

**Bilan énergétique du couplage résonnant**

**entre un faisceau borné**

**et un guide d'onde**

**Energy distribution during resonant coupling between a bounded beam and a waveguide**



**Jean PERDIJON**

**COGEMA, Branche Combustible, Groupe Ultrasons, Centre d'Études Nucléaires, 85 X, 38041 GRENOBLE CEDEX**

Ingénieur civil des Mines, Jean Perdijon a d'abord utilisé des générateurs de neutrons pour faire de l'analyse par activation. Après avoir publié un livre sur ce sujet, il est entré au CEA, puis à la COGEMA, pour diriger une équipe chargée du contrôle non destructif des combustibles nucléaires. Ses principales recherches ont porté sur la focalisation des faisceaux ultrasonores à travers un dioptre et sur la génération d'ondes de Lamb dans les tubes, mais aussi sur le tri et la réception de pièces ou de lots quand les mesures sont infidèles. Il a publié un ouvrage sur l'échographie.

**RÉSUMÉ**

Un dispositif a été réalisé pour mesurer les amplitudes des ondes rayonnées dans l'eau, de part et d'autre d'une plaque guidant des ondes de Lamb continues. On propose un modèle mathématique pour représenter la variation de ces amplitudes le long de la plaque. On applique ces résultats au cas d'une émission discontinue et on montre l'intérêt d'utiliser alors des trains d'onde. Le cas où la plaque est refermée sur elle-même pour former un tube est étudié et on explique la forme de l'écho observé en présence d'un réflecteur par l'interférence entre deux trains d'onde circulant en sens contraires.

**MOTS CLÉS**

Faisceau borné, guide d'onde, couplage résonnant, ondes de Lamb, ondes de Rayleigh, ondes circumférentielles, ultrasons.

**SUMMARY**

*A device has been developed for the measurement of the amplitudes of waves radiated in water, from one side or the other of a plate guiding continuous Lamb waves. A mathematical model is proposed to represent the variation of these amplitudes along the plate. These results are applied to pulses and advantage of therefore using wave trains is indicated. The case where the plate is closed back on itself to form a tube is studied and the shape of the echo given by a reflector is explained by the interference between two wave trains circulating in opposite directions.*

**KEY WORDS**

*Bounded beam, waveguide, resonant coupling, Lamb waves, Rayleigh waves, circumferential waves, ultrasound.*

**TABLE DES MATIÈRES**

- 1. Introduction
- 2. Dispositif expérimental
- 3. Modèle mathématique
- 4. Application à une émission par impulsions
- 5. Application à un guide fermé
- 6. Conclusion
- Bibliographie

**1. Introduction**

On considère un faisceau acoustique borné dont l'incidence sur un guide d'onde est telle que, par couplage résonnant, une onde guidée est engendrée dans le guide; il peut s'agir d'une onde de Rayleigh à la surface d'un solide, ou bien d'une onde de Lamb dans une plaque [1].

Du point de vue énergétique, on peut schématiser le système étudié de la façon suivante. Durant le couplage du faisceau avec le guide, cinq types d'onde sont principalement en présence le long du guide (fig. 1 a). Dans le milieu I situé du côté du faisceau borné, il y a l'onde incidente (1), l'onde réfléchie (2) et l'onde rayonnée par le guide (3); on sait que, dans les conditions habituelles de couplage, les ondes (2) et (3) sont en opposition de phase [2, 3]. Dans le guide, il y a l'onde guidée (4). Et, dans le cas des ondes de Lamb, il peut exister une onde rayonnée (5) dans le milieu II si son indice de réfraction est supérieur à celui du guide. Ce schéma ne tient pas compte

de la présence éventuelle d'autres types d'onde (ondes libres longitudinales ou transversales, autres modes d'ondes guidées), dont la présence est minimisée au moment de la résonance.

En dehors de la zone de couplage entre le faisceau et le guide, il ne reste plus en présence que les ondes (3), (4) et (5) (fig. 1 b); l'onde guidée s'amortit alors principalement par son rayonnement dans les milieux I et II. Cependant, si on désaccouple en plus le guide de ces milieux, il ne reste que l'onde guidée (fig. 1 c), qui s'amortit lentement sous l'effet de la viscosité du guide.

