Estimation de paramètres à l'aide d'une antenne. Limites de précision

Estimation of parameters using an array of sensors

Hubert DEBART

SINTRA DSM, 1, rue Allende, 94117 ARCUEIL CEDEX

Conseiller scientifique de la SINTRA. Travaux concernant la propagation aléatoire (optique et acoustique) la théorie du signal, et d'autres domaines (voir en particulier les comptes rendus du GRETSI de 1967 à 1983, et le CESTA de 1984). Recherches en cours concernant la propagation acoustique, le filtrage des séries temporelles (GRETSI, 1985, à paraître) et le développement des processus aléatoires.

RÉSUMÉ

Le présent article étudie des applications de l'inégalité générale de Cramer-Rao sous forme de limitations théoriques de la précision de mesure de grandeurs difficiles à évaluer. En particulier, on traite le cas du pouvoir séparateur d'une antenne en présence de deux sources proches, et physiquement présentes simultanément, puis le cas de la précision de mesure d'une antenne qui reçoit une onde plane déformée de façon aléatoire. Les résultats ne sont pas en général accessibles par des moyens réels de mesure; leur principal intérêt est de guider la recherche de traitement; pour le pouvoir séparateur, la conclusion est de nature pessimiste; pour l'onde plane déformée, c'est le contraire et on voit qu'il est intéressant de rechercher des traitements appropriés que la détection sous-marine pourrait atteindre, au contraire de l'astronomie.

MOTS CLÉS

Cramer-Rao : limitation théorique, pouvoir séparateur, précision angulaire, déformation aléatoire.

SUMMARY

The present article investigates some applications of the very general "Cramer-Rao" inequality in the form of theoretical limitations for the measurements of quantities whose evaluation is difficult. In particular, an approach is developed to derive the resolving power of an antenna observing two sources, close to each other and simultaneously present; on the other hand, an investigation is made of the angular precision of an antenna receiving a randomly distorted wave. As a rule, the theoretical results are very better than any actual method could achieve: but their major interest is showing ways of research for optimal treatments; for the resolving power, the conclusion is pessimistic; conversely, for the randomly distorted wave, it induces to a research of matched treatments that the underwater detection could achieve, in contrary of astronomy or optics.

KEY WORDS

Cramer-Rao : theoretical limitations, resolving power, angular precision, random distortion.

TABLE DES MATIÈRES

1. Inégalité de Cramer-Rao et ses expressions

1.1. Expression générale pour la mesure d'un paramètre

1.2. Expressions générales pour des paramètres multiples et bruit gaussien additif

1.3. Application à l'écoute passive

3. Application aux ondes planes

2.1. Mesure d'un azimut

2.2. Mesure d'une distance (courbure du front d'onde)

3. Pouvoir séparateur d'une antenne

3.1. Inversion de la matrice de bruit

3.2. Calcul des produits scalaires

3.3. Calcul de la matrice de covariance inverse

3.4. Pouvoir séparateur

3.5. Résultats numériques

4. Étude des ondes imparfaites

4.1. Perte constante de corrélation

4.2. Perte croissante de corrélation

5. Conclusion

Bibliographie

1. Inégalité de Cramer-Rao et ses expressions

L'inégalité de Cramer-Rao est un résultat très général qui permet de connaître une borne inférieure indépassable de la variance obtenue par des mesures indirectes.

1.1. Expression générale pour la mesure d'un paramètre

Si R désigne un vecteur de mesure permettant d'estimer la valeur d'un paramètre, $\hat{a}(R)$ est la valeur estimée, A la vraie valeur

$$(1)\ \mathrm{Var}[\hat{a}(R)-A)] \geqq \left(E\left(\frac{\partial \operatorname{Log} \Pr/a(R/A)}{\partial A}\right)^2\right)^{-1}.$$

L'expression n'a évidemment de sens que si la moyenne conditionnelle de $\operatorname{Log}\Pr/a(R/A)$ et sa dérivée sont finies.

On peut en donner de nombreuses généralisations, si le vecteur de mesure est affecté de bruit gaussien additif.

1.2. Expressions générales pour des paramètres multiples et bruit gaussien additif

1.2.1. *Paramètre unique, vecteur unidimensionnel*

On peut écrire alors :

$$(2) \qquad \mathrm{Var}[\hat{a}(R)-A] \geqq \frac{\sigma^2}{(\partial X_0/\partial y)^2},$$

si σ^2 est la variance du bruit gaussien, X_0 le vecteur de mesure, y le paramètre.

