, 11, 12] il a été possible d'associer les résonances à des ondes stationnaires se formant sur la circonférence du cylindre à partir de la propagation d'une onde circonferentielle dans les deux sens de rotation. Ces résonances sont des modes propres de vibration dont il est possible d'identifier l'ordre «  $n$  » en faisant tourner un récepteur autour du cylindre dans le plan de l'émission à distance constante. Les courbes obtenues (fig. 3) donnent une image de l'état vibratoire de la surface du cylindre : les maximums correspondent aux ventres de vibration de l'onde stationnaire et les minimums aux nœuds. Le mode «  $n$  » est obtenu en comptant les nœuds ou les ventres et en divisant par deux, le mode est le nombre de longueurs d'onde de l'onde circonferentielle sur la circonférence du cylindre. Les spectres et l'identification des modes constituent la « Méthode d'Isolément et d'Identification des Résonances (MIIR).

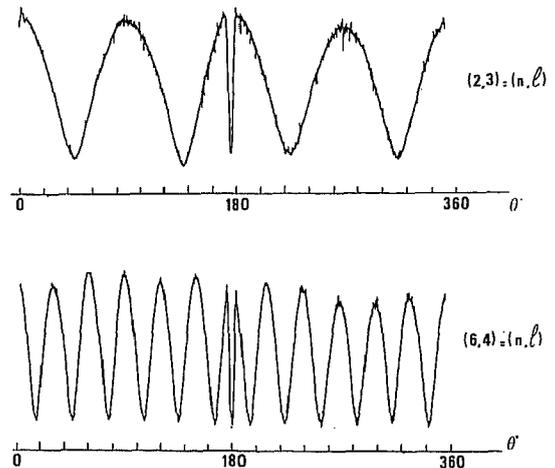


Fig. 3. — Diagrammes angulaires pour identifier le mode «  $n$  » de vibration.

Chaque résonance est caractérisée par deux nombres entiers ( $n$ ,  $l$ ). Le nombre «  $n$  » a été justifié précédemment; le nombre «  $l$  » est déterminé par les théoriciens par l'ordre d'apparition des résonances pour chaque mode  $n$ , il est associé à un type particulier d'onde circonferentielle.

L'observation attentive de la figure 2 B fait apparaître des résonances supplémentaires marquées par des flèches. Ces résonances peuvent être identifiées en faisant tourner un récepteur autour du cylindre comme pour les autres résonances; la figure 4 donne deux exemples d'identification.

Ces résonances supplémentaires ne sont visibles expérimentalement, comme dans le cas de la plaque [9], qu'à cause de la divergence du faisceau incident. Elles

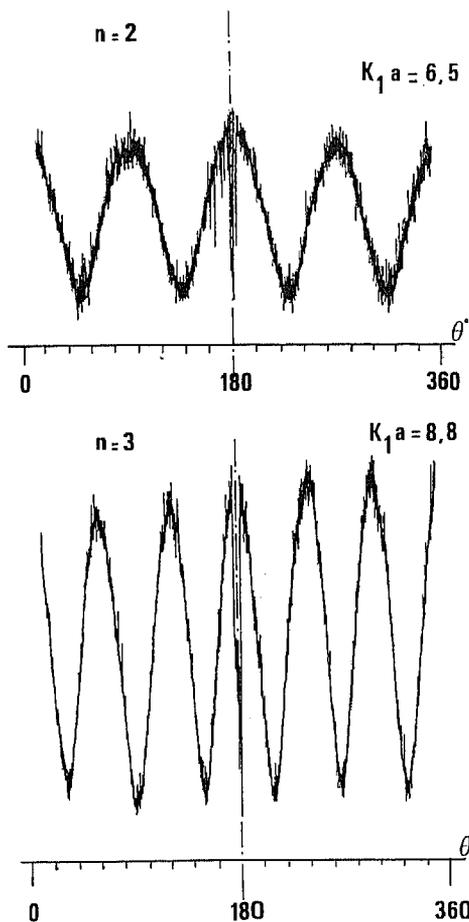


Fig. 4. — Diagrammes angulaires d'identification des résonances supplémentaires.