**2. Dispositif expérimental**

Lors des expériences, seules les ondes libres (1), (2), (3) et (5) sont accessibles pour une mesure de leur amplitude. Une telle mesure a été effectuée dans le cas où l'onde guidée est une onde de Lamb, avec le dispositif suivant. Une plaque en acier inoxydable, de grandes dimensions et d'épaisseur 1 mm, est suspendue verticalement suivant un plan xOz dans une cuve d'eau. Un plateau, disposé au-dessus de la cuve, comporte deux bras orientables en azimut autour d'axes verticaux situés dans le plan xOz. Ces bras sont équipés chacun d'un porte-traducteur; les axes des deux porte-traducteur sont situés dans le même plan horizontal xOy et l'un des deux bras peut être déplacé parallèlement au plan xOz.

L'émetteur est monté dans le porte traducteur du bras fixe. Il est du type NDC CNG 4DA/1; c'est un traducteur piézoélectrique plan de diamètre 20 mm, de fréquence 4 MHz et moyennement amorti. Le parcours préliminaire dans l'eau est de 150 mm et l'angle d'incidence est réglé au moyen du goniomètre lié au bras. L'émetteur est excité par un générateur, du type Schlumberger 4432, en ondes sinusoïdales de fréquence variable autour de la fréquence propre de l'émetteur; la tension d'excitation est alors de l'ordre de  $\pm 1,5$  V. Quant à la sonde qui doit analyser les

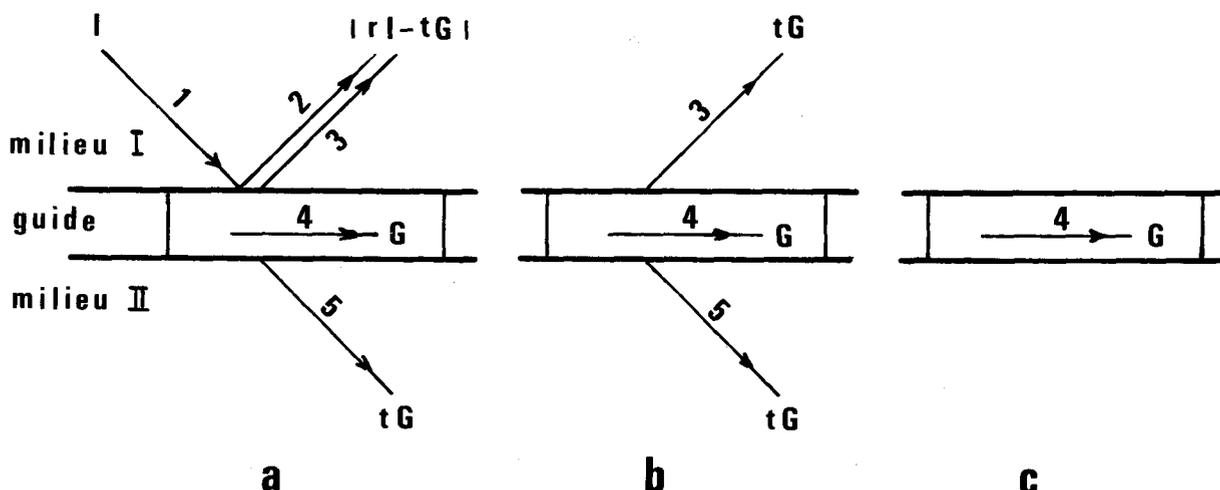


Fig. 1. — Répartition des amplitudes : (a) durant le couplage du guide avec la source, (b) après désaccouplement de la source, (c) en confinement.