1.2.2. *Paramètre unique, vecteur multidimensionnel* $(X_{10}\ldots X_{n0})$

On forme alors le vecteur :

$$\overline{\frac{\partial X_{10}}{\partial y} \quad \ldots \quad \frac{\partial X_{n0}}{\partial y}} = M \text{ et sa transposée } M^T,$$

$$\mathrm{Var}[\hat{a}(R)-A] \geqq \frac{\sigma^2}{MM^T} \quad \text{est la limite de CR.}$$

1.2.3. *Plusieurs paramètres, bruits indépendants et de même loi*

On forme alors :

$$(3) \qquad M = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_{10}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial X_{n0}}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial X_{10}}{\partial y_p} & \dfrac{\partial X_{n0}}{\partial y_p} \end{bmatrix}.$$

L'expression $(1/\sigma^2)(MM^T)^{-1}$ est une matrice $p \times p$ qui peut s'interpréter comme matrice de covariance limite. Ce qui peut s'interpréter ainsi : la matrice est diagonalisable, avec p vecteurs propres qui représentent des paramètres indépendants, la limite de Cramer-Rao donne les variances limites pour ces paramètres.

1.2.4. *Plusieurs paramètres, bruits liés*

La matrice $S(n \times n)$ est la matrice de covariance des bruits gaussiens additifs.

On forme alors l'expression $(MS^{-1}M^T)^{-1}$ qui a la même signification que précédemment.

(Toutes ces propriétés peuvent être démontrées par changements de variables linéaires.)

La matrice $MS^{-1}M^T$ est désignée en général, par le nom de Fisher [1].

1.3. Application a l'écoute passive

Il est évident que les expressions qui figurent dans les matrices M, M^T sont des quantités certaines.

Si on veut appliquer ces résultats à l'écoute passive, il faut raisonner ainsi : un capteur reçoit un signal provenant d'une source de la forme $\mu(t) \cos \omega_0 t + \nu(t) \sin \omega_0 t$.

Ce signal est à bande étroite au sens de Wolf, c'est-à-dire que le déphasage dû aux différences de temps de propagation d'un bout à l'autre de l'antenne ne varie pas sensiblement d'une extrémité à l'autre de la bande utile.

Les grandeurs $\mu(t)$, $\nu(t)$ peuvent être considérées comme gaussiennes centrées et indépendantes.

On appliquera alors l'inégalité dans les conditions suivantes :

a. le signal qui sert à l'évaluation de la précision est un signal de phase quelconque, extrait de la population plus haut définie, avec une puissance égale à la puissance moyenne;

b. il est affecté d'un bruit gaussien centré dont la puissance est égale à la puissance moyenne.

On peut encore remarquer que, si on utilise la notation complexe, l'inégalité de Cramer-Rao reste valable à condition de remplacer :

$$MS^{-1}M^T, \text{ par : } \operatorname{Re}(MS^{-1}M^T),$$

ce qui sera fait systématiquement dans la suite.

2. Application aux ondes planes

On considère un ensemble de $n+1$ capteurs équidistants, espacés d'une demi-longueur d'onde sur une droite.

2.1. Mesure d'un azimut

2.1.1. *Onde plane certaine*

On considère d'abord une source plane à incidence nulle et on évalue la précision limite qu'on obtient sur la mesure de son azimut quand les capteurs reçoivent des bruits omnidirectionnels indépendants, de variance σ^2. La puissance provenant de la source est égale à P sur chaque capteur.

Si l'onde plane est d'amplitude et de phase certaines, les amplitudes reçues par les capteurs sont :

$$\sqrt{P}, \sqrt{P}e^{i\pi \sin\theta} \ldots \sqrt{P}e^{in\pi\sin\theta}.$$

La matrice de Fisher se réduit alors à un nombre :

$$(4) \quad P\frac{\pi^2}{\sigma^2} \underline{0 \quad \ldots \quad -in} \left|\begin{matrix} 0 \\ in \end{matrix}\right| = \frac{\pi^2}{\sigma^2} P \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

donc la précision limite, pour 2BT échantillons de mesure indépendants, est égale à :

$$(5) \qquad \Delta\theta^2 = 3\left(\frac{\sigma^2}{P}\right)\frac{1}{\pi^2 n(n+1)(2n+1)BT}$$

(en radians-carrés).

Une généralisation est obtenue sans peine si l'incidence de l'onde est α et l'écartement des capteurs a, pour une longueur d'onde λ.

$$(6) \quad \Delta\theta^2 = \frac{3\sigma^2}{P}\,\frac{\lambda^2}{4\pi^2 n^2 \cos^2 \alpha\, n(n+1)(2n+1)BT}.$$

2.1.2. *Onde plane fluctuante*

On considère alors une onde plane d'azimut fixe, mais fluctuant de façon gaussienne comme il a été dit au paragraphe précédent.

La matrice de bruit à prendre en compte est alors :

$$(7) \quad \Delta = \begin{bmatrix} P+\sigma^2 & \ldots & P \\ P & \ldots & P+\sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I + PU^+U.$$

Si on appelle U le vecteur colonne à $n+1$ dimensions formé de 1.

