FAISCEAU BORNÉ, RÉFLEXION ET RÉFRACTION

Réflexion, en ondes courtes,

d'un faisceau acoustique étroit

à l'incidence de Rayleigh

Reflection of a short-wave acoustic narrow beam at Rayleigh incidence



Martine ROUSSEAU

Laboratoire de Mécanique Théorique de Paris-VI (L.A. 229), Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05

Thèse 3e cycle: Études asymptotiques de la transmission de faisceaux acoustiques bornés.

Contrat DRET Jeune Chercheur : Modélisation du comportement mécanique des fonds marins sédimentaires. Application à la prospection ultrasonore.

Attachée de Recherche au CNRS depuis un an et demi :

- Interaction entre un faisceau acoustique étroit et une interface fluide-solide (respt une couche élastique) à l'incidence de Rayleigh (respt aux incidences de Lamb).
- Travaux actuels orientés vers l'étude de la propagation acoustique dans les composites stratifiés.



Philippe GATIGNOL

Université de Technologie de Compiègne (Division d'Acoustique et Vibrations Industrielles), B.P. n° 233, 60206 COMPIÈGNE CEDEX

Ancien élève de l'École Normale Supérieure, agrégé de Mathématiques, docteur Es-Sciences, professeur à la Division d'Acoustique de l'Université de Technologie de Compiègne.

Activités de recherche: propagation des ondes viscoélastiques; théorie des ondes dispersives non linéaires: applications aux ondes de gravité et aux ondes dans les plasmas; acoustique des faisceaux bornés: modélisation de la propagation et étude asymptotique; analyse du champ acoustique intensimétrique.

RÉSUMÉ

Les études expérimentales et théoriques relatives à la réflexion d'un faisceau acoustique étroit, sur une interface plane fluide-solide, montrent que pour une incidence voisine de l'angle de Rayleigh, le profil du faisceau réfléchi est influencé par le rerayonnement dans le fluide de l'onde de Rayleigh excitée par le faisceau incident. Les théories antérieures reposent sur des considérations portant sur la distribution des champs de vitesse sur l'interface. Ici, ces résultats sont élargis dans le sens suivant : le faisceau incident est défini par la donnée de la vitesse normale sur le plan émetteur; le faisceau réfléchi est décrit par le champ de pression évalué dans un domaine qui n'est plus restreint à l'interface; enfin, nous considérons successivement le cas d'un faisceau gaussien et le cas d'une source vibrant en mode piston.

MOTS CLÉS

Acoustique, ultrasons, faisceaux bornés, interface fluide-solide, incidence de Rayleigh, onde de Rayleigh, faisceau gaussien, émetteur de type piston, ondes courtes, méthode du col.

SUMMARY

Experimental studies about the reflection of a bounded acoustic beam onto a plane liquid-solid interface show that for an incidence at or near the Rayleigh angle, the reflected field exhibits unexpected properties which are now understood: the key is the reradiation in the liquid medium of the Rayleigh wave generated by coupling with the incident beam. Theoretical descriptions of this feature have been proposed that are based upon considerations on the velocity distribution along the interface. Here, these previous theories are enlarged in the following sense: the incident beam is now defined by its velocity distribution along a plane emitter; the reflected beam is described through its pressure field in a region which is not restricted to the interface; the case of a Gaussian beam and of a piston source are considered.

KEY WORDS

Acoustics, ultrasonic waves, bounded beams, liquid-solid interface, Rayleigh incidence, Rayleigh wave, Gaussian beam, piston transmitter, short waves, steepest descent method.

TABLE DES MATIÈRES

- 1. Modèle du faisceau gaussien
- 2. Modèle de la source vibrant en mode piston

Conclusion

Bibliographie

1. Modèle du faisceau gaussien

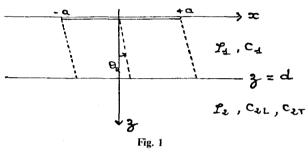
Une explication théorique des effets observés à la réflexion d'un faisceau acoustique sur une interface plane fluide-solide, sous l'incidence de Rayleigh, a été proposée par Bertoni et Tamir [1] en 1973. Les auteurs se donnent une distribution gaussienne du champ de vitesse incident sur l'interface et, sous des hypothèses d'ondes courtes, évaluent la vitesse réfléchie sur cette même interface. Ces résultats sont en bon accord avec l'expérience et avec les travaux numériques de Ngnoc et Mayer [2].