## FAISCEAU BORNÉ, RÉFLEXION ET RÉFRACTION

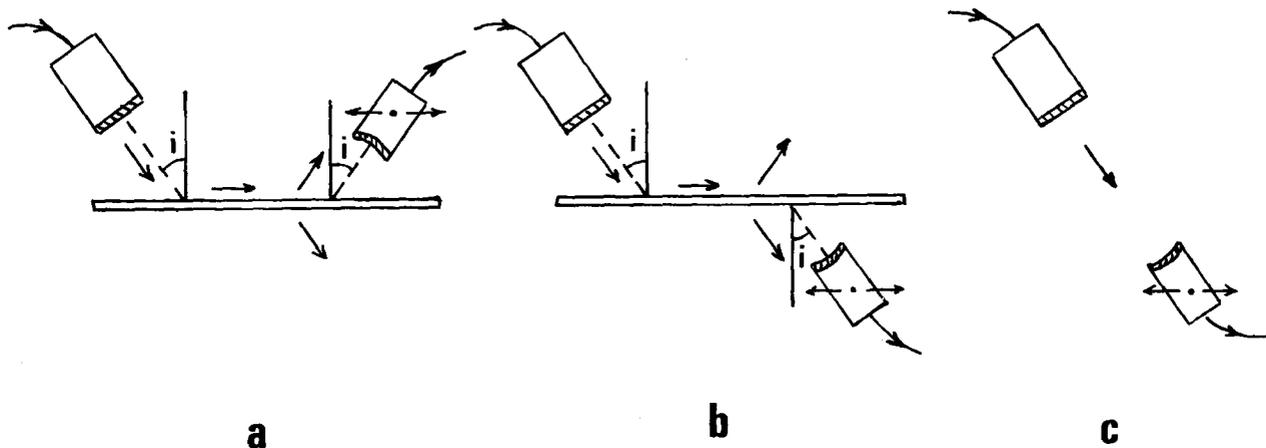


Fig. 2. — Mesure des amplitudes : (a) dans le faisceau retournant au milieu I, (b) dans le faisceau retournant au milieu II, (c) dans le faisceau incident.

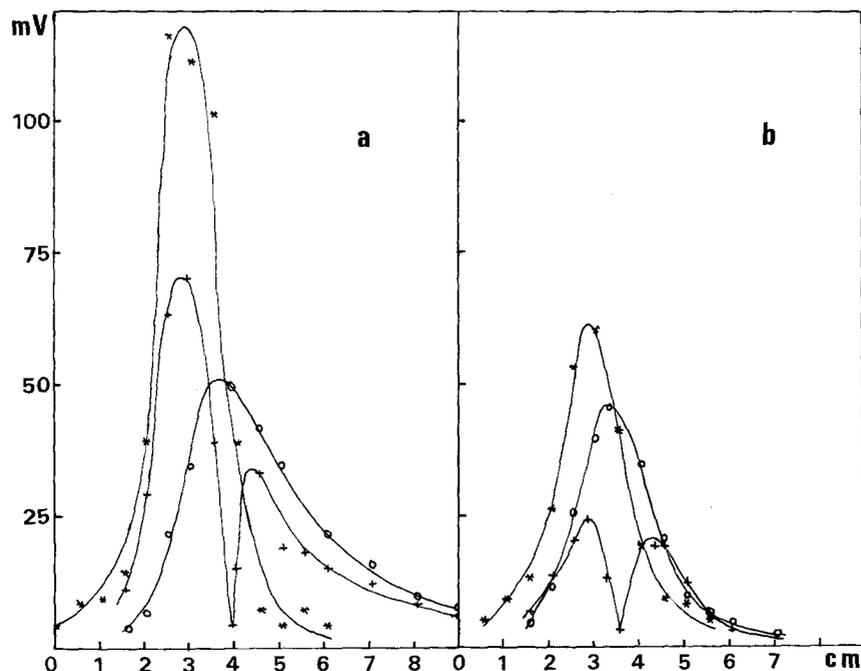


Fig. 3. — Répartition des amplitudes mesurées le long d'une plaque (abscisse en cm), dans le faisceau incident (\*), dans le faisceau retournant au milieu I (+) et dans le faisceau retournant au milieu II (o) : (a) mode  $A_1$ , (b) mode  $S_0$ .

faisceaux, elle est montée dans le porte-transducteur du bras mobile. Il s'agit d'un transducteur piézoélectrique, du type CGR 484 A/EL, de diamètre 10 mm, de fréquence 5 MHz, avec une focalisation ponctuelle à 50 mm. Cette sonde est disposée de façon que le foyer soit sur la plaque et son angle d'incidence, réglé au moyen du goniomètre lié au bras, est le même que celui de l'émetteur; elle est connectée à un oscilloscope du type Tektronix 465.