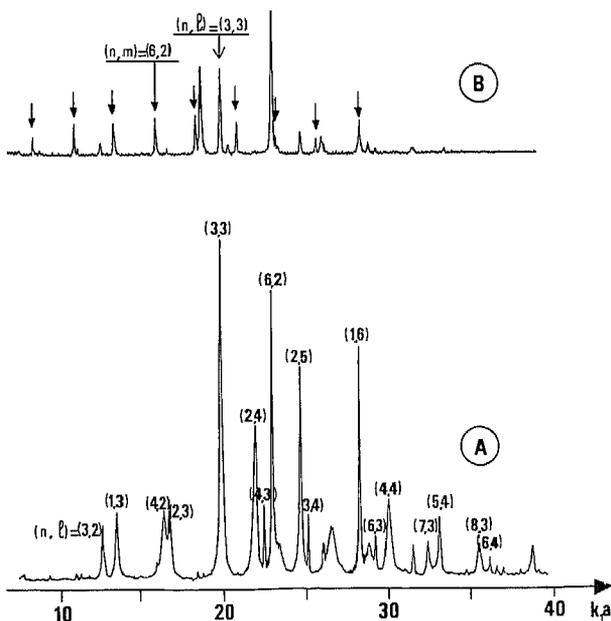


Fig. 5. — Spectre des résonances d'un cylindre. a, avec un transducteur utilisé en émetteur-récepteur; b, avec deux transducteurs distants de 20 cm.

sont excitées obliquement. Comme pour la plaque, il est possible d'émettre l'hypothèse d'une propagation guidée suivant l'axe du cylindre. Cette propagation guidée a par ailleurs été mise en évidence dans un cylindre placé dans l'air [6].

Pour vérifier expérimentalement cette hypothèse, il est possible d'utiliser un transducteur-récepteur placé à 20 cm de l'émetteur du même côté du cylindre et détectant la réémission normale à l'axe du cylindre en dehors de l'impact incident. La figure 5 compare le spectre des résonances obtenu à l'aide d'un seul transducteur fonctionnant en émetteur-récepteur (A) avec le spectre des résonances obtenu avec les deux transducteurs distants de 20 cm. Il faut noter la présence de quelques pics qui se placent à la même fréquence réduite  $K_1 a$  que les résonances liées aux ondes circonférentielles, mais il faut surtout noter la présence bien marquée de pics liés aux résonances supplémentaires. Pour compléter cette étude, nous avons fait tourner le récepteur autour du cylindre pour identifier les modes  $n$  de chacune des résonances. La figure 6 donne deux exemples d'identification.

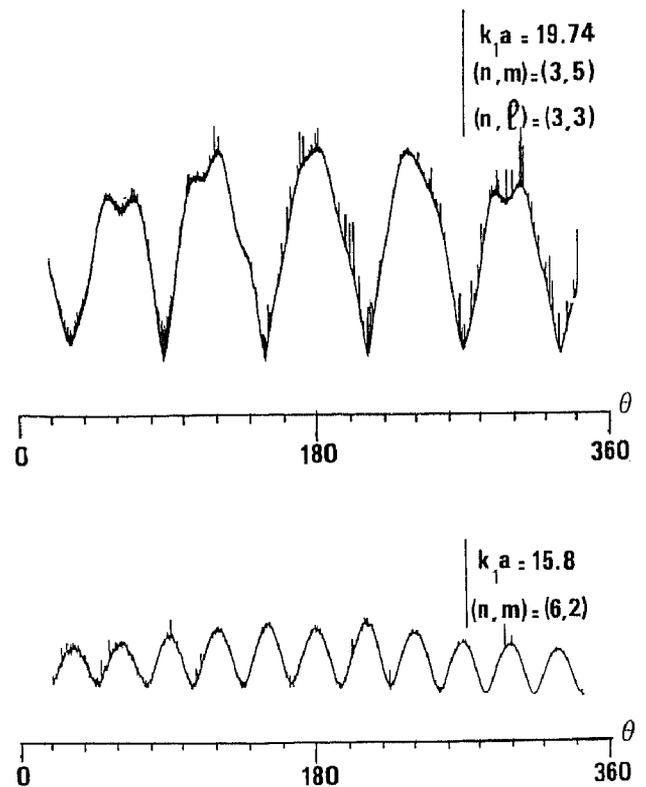


Fig. 6. — Exemples d'identification avec le transducteur à 20 cm.