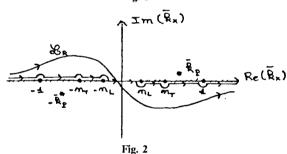
Ici nous proposons une extension de cette étude. En particulier, le champ de vitesse incident est donné sur l'émetteur, situé dans le fluide et l'expression asymptotique obtenue pour le champ de pression réfléchi est valable dans un domaine plus large que celui de l'interface. On se réferre à la figure 1 pour la définition des coordonnées. Le demi-espace z < d est un fluide parfait de masse volumique φ_1 et de vitesse du son c_1 . Le demi-espace z > d est un solide élastique caractérisé par sa masse volumique φ_2 et les vitesses des ondes longitudinales et transversales c_{2L} et c_{2T} . L'émetteur, placé en z = 0, est parallèle à l'interface. L'incidence du faisceau est obtenue par modulation de la phase le long de l'émetteur.

La vitesse normale des particules au niveau de l'émetteur est donnée par :

(1)
$$V_n(x, 0) = V_0 e^{-(x/a)^2 e^{ik} 1^{\sin \theta} R^x},$$

où V_0 est l'amplitude centrale de V_n ; a est la largeur





caractéristique du faisceau gaussien, k_1 est le nombre d'onde dans le fluide ($k_1 = \omega/c_1$ avec ω fréquence angulaire de l'émetteur); enfin θ_R est l'incidence du faisceau, prise ici, égale à l'angle de Rayleigh du solide considéré. Le champ de pression réfléchi s'exprime (voir réf. [1], [5]):

(2)
$$P_{\text{ref}}(x, z) = \frac{\rho_1 c_1 V_0}{2 \sqrt{\pi}} (k_1 a) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\overline{k}_x)}{\overline{k}_{z_1}} e^{(k_1 a)^2 f_R(\overline{k}_x)} d\overline{k}_x,$$

avec

$$f_{R}(\bar{k}_{x}) = \frac{-(\sin\theta_{R} - \bar{k}_{x})^{2}}{4} + i \left[\frac{(x/a)}{k_{1} a} \, \bar{k}_{x} + \frac{(2 \, d/a - z/a)}{k_{1} a} \, \bar{k}_{z1} \right]$$

et:

$$\bar{k}_{z1} = (1 - \bar{k}_x^2)^{1/2}$$
.

La variable \bar{k}_x est sans dimension et rapportée au

FAISCEAU BORNÉ, RÉFLEXION ET RÉFRACTION

nombre d'onde k_1 . Ici, $R(\overline{k}_x)$ est le coefficient de réflexion des ondes planes pour la configuration fluide-solide :

du faisceau géométrique réfléchi. Ce décalage, donné par « $2/(k_1 \alpha)$ » coïncide avec le déplacement de Schoch [1].

(3)
$$R(\bar{k}_x) = \frac{(2\bar{k}_x^2 - n_T^2)^2 + 4\bar{k}_x^2 (n_L^2 - \bar{k}_x^2)^{1/2} (n_T^2 - \bar{k}_x^2)^{1/2} - (\rho_1/\rho_2) n_T^4 (n_L^2 - \bar{k}_x^2)^{1/2} / (1 - \bar{k}_x^2)^{1/2}}{(2\bar{k}_x^2 - n_T^2)^2 + 4\bar{k}_x^2 (n_L^2 - \bar{k}_x^2)^{1/2} (n_T^2 - \bar{k}_x^2)^{1/2} + (\rho_1/\rho_2) n_T^4 (n_L^2 - \bar{k}_x^2)^{1/2} / (1 - \bar{k}_x^2)^{1/2}}$$

avec $n_L = C_1/C_{2L}$ et $n_T = C_1/C_{2T}$.

Les parties réelles et imaginaires de $(n_{\rm L}^2 - \overline{k_x^2})^{1/2}$, $(n_{\rm T}^2 - \overline{k_x^2})^{1/2}$ et $(1 - \overline{k_x^2})^{1/2}$ sont choisies positives ou nulles sur l'axe réel de sorte que le contour d'intégration initial réel est celui indiqué sur la figure 2.

Pour le cas usuel : $c_1 < c_{2T} < c_{2L}$, R (\bar{k}_x) a une paire de pôles en $\bar{k}_x = \pm \bar{k}_P$. Si on suppose $\rho_1/\rho_2 \ll 1$, \bar{k}_P s'écrit :

(4)
$$\bar{k}_{\rm P} = \sin \theta_{\rm R} + i \, \bar{\alpha},$$

avec $\bar{\alpha} \ll 1$, $\bar{\alpha}$ proportionnel à ρ_1/ρ_2 .