Le mode opératoire est le suivant [4]. L'angle d'incidence  $i$  est choisi d'après les courbes donnant la vitesse de phase des ondes de Lamb en fonction du produit fréquence  $\times$  épaisseur [5]. On dispose la sonde du même côté de la plaque que l'émetteur mais avec

un angle d'incidence opposé à celui de l'émetteur (fig. 2 a). Puis on déplace la sonde de façon qu'elle analyse une zone située à la limite mais en dehors du faisceau incident; on optimise alors le signal mesuré par la sonde en faisant varier la fréquence  $f$  du générateur : quand une résonance est observée, on considère que la plaque est excitée en ondes de Lamb. Puis on rapproche la sonde de l'émetteur jusqu'à obtenir un minimum du signal analysé; on minimise alors ce signal en faisant très légèrement varier  $f$  : l'interférence entre les ondes (2) et (3) montre que la génération d'ondes de Lamb est bien favorisée. Quand on déplace la sonde de part et d'autre de cette position où le signal mesuré est minimal, on constate d'ailleurs un décalage de la sinusoïde observée sur l'écran de

l'oscilloscope, qui prouve le déphasage de  $180^\circ$  entre (2) et (3). Incidence et fréquence étant ainsi fixées, on déplace la sonde parallèlement à  $Ox$  de façon à étudier successivement la répartition de l'amplitude le long du guide : (a) dans le faisceau retournant au milieu I (fig. 2a), (b) dans le faisceau rayonné vers le milieu II (fig. 2b), la sonde étant placée de l'autre côté de la plaque par rapport à l'émetteur et les axes des deux porte-traducteur étant parallèles, (c) dans le faisceau incident, l'exploration étant faite après avoir ôté la plaque (fig. 2c).

Les amplitudes sont mesurées en millivolts crête à crête. Le bruit de fond est de l'ordre de 1,5 mV. Les figures 3a et 3b donnent la répartition des amplitudes, dans les cas respectivement du mode  $A_1$  ( $i=15^\circ$ ,  $f=3,45$  MHz) et du mode  $S_0$  ( $i=25^\circ$ ,  $f=2,95$  MHz); on remarque que les pertes par rayonnement sont nettement plus fortes dans le second cas mais, dans les deux cas, les ondes retournant aux milieux I et II sont très voisines en dehors du faisceau incident et on observe un point où l'onde retournant au milieu I s'annule quasiment. Pour des angles d'incidence inférieurs à  $28^\circ$ , il est difficile d'assurer qu'il n'y a pas de participation d'ondes longitudinales ou transversales, mais celle-ci devient vite négligeable dès qu'on s'éloigne du faisceau incident.

### 3. Modèle mathématique

Il n'est pas question de refaire ici une étude théorique à partir des propriétés élastiques des milieux [6-8]. Le principe de calcul utilisé sera celui de la variation du bilan énergétique le long du guide. On cherchera donc une équation différentielle exprimant cette variation, en prenant comme élément de guide pour calculer les bilans successifs une longueur égale à la longueur d'onde guidée; en effet, puisqu'il s'agit d'un couplage résonnant, toutes les ondes en présence sont synchrones et on peut raisonner sur les énergies moyennes échangées au cours d'une période. Cependant, on calculera de préférence les amplitudes dans les applications numériques, car les mesures expérimentales conduisent à des tensions qui sont proportionnelles aux pressions acoustiques, donc aux amplitudes et non aux énergies [9].