L'identification des résonances supplémentaires observées en utilisant un seul transducteur émetteur-récepteur ou deux transducteurs distants de 20 cm donne le même résultat.

#### 4. Conclusion

L'observation des spectres obtenus par la MIIR pour un cylindre en aluminium plongé dans l'eau, fait apparaître des résonances supplémentaires qu'il n'est pas possible d'inclure dans les séries calculées par la RST. Celle-ci considère que la direction de propagation de l'onde incidente est perpendiculaire à l'axe du cylindre. Or, expérimentalement, les transducteurs présentent un angle d'ouverture faible mais non nul. Ceci explique l'existence des résonances supplémentaires. Le comportement de ces résonances est analogue à ce qui a été observé sur la plaque. D'où l'idée de chercher les modes propres de vibration du cylindre en considérant une onde qui se propage parallèlement à son axe. La norme du vecteur d'onde  $K_z$  est faible puisque l'angle d'ouverture des transducteurs est faible. Il a été recherché les modes propres de vibration du cylindre dans le vide. Les résonances calculées par la RST (dans le cas du cylindre immergé dans l'eau) qui sont labellées  $l=1$  à  $l=4$  se retrouvent dans notre calcul avec une erreur relative inférieure à 3%, elles sont alors labellées respectivement  $m=1$ ,  $m=3$ ,  $m=5$ ,  $m=6$ . D'autres modes sont obtenus, ils sont labellés  $m=2$ ,  $m=4$ ,  $m=7$ ... Les résonances supplémentaires obtenues expérimentalement correspondent à la série  $m=2$ .

Toutes les résonances qui sont observées peuvent être considérées comme étant des modes de vibration propres de la cible. Les résultats observés pour la plaque et pour le cylindre ont un point commun : la génération d'une onde par excitation d'une résonance et la propagation guidée de cette onde.

#### Remerciements

Les Auteurs remercient A. Derem et J. L. Rousselot (LCT) ainsi que M. Leduc de l'Université du Havre pour l'aide qu'ils ont apportée dans la résolution numérique du problème.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. J. FARAN, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 23, 1951, p. 405.
- [2] L. FLAX, L. R. DRAGONETTE et H. ÜBERALL, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 63, 1978, p. 723.
- [3] L. FLAX, G. C. GAUNAURD et H. ÜBERALL, *Physical Acoustics*, XV, Academic Press, 1980, p.191.
- [4] G. MAZE, J. L. IZBICKI et J. RIPOCHE, *Revue du CETHEDDEC*, 78, 1984, p. 95.
- [5] T. R. MEEKER et A. H. MEITZLER, *Physical Acoustics*, 1A, Academic Press, 1973, p. 111.
- [6] J. ZEMANEK Jr., *J. Acoust. Soc. Amer.*, 51, 1972, p. 265.
- [7] I. A. VIKTOROV, *Rayleigh and Lamb Waves*, Plenum Press, 1967.
- [8] G. MAZE et J. RIPOCHE, *Rev. Phys. Appl.*, 18, 1983, p. 319.
- [9] J. L. IZBICKI, G. MAZE et J. RIPOCHE, *Acustica*, 55, 1984, p. 27.
- [10] H. ÜBERALL, L. R. DRAGONETTE et L. FLAX, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 61, 1977, p. 711.
- [11] A. DEREM, *Revue du CETHEDDEC*, 58, 1979, p. 43.
- [12] G. MAZE, J. RIPOCHE, A. DEREM et J. L. ROUSSELOT, *Acustica*, 55, 1984, p. 69.