Pour l'évaluation de (2), on suppose que $k_1 a \gg 1$. La méthode de plus grande pente ([4], [5]) permet alors de déterminer l'expression asymptotique du champ de pression pour $x \sim a$, $z \sim a$ et $d \sim a$. Nous commentons les résultats en fonction de l'ordre de grandeur respectif des deux petits paramètres $\bar{\alpha}$ et $1/(k_1 a)$ (ce qui revient à comparer la mesure d'impédance et les hypothèses d'ondes courtes).

(i)
$$\bar{\alpha} \gg 1/(k_1 a)$$
:

(5)
$$P_{\text{ref}}(x, z) = -\frac{\rho_{1} c_{1} V_{0}}{\cos \theta_{R}} e^{-[(x/a) - (2 d/a - z/a) \lg \theta_{R}]^{2}} \times e^{i (k_{1} \sin \theta_{R} x + k_{1} \cos \theta_{R} (2 d - z))}$$

$$-\frac{2 \rho_{1} c_{1} V_{0}}{\cos \theta_{R}} \left(\frac{2 [(x/a) - (2 d/a - z/a) \lg \theta_{R}]}{(k_{1} a) \overline{\alpha}} \right) \times e^{-[(x/a) - (2 d/a - z/a) \lg \theta_{R}]^{2}} \times e^{i (k_{1} \sin \theta_{R} x + k_{1} \cos \theta_{R} (2 d - z))}$$

$$+ O (\sup (1/(k_{1} a), 1/\overline{\alpha}^{2} (k_{1} a)^{2})).$$

En comparant avec l'expression au premier ordre du faisceau incident (voir réf. [5]), il apparaît que le champ réfléchi se réduit pratiquement à sa partie géométrique avec : $R(\sin\theta_R) = -1$. Le second terme de (5) exprime le rerayonnement de l'onde de Rayleigh, sa contribution est faible. Si on écrit (5) sous la forme :

(6)
$$P_{\text{ref}}(x, z) = -\frac{\rho_1 c_1 V_0}{\cos \theta_R} e^{-\{(x/a) - (2 d/a - z/a) \lg \theta_R - 2/\overline{\alpha} (k_1 a)\}^2} \times e^{i (k_1 \sin \theta_R x + k_1 \cos \theta_R (2 d - z))} + O(\sup (1/(k_1 a), 1/\overline{\alpha}^2 (k_1 a)^2)),$$

nous remarquons que la ligne d'amplitude maximale est donnée par :

(7)
$$x = (2 d - z) \operatorname{tg} \theta_{\mathbf{R}} + 2/(k_1 \bar{\alpha}),$$

avec $1/(k_1 \bar{\alpha}) \ll a$.

D'après ce résultat, il apparaît que l'onde de Rayleigh rerayonnante a pour effet de causer un déplacement (ii) $\bar{\alpha} \ll 1/(k_1 a)$

(8)
$$P_{\text{ref}}(x, z) = \frac{-\rho_1 c_1 V_0}{\cos \theta_R} e^{-[(x/a) - (2 d/a - z/a) \operatorname{tg} \theta_R]^2} \times e^{i (k_1 \sin \theta_R x + k_1 \cos \theta_R (2 d - z))} + \frac{2\rho_1 c_1 V_0}{\cos \theta_R} e^{-[(x/a) - (2 d/a - z/a) \operatorname{tg} \theta_R]^2} \times e^{i (k_1 \sin \theta_R x + k_1 \cos \theta_R (2 d - z))} + O(\sup (1/(k_1 a), \bar{\alpha}(k_1 a))).$$

Le faisceau réfléchi résulte de la superposition de deux champs: le premier correspond à la réflexion géométrique tandis que le second décrit le processus de rerayonnement de l'onde de Rayleigh. Toutefois, le faisceau réfléchi a un comportement global régulier où ni distorsion, ni déplacement n'apparaissent.