Reprenons le schéma de la figure 1a et considérons un élément de guide de longueur  $\lambda$ , en appelant  $\lambda$  la longueur de l'onde guidée. Soit  $I$  l'amplitude de l'onde incidente (1) sur cet élément; l'énergie correspondante, reçue par cet élément, est proportionnelle à  $I^2$  et, en appelant  $k$  le coefficient de proportionnalité, l'énergie reçue par un élément de longueur  $dx$  est égale à  $k I^2 dx/\lambda$ . Si  $r$  est le coefficient de réflexion de l'onde incidente sur le guide, l'amplitude de l'onde réfléchie (2) est  $rI$ . Soit  $G$  l'amplitude de l'onde guidée dans l'élément considéré; en appelant  $k'$  le coefficient de proportionnalité, l'énergie guidée est égale à  $k' G^2$ . D'après les relations de Stokes, les coefficients de réflexion de part et d'autre du dioptré limitant le guide sont égaux et opposés et le coefficient de

transmission  $t$  du guide vers le milieu I est tel que  $kt^2 = k'(1-r^2)$ . En supposant que les milieux I et II sont identiques, l'amplitude des ondes rayonnées (3) et (5) est donc  $tG$ ; cependant, par suite de l'interférence entre les ondes (2) et (3), en opposition de phase, l'onde retournant vers le milieu I a pour amplitude  $|rI - tG|$ . Puisque les milieux I et II sont identiques, on a le même coefficient de proportionnalité  $k$  et l'énergie rendue au milieu I par un élément de longueur  $dx$  est égale à  $k(rI - tG)^2 dx/\lambda$ , celle rendue au milieu II par le même élément est égale à  $kt^2 G^2 dx/\lambda$ . Enfin l'énergie absorbée dans cet élément de guide par sa viscosité est égale à  $k' \alpha G^2 dx$ , en appelant  $\alpha$  le coefficient d'absorption.

Écrivons maintenant le bilan énergétique pour l'élément  $dx$ . La variation de l'énergie guidée est égale à la différence entre l'énergie reçue [de (1)] et les énergies rendues [au milieu I par (2) et (3) et au milieu II par (5)] et absorbée, soit :

$$(1) \quad k' d(G^2) = k [I^2 - (rI - tG)^2 - t^2 G^2] \times dx/\lambda - k' \alpha G^2 dx,$$

ou, en posant  $G^2 = y$  et  $k' \lambda/k = \Lambda$  :

$$(2) \quad \Lambda y' = (1 - r^2) I^2 + 2rt I y^{1/2} - (2t^2 + \alpha \Lambda) y.$$

En l'absence de couplage avec le milieu II (milieu II d'indice inférieur à celui du guide), (2) devient :

$$(3) \quad \Lambda y' = (1 - r^2) I^2 + 2rt I y^{1/2} - (t^2 + \alpha \Lambda) y.$$

En l'absence de couplage avec la source ( $I=0$ ), (2) devient (fig. 1b) :

$$(4) \quad \Lambda y' = -(2t^2 + \alpha \Lambda) y$$

et (3) devient :

$$(5) \quad \Lambda y' = -(t^2 + \alpha \Lambda) y.$$

En l'absence de couplage avec les deux milieux (confinement), (2) devient (fig. 1c) :

$$(6) \quad y' = -\alpha y.$$

Pendant toute la durée du couplage entre la source et le guide, l'équation différentielle est donc du type (2) ou (3); elle n'est pas intégrable analytiquement. Considérons d'abord le cas d'un faisceau incident dont l'amplitude est constante et égale à  $I$  à partir de  $x=0$ . Lorsque  $x$  est petit, c'est-à-dire au début du couplage, l'énergie de l'onde guidée croît pratiquement linéairement, avec une pente égale à  $k(1-r^2)I^2/\lambda$ . Lorsque  $x$  tend vers un grand nombre de longueurs d'onde, on observe une saturation. Si on pose  $A=G/I$ ,  $A$  représente un coefficient d'amplification qui tend vers :

$$(7) \quad A_\infty = \{ rt + [r^2 t^2 + (1-r^2) \times (pt^2 + \alpha \Lambda)]^{1/2} \} / (pt^2 + \alpha \Lambda),$$