La matrice inverse Δ^{-1} se calcule très aisément en appliquant l'identité de Woodbury :

$$(8) \qquad \Delta^{-1} = \frac{I}{\sigma^2} - \frac{P}{\sigma^2[\sigma^2+(n+1)P]}U^+U$$

et on obtient alors comme inverse de la variance limite, pour un échantillon :

$$(9) \quad \frac{\sigma^2}{P}\frac{1}{\pi^2} \times \frac{1}{(n(n+1)(2n+1)/6) - [P/(\sigma^2+P(n+1))](n^2(n+1)^2/4)},$$

le terme soustractif du dénominateur mesure la dégradation du résultat.

2.2. Mesure d'une distance (courbure du front d'onde)

On considère cette fois la phase centrale comme référence, avec une antenne réelle à $(2n+1)$ capteurs.

2.2.1. *Onde plane certaine*

Soit une source de grandeur et de phase certaines, à une distance D de l'antenne et d'incidence nulle. Le déphasage correspondant au capteur de rang n, à une distance $n\lambda/2$ du centre est :

$$(10) \qquad \varphi = \frac{n^2\lambda^2}{4}\,\frac{1}{2D}\,\frac{2\pi}{\lambda}.$$

La grandeur incidente sur ce capteur est donc :

$$\sqrt{P}.\, e^{i(n^2\pi\lambda/4D)}$$

et la dérivée en distance correspondante :

$$(11) \qquad \frac{\partial X_n}{\partial D} = \frac{in^2\pi\lambda}{4D^2}e^{in^2\pi\lambda/4D}.$$

La variance limite a alors pour inverse :

$$(12) \qquad \frac{\lambda^2 \pi^2}{16\,\mathrm{D}^4 \sigma^2} \overline{\underline{n^2 \ldots 0 \ldots n^2}} \begin{vmatrix} n^2 \\ 0 \\ n^2 \end{vmatrix}.$$

Comme :

$$\sum_1^n m^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

La variance limite qu'on obtiendrait pour 2 BT échantillons de mesure est :

$$(13) \qquad \Delta \mathrm{D}^2 = \frac{120\,\sigma^2 \mathrm{D}^4}{\pi^2 \lambda^2 n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\,\mathrm{BT}}.$$

Si on utilisait seulement le capteur central et les deux capteurs d'extrémités, on aurait comme résultat :

$$(14) \qquad \Delta \mathrm{D}_0^2 = \frac{4\,\sigma^2 \mathrm{D}^4}{\pi^2 \lambda^2 n^4\,\mathrm{BT}}.$$

On peut former le rapport de ces deux grandeurs :

$$(15) \qquad \frac{\Delta \mathrm{D}^2}{\Delta \mathrm{D}_0^2} = \frac{30}{(1+(1/n))(2+(1/n))(3n+3-(1/n))}.$$

Il ne décroît que lentement quand n croît :
pour 3 capteurs $\Delta \mathrm{D}^2/\Delta \mathrm{D}_0^2 = 1$;
pour 5 capteurs $\Delta \mathrm{D}^2/\Delta \mathrm{D}_0^2 = 16/17$;
pour 21 capteurs $\Delta \mathrm{D}^2/\Delta \mathrm{D}_0^2 = 1/2$.

L'utilisation de l'ensemble des capteurs est donc peu avantageuse si on considère le résultat limite de précision.

2.2.2. *Onde plane gaussienne*

Il y a dégradation du résultat, mais le calcul exact est très laborieux à effectuer.

3. Pouvoir séparateur d'une antenne

On considère une antenne linéaire, formée de $n+1$ capteurs, distants d'une demi-longueur d'onde, et observant deux sources ponctuelles voisines angulairement, et statistiquement indépendantes.

Les signaux certains qui servent à l'application de l'inégalité sont choisis à la même fréquence, ce qui correspond bien au cas le plus défavorable, les phases respectives en un point pouvant varier d'une même quantité partout, sans changer le résultat; on supposera que ces signaux sont en phase sur le premier capteur, pour la commodité du calcul.

Les puissances émanant des deux sources, et reçues par un capteur, sont représentées par P_α, P_β, avec la signification énoncée plus haut. Les azimuts sont désignés par α et β.

On posera alors :

$$\pi \sin\alpha = \varphi,$$
$$\pi \sin\beta = \psi,$$
$$\pi(\sin\alpha - \sin\beta) = \delta.$$

Il est nécessaire de définir un critère de séparation des sources. On dira que les sources sont séparées quand la variance de l'écartement estimé $\mathrm{V}(\alpha-\beta)$ est inférieure ou égale à $\mathrm{K}(\alpha_0-\beta_0)^2$;

Si α_0, β_0 sont les valeurs exactes.