(iii)
$$\tilde{\alpha} \sim 1/(k_1 a)$$
:

(9)
$$P_{\text{ref}}(x, z) = -\frac{\rho_{1} c_{1} V_{0}}{\cos \theta_{R}} e^{-[(x/a) - (2 d/a - z/a) \operatorname{tg} \theta_{R}]^{2}} \times e^{i (k_{1} \sin \theta_{R} x + k_{1} \cos \theta_{R} (2 d - z))} + \frac{\rho_{1} c_{1} V_{0}}{\cos \theta_{R}} e^{-[(x/a) - (2 d/a - z/a) \operatorname{tg} \theta_{R}]^{2}} \times e^{i (k_{1} \sin \theta_{R} x + k_{1} \cos \theta_{R} (2 d - z))}$$

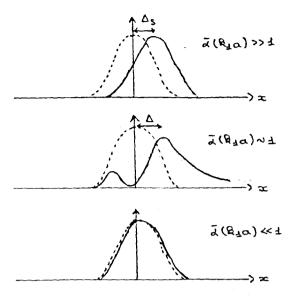
$$\left\{ 2 - \sqrt{\pi \alpha} (k_{1} a) e^{i \alpha (k_{1} a) - 2 ((x/a) - (2 d/a - z/a) \operatorname{tg} \theta_{R}))^{2}} / 4 \right\}$$

$$\text{erfc} \left\{ \frac{\alpha (k_{1} a) - 2 ((x/a) - (2 d/a - z/a) \operatorname{tg} \theta_{R})}{2} \right\}$$

$$+ O(1/(k_{1} a)).$$

Le champ est composé de deux parties : la première est purement géométrique et la seconde correspond au rerayonnement de l'onde de Rayleigh. D'après (9), on remarque que le faisceau réfléchi ne dépend que des deux paramètres : $(\bar{\alpha}(k_1 a))$ et $(\bar{\alpha}(k_1 a))$ et $(\bar{\alpha}(k_1 a))$ et $(\bar{\alpha}(k_1 a))$ on retrouve respectivement les cas (i) et (ii). Dans le cas particulier où : z = d = 0, nous obtenons, à un facteur constant près, les résultats de Bertoni et Tamir [1], qui sont ainsi généralisés. Ce dernier résultat permet en outre de remarquer qu'à l'ordre étudié, les champs de vitesse et de pression ont le même comportement.

L'étude en fonction de x conduit à une représentation du profil d'amplitude réfléchie. Nous observons ainsi : un déplacement du maximum d'amplitude (égal à $2 \mid (k_1 \bar{\alpha})$ pour $\bar{\alpha}(k_1 a) \gg 1$ et à zéro pour $\bar{\alpha}(k_1 a) \ll 1$) et l'apparition d'une zone de silence pour $\bar{\alpha}(k_1 a) \sim 1$.



.... Faibceau incident (3=d) Fairceau Répréchi (3 = d) D3 = 2/(Rx I) : déplacement de Schoch. : déflacement du macimum d'amplitude.

Ces deux phénomènes sont dus respectivement à des interférences constructives et destructives des deux composantes du champ. Pour $\bar{\alpha}(k, a) \sim 1$ et pour x croissant, le faisceau réfléchi se réduit progressivement au seul rerayonnement de l'onde de Rayleigh généralisée. Les phénomènes décrits dans cette section sont résumés sur la figure 3, ils disparaissent lorsque l'incidence du faisceau s'éloigne de l'angle de Rayleigh. Les calculs effectués pour une incidence θ_i différentes de $\theta_{\mathbf{R}}$ montrent que pour $|\sin \theta_i - \sin \theta_{\mathbf{R}}| \gg 1/(k_1 a)$ on observe uniquement les effets speculaires.

2. Modèle de la source vibrant en mode piston

La configuration étudiée est celle de la figure 1; les notations et les hypothèses sont les mêmes qu'à la section précédente. La vitesse normale des particules sur l'émetteur est donnée par :

(10)
$$V_{n}(x, 0) = \begin{cases} V_{0} e^{i(k_{1} \sin \theta_{R} x - \omega t)} & \text{si } |x| \leq a, \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

et le champ réfléchi correspondant s'écrit :

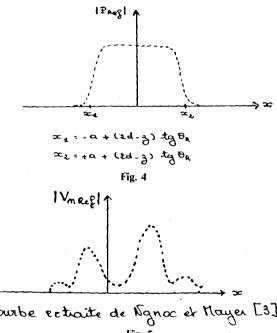
(11)
$$P_{\text{ref}}(x, z) = \frac{\rho_{1} c_{1} V_{0}}{2 \pi i} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\bar{k}_{x})}{\bar{k}_{z1}} \left\{ \frac{e^{i (k_{1} a) (\sin \theta_{R} - \bar{k}_{x})} - e^{-i (k_{1} a) (\sin \theta_{R} - \bar{k}_{x})}}{(\sin \theta_{R} - \bar{k}_{x})} \right\} \times e^{i (k_{1} a) (\bar{k}_{x} (x/a) + \bar{k}_{z1} (2 d/a - z/a))} d\bar{k}_{x}$$

où le contour d'intégration réel est encore celui de la figure 2. Ce contour est remplacé, de manière équivalente, par le trajet $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ du plan complexe \bar{k}_x (voir fig. 2) de sorte que (11) peut se décomposer sous