en désignant par  $p$  le nombre de faces du guide

## FAISCEAU BORNÉ, RÉFLEXION ET RÉFRACTION

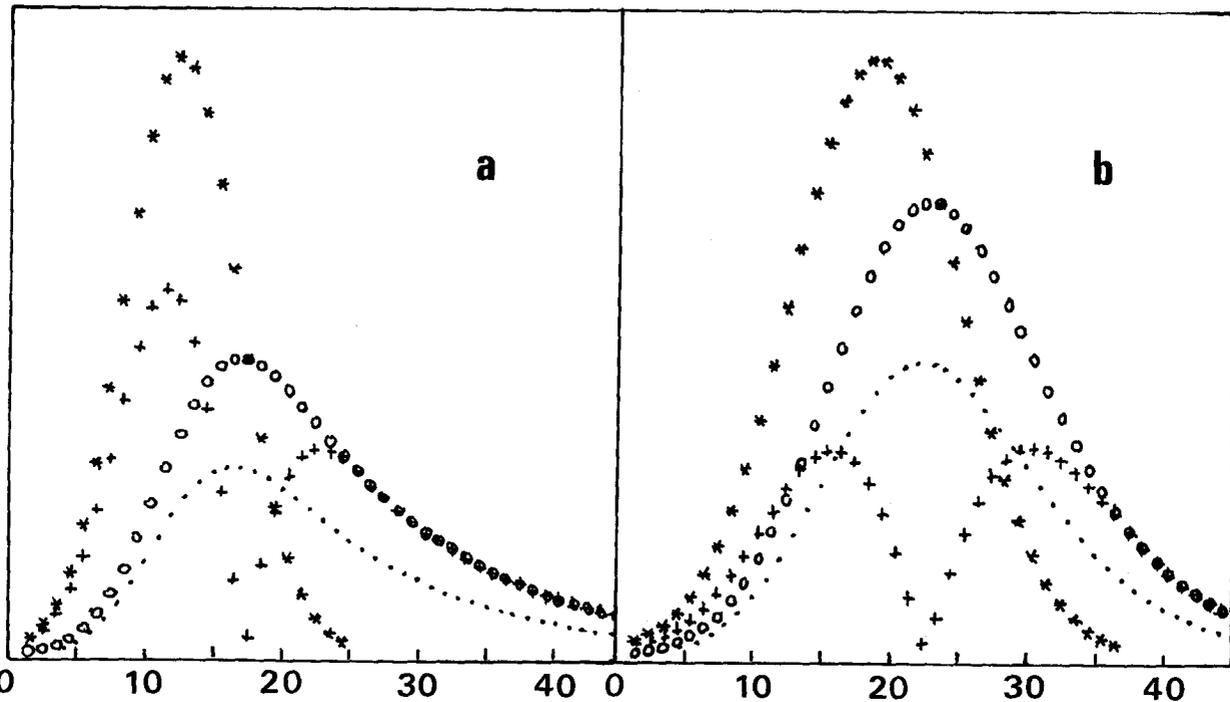


Fig. 4. — Répartition des amplitudes calculées le long d'une plaque (abscisse en nombre de longueurs d'onde), dans le faisceau incident (\*), dans le guide (.), dans le faisceau retournant au milieu I (+) et dans le faisceau retournant au milieu II (o) : (a)  $\lambda = 1,7$  mm et  $r = 0,96$ , (b)  $\lambda = 1,2$  mm et  $r = 0,93$ .

couplées avec les milieux extérieurs; pour  $p=1$  et  $\alpha \approx 0$ , on a :

$$(8) \quad A_{\infty} = (1+r)/t,$$

qui tend vers  $2/t$  lorsque  $r$  est voisin de 1. Cependant, cette saturation n'est atteinte que si le couplage entre la source et le guide est réalisé sur une longueur suffisante. On peut aussi définir à partir de  $A$  un rendement, rapport entre l'énergie guidée et celle qu'il a fallu fournir au guide :

$$(9) \quad \eta = A^2 \Lambda/x.$$

La résolution numérique de l'équation différentielle (2) ou (3), par exemple au moyen de la méthode de Runge-Kutta [10], permet de calculer l'amplitude guidée  $G$  en tout point du guide, même lorsque  $I$  est une fonction (en particulier gaussienne) de  $x$ ; on en déduit les amplitudes  $|rI - tG|$  et  $tG$  des ondes retournant vers les milieux I et II.