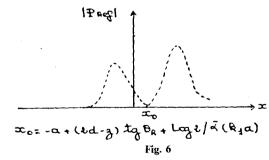
(12)
$$P_{\text{ref}}(x, z) = \frac{\rho_1 c_1 V_0}{2 \pi i} \{ R_1(x, z) - R_2(x, z) \},$$

$$(13) \begin{cases} R_{1}(x, z) = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\bar{k}_{x}) e^{i(k_{1} a)(\sin \theta_{R} + \bar{k}_{x}((x/a) - 1) + \bar{k}_{z_{1}}(2 d/a - z/a))}}{\bar{k}_{z_{1}}(\sin \theta_{R} - \bar{k}_{x})} d\bar{k}_{x}, \\ R_{2}(x, z) = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\bar{k}_{x}) e^{i(k_{1} a)(\sin \theta_{R} + \bar{k}_{x}((x/a) + 1) + \bar{k}_{z_{1}}(2 d/a - z/a))}}{\bar{k}_{z_{1}}(\sin \theta_{R} - \bar{k}_{x})} d\bar{k}_{x}. \end{cases}$$

Les intégrandes de R₁ et R₂ ont trois singularités : la paire de pôles $k_x = \pm k_p$ du coefficient de réflexion et le pôle $k_x = \sin \theta_R$. Toujours pour $k_1 a \gg 1$, R_1 et R_2 sont évaluées par application de la méthode de plus



courbe estraite de Ngnox et Mayer [3]. Fig. 5



grande pente ([4], [5]). L'expression asymptotique obtenue est valable pour $x \sim a$, $z \sim a$ et $d \sim a$. A nouveau, nous discutons les résultats en fonction de l'ordre de grandeur respectif des deux petits paramètres : $\bar{\alpha}$ et $1/(k_1 a)$.

(i) $\bar{\alpha} \gg 1/(k_1 a)$:

figure 5, on observe : une zone de silence au voisinage de x_0 , deux pics d'amplitude maximale et un élargissement du champ, au-delà des limites géométriques. Ces

(14)
$$P_{\text{ref}}(x, z) = \begin{cases} O(1/k_1 a)^{1/2}, & \text{si } x < -a + (2d - z) \operatorname{tg} \theta_{\mathbb{R}}, \\ -\frac{\rho_1 c_1 V_0}{\cos \theta_{\mathbb{R}}} e^{i (k_1 \sin \theta_{\mathbb{R}} x + k_1 \cos \theta_{\mathbb{R}} (2d - z))} + O(1/(k_1 a)^{1/2}), \\ & \text{si } -a + (2d - z) \operatorname{tg} \theta_{\mathbb{R}} < x < +a + (2d - z) \operatorname{tg} \theta_{\mathbb{R}}, \\ O(1/(k_1 a)^{1/2}), & \text{si } x > a + (2d - z) \operatorname{tg} \theta_{\mathbb{R}}, \end{cases}$$

à l'ordre étudié, le champ réfléchi est limité à un faisceau spéculaire. Cet effet purement géométrique a déià été observé dans la section I. Cependant, dans le cas présent, aucun déplacement du faisceau réfléchi n'apparaît, la contribution de l'onde de Rayleigh étant plus faible que les effets de diffraction décrits par les termes d'ordre $1/(k_1 a)^{1/2}$.

(ii) $\bar{\alpha} \ll 1/(k_1 a)$:

effets ont déjà été qualitativement observés dans le cas gaussien.