Lorsque la source n'est plus couplée au guide, l'intégration de (4), (5) ou (6) montre que l'énergie guidée décroît exponentiellement. Si on appelle  $s$  la longueur de couplage et  $G_m$  l'amplitude obtenue à la fin du couplage, on a :

$$(10) \quad G^2 = G_m^2 \exp[-\beta(x-s)],$$

en posant  $\beta = pt^2/\Lambda + \alpha$ .

Si on utilise ce modèle [équations (2) et (4)] pour représenter les courbes des figures 3, on peut en déduire la valeur du coefficient  $r$ , en calculant  $\lambda$  à

partir de  $i$  et de  $f$  et en faisant les hypothèses suivantes : (a) la distribution de l'amplitude dans le faisceau incident est gaussienne et sa largeur, mesurée à  $\pm 1,5$  écart-type, est égale au diamètre de la pastille piézoélectrique de l'émetteur, divisé par  $\cos i$ <sup>(1)</sup>, (b)  $k'/k$  est voisin du rapport des impédances dans l'acier et dans l'eau pour les ondes considérées<sup>(2)</sup>, (c)  $\alpha \approx 0$ . C'est ainsi que, pour le mode  $A_1$ ,  $\lambda = 1,7$  mm,  $k'/k \approx 30$  et on peut estimer que  $r = 0,96$  à 3,45 MHz (fig. 4a); pour le mode  $S_0$ ,  $\lambda = 1,2$  mm,  $k'/k \approx 17$  et  $r = 0,93$  à 2,95 MHz (fig. 4b).

### 4. Application à une émission par impulsions

Les ultrasons sont souvent utilisés pour détecter la présence d'obstacles; c'est le cas par exemple en contrôle non destructif [9] et l'émission se fait alors par impulsions, avec une fréquence de récurrence de l'ordre du kilohertz. Quand ces impulsions sont utilisées pour engendrer des ondes guidées, elles doivent être suffisamment longues pour que l'énergie guidée ait le temps de croître. Pour simplifier, on considérera le cas d'un faisceau incident rectangulaire; on se rappelle en effet que l'énergie guidée croît alors linéairement avec la durée du couplage, au début de celui-ci (§3). Plutôt que des impulsions brèves, il est donc préférable d'utiliser des trains d'onde, qui permettent de plus un meilleur accord fréquentiel avec le mode

<sup>(1)</sup> Cette hypothèse correspond à un bon ajustement des courbes expérimentales donnant  $I$  sur les figures 3.

<sup>(2)</sup> Ce rapport n'a d'influence que sur l'amplitude de l'onde guidée relativement aux amplitudes des autres ondes.

à guider. On peut exprimer la durée du train d'onde incident en nombre  $m$  de périodes; la longueur du train guidé sera ainsi  $m\lambda$  et, pour tirer tout le profit de la longueur  $s$  du guide le long de laquelle la condition de synchronisation entre source et guide est vérifiée, il faut choisir :

$$(11) \quad m = s/\lambda.$$

### 5. Application à un guide fermé

Si on ferme le guide sur lui-même, il devient possible de réaliser un résonateur fonctionnant en ondes progressives comme en ondes stationnaires. L'existence d'ondes ultrasonores circonférentielles, pouvant circuler dans un tube ou bien à la surface d'un cylindre, a été mise en évidence depuis longtemps sous forme d'une succession d'échos équidistants, avec un intervalle correspondant au temps nécessaire pour que l'onde effectue une révolution. On a d'abord observé des systèmes stationnaires, par rétrodiffusion d'une impulsion dirigée sur un objet cylindrique éloigné [11-14] : deux ondes circonférentielles de sens contraires sont ainsi engendrées et interfèrent; l'influence d'un réflecteur dans le guide a également été étudiée [15]. Puis des ondes progressives ont été observées, en utilisant un émetteur et un récepteur séparés, orientés selon une incidence correspondant à un angle critique de Rayleigh ou de Lamb [16].

Nous avons mis au point un « prisme courbe » qui permet de coupler un tel guide avec une source plane annulaire, disposée coaxialement avec le guide [17]; il s'agit en fait d'un miroir qui défléchit de  $90^\circ$  le faisceau émis par la source vers le tube et lui donne une incidence dans des plans équatoriaux du tube telle que la synchronisation entre ondes incidentes et ondes guidées est obtenue, sur une longueur d'arc qui peut atteindre  $360^\circ$ . Ainsi, lorsque l'émission est continue, l'énergie incidente est pratiquement constante sur toute la longueur  $s$  de couplage et celui-ci peut être prolongé indéfiniment si on a :

$$(12) \quad s = 2\pi R = q\lambda,$$

en désignant par  $R$  le rayon du guide et par  $q$  un entier. Dans ces conditions, le coefficient d'amplification  $A$  peut atteindre sa valeur à saturation donnée par (7), ce qui n'est guère possible avec un guide plat; or cette valeur à saturation devient très importante lorsque  $r$  est voisin de 1.

Lorsque l'émission est par impulsions, ce prisme nous a permis d'obtenir des échos multiples dans un tube en présence d'un réflecteur. Nous avons observé à cette occasion que le premier écho n'était pas toujours

le plus intense [17]. Ceci peut s'expliquer par l'interférence entre deux trains d'onde guidés tournant en sens contraires, et l'enveloppe de l'écho multiple est donnée par [4] :

$$(13) \quad y = y_0 \exp(-2\pi n R \beta) [1 - (1-2\rho)^{n+1}]/2,$$

$n$  désignant le nombre de tours,  $\beta$  étant donné par (10) et  $\rho$  étant égal au rapport des sections du réflecteur et du faisceau guidé.

### 6. Conclusion

La démarche qui a été suivie ici était très pragmatique. Le modèle obtenu décrit assez bien le profil des amplitudes dans les faisceaux de part et d'autre d'une plaque guidant des ondes de Lamb. Des conséquences pratiques en ont été tirées pour le contrôle non destructif mais il reste à mieux comprendre comment se forme l'écho.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. A. VIKTOROV, *Rayleigh and Lamb waves*, Plenum Press, New York, 1970.
- [2] W. G. NEUBAUER, *J. Appl. Phys.*, 44, 1973, p. 48.
- [3] A. FAURE, G. MAZE et J. RIPOCHE, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 283, série B, 1976, p. 45.
- [4] B. POUCHIN, *Projet de fin d'études soutenu le 27 juin 1983*, ENSIEG.
- [5] D. C. WORLTON, *Rapport Hanford HW-60662*, 1959.
- [6] H. L. BERTONI et T. TAMIR, *Appl. Phys.*, 2, 1973, p. 157.
- [7] R. FIORITO, W. MADIGOSKY et H. ÜBERALL, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 66, 1979, p. 1857.
- [8] J. M. CLAEYS et O. LE ROY, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 72, 1982, p. 585.
- [9] J. PERDIJON, *L'échographie*, Dunod, Paris, 1981.
- [10] P. FLORENT, G. LAUTON et M. LAUTON, *Équations et systèmes différentiels*, Vuibert, Paris, 1978.
- [11] K. J. DIERCKX, T. G. GOLDSBERRY et C. W. HORTON, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 35, 1963, p. 59.
- [12] R. D. DOOLITTLE, H. ÜBERALL et P. UGINCIUS, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 43, 1968, p. 1.
- [13] G. MAZE et J. RIPOCHE, *Revue Phys. Appl.*, 18, 1983, p. 319.
- [14] M. FEKIH et G. QUENTIN, *Phys. Lett.*, 96A, 1983, p. 379.
- [15] T. G. GOLDSBERRY, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 42, 1967, p. 1298.
- [16] R. E. BUNNEY, R. R. GOODMAN et S. W. MARSHALL, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 46, 1969, p. 1223.
- [17] J. PERDIJON, *Revue Phys. Appl.*, 18, 1983, p. 129.