Les résultats obtenus sont en bon accord (aux lobes secondaires près) avec les travaux numériques de Ngnoc et Mayer [3] relatifs à la vitesse réfléchie sur l'interface (voir fig. 6). Une comparaison des figures 5 et 6 montre que pour z et d différents de zéro, la structure du champ réfléchi n'est pas fondamentale-

(15)
$$P_{\text{ref}}(x, z) = \begin{cases} O(1/(k_1 a)^{1/2}), & \text{si } x < -a + (2d - z) \operatorname{tg} \theta_{\mathbb{R}}, \\ -\frac{\rho_1 c_1 V_0}{\cos \theta_{\mathbb{R}}} e^{i(k_1 \sin \theta_{\mathbb{R}} x + k_1 \cos \theta_{\mathbb{R}} (2d - z))} \\ +\frac{2\rho_1 c_1 V_0}{\cos \theta_{\mathbb{R}}} e^{i(k_1 \sin \theta_{\mathbb{R}} x + k_1 \cos \theta_{\mathbb{R}} (2d - z))} + O(\sup(\bar{\alpha}(k_1 a), 1/(k_1 a)^{1/2})), \\ \sin -a + (2d - z) \operatorname{tg} \theta_{\mathbb{R}} < x < +a + (2d - z) \operatorname{tg} \theta_{\mathbb{R}}, \\ O(\sup(\bar{\alpha}(k_1 a), 1/(k_1 a)^{1/2})), & \sin x > +a + (2d - z) \operatorname{tg} \theta_{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

Les effets sont identiques à ceux observés pour le faisceau gaussien et le champ réfléchi a un comportement global similaire à une réflexion géométrique. Dans les cas (i) et (ii), le profil du faisceau réfléchi est donné figure 4.

(iii) $\bar{\alpha} \sim 1/(k_1 a)$:

ment modifiée et que, à l'ordre étudié, les champs de vitesse et de pression ont un comportement équivalent. L'ensemble de ces effets disparaît lorsque l'incidence du faisceau s'éloigne de l'angle de Rayleigh. Une étude analogue a été effectuée lorsque l'incidence θ_i est différente de l'angle de Rayleigh θ_R .

Dans l'expression (16), nous reconnaissons : la réflexion spéculaire, le rerayonnement de l'onde de Rayleigh et les effets de diffraction (décrits par les termes d'ordre $1/(k_1 a)^{1/2}$ et responsables des lobes secondaires bien connus dans l'étude des sources vibrant en mode piston). Le champ réfléchi dépend du paramètre $\bar{\alpha}(k_1 a)$; pour $\bar{\alpha}(k_1 a) \gg 1$ et $\bar{\alpha}(k_1 a) \ll 1$, nous retrouvons respectivement les cas (i) et (ii).

Pour $\bar{\alpha}(k, a) \sim 1$, l'étude en fonction de x laisse apparaître un profil de faisceau réfléchi distordu. Sur la Il apparaît que les effets décrits ici disparaissent progressivement lorsqu'on s'éloigne de l'incidence critique; pour $|\sin \theta_i - \sin \theta_R| \gg 1/(k_1 a)^{1/2}$, on observe uniquement la réflexion géométrique.

Conclusion

Le travail présenté ici a permis d'étendre les conditions d'émission et le domaine d'étude de la réflexion d'un faisceau acoustique étroit sur une interface

FAISCEAU BORNÉ, RÉFLEXION ET RÉFRACTION

fluide-solide à l'incidence de Rayleigh. Les résultats obtenus au niveau de l'interface sont conformes aux études théoriques et/ou numériques antérieures. La méthode utilisée conduit également à des résultats satisfaisants pour l'étude de la réflexion et de la transmission d'un faisceau borné sur une couche élastique immergée, lorsque l'incidence correspond à l'excitation d'un mode de Lamb. Il peut être envisagé de l'appliquer à d'autres configurations telles que les milieux stratifiés ou composites plus complexes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. L. Bertoni et T. Tamir, Unified theory of Rayleighangle phenomena for acoustic beams at liquid-solid interfaces, *Appl. Phys.*, 2, 1973, p. 153-172.

- [2] T. D. K. Ngnoc et W. G. Mayer, Numerical integration method for reflected beam profiles near Rayleigh-angle, J. Acoust. Soc. Amer., 67, 1980, p. 1149-1152.
- [3] T. D. K. Ngnoc et W. G. Mayer, Non-specular effects for a finite incident beam modeled by an even-ordered polynomial, *IEEE Trans. Sonics. Ultrason.*, SU-30, 1983, p. 276-278.
- [4] M. Roseau, Asymptotic wave theory, North Holland series in applied mathematics and mechanics, 20, Edition North Holland, 1976.
- [5] M. ROUSSEAU, Études asymptotiques de la transmission de faisceaux acoustiques bornés, *Thèse de 3^e cycle*, Université Paris-VI, 1983, chap. 5 et 6.