On fait ici le calcul avec $k=1/4$ (d'autres auteurs adoptent une définition moins stricte avec $k=1$ (*voir* référence [2]) $k=1/4$ signifie :
— écart type sur la distance angulaire $= 1/2 \times$ distance angulaire.

Avec ces hypothèses, les signaux certains reçus se présentent comme les vecteurs :

$$(16) \qquad \sqrt{\mathrm{P}_\alpha}\,\mathrm{V}_\alpha = \sqrt{\mathrm{P}_\alpha} \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ e^{in\varphi} \end{vmatrix}, \qquad \sqrt{\mathrm{P}_\beta}\,\mathrm{V}_\beta = \sqrt{\mathrm{P}_\beta} \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ e^{in\psi} \end{vmatrix}.$$

3.1. Inversion de la matrice de bruit

Celle-ci est de la forme :

$$(17) \qquad \Delta = \mathrm{I}\,\sigma^2 + \mathrm{P}_\alpha \mathrm{V}_\alpha \mathrm{V}_\alpha^+ + \mathrm{P}_\beta \mathrm{V}_\beta \mathrm{V}_\beta^+$$

et son inverse est de la forme :

$$(18) \qquad \Delta^{-1} = \frac{\mathrm{I}}{\sigma^2} + \mathrm{A}\mathrm{V}_\alpha \mathrm{V}_\alpha^+ + \mathrm{B}\mathrm{V}_\alpha \mathrm{V}_\beta^+ + \mathrm{C}\mathrm{V}_\beta \mathrm{V}_\alpha^+ + \mathrm{D}\mathrm{V}_\beta \mathrm{V}_\beta^+$$

(identité de Woodbury).

L'identification fournit les valeurs des coefficients :

$$(19) \qquad \begin{aligned} \mathrm{A} &= -\frac{\mathrm{P}_\alpha(\sigma^2+\mathrm{P}_\beta(n+1)}{\sigma^2 \mathrm{K}}, \\ \mathrm{B} = \mathrm{C} &= \frac{\mathrm{P}_\alpha \mathrm{P}_\beta (n+1)}{\sigma^2 \mathrm{K}}, \\ \mathrm{C} &= -\frac{\mathrm{P}_\beta(\sigma^2+\mathrm{P}_\alpha(n+1))}{\sigma^2 \mathrm{K}}; \end{aligned}$$

si on pose :

$$\mathrm{K} = \sigma^4 + \sigma^2(n+1)(\mathrm{P}_\alpha + \mathrm{P}_\beta)$$

(valeur approchée, valable si α et β sont voisins).

3.2. Calcul des produits scalaires

L'évaluation de la matrice de Fisher pour (α, β) nécessite le calcul préalable des produits scalaires tels que $\mathrm{V}_\alpha^+ \mathrm{V}'_\beta$, $\mathrm{V}_\alpha^{+\prime} \mathrm{V}'_\beta$. On effectue ce calcul jusqu'au second ordre en δ, toujours supposé faible.

Par exemple :

$$(20)\quad V_\beta^+ V'_\alpha = \pi \cos\alpha \, \overline{1 \quad e^{-ni\psi}} \begin{vmatrix} 0 \\ ine^{in\varphi} \end{vmatrix} = \pi \cos\alpha \sum_i^n ine^{ni\delta},$$

de même

$$V'^+_\alpha V'_\beta = \pi^2 \cos\alpha \cos\beta \sum_i^n n^2 e^{-ni\delta}.$$

En développant ces quantités au second ordre, on obtient :

$$(21\,a)\quad V'^+_\beta V'_\alpha = \pi \cos\alpha \left[\frac{in(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\delta - \frac{in^2(n+1)^2}{8}\delta^2 \right],$$

$$(21\,b)\quad V'^+_\alpha V_\beta = \pi \cos\alpha \left[-\frac{in(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\delta + \frac{in^2(n+1)^2}{8}\delta^2 \right],$$

$$(21\,c)\quad V_\alpha^+ V'_\beta = \pi \cos\beta \left[\frac{in(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\delta - \frac{in^2(n+1)^2}{8}\delta^2 \right],$$

$$(21\,d)\quad V'^+_\beta V_\alpha = \pi \cos\beta \left[-\frac{in(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\delta + \frac{in^2(n+1)^2}{8}\delta^2 \right],$$

$$(21\,e)\quad V'^+_\alpha V'_\beta = \pi^2 \cos\alpha \cos\beta \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{in^2(n+1)^2}{4}\delta - \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{60}\delta^2 \right],$$

$$(21\,f)\quad V'^+_\beta V'_\alpha = \pi^2 \cos\alpha \cos\beta \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{in^2(n+1)^2}{4}\delta - \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{60}\delta^2 \right].$$

3.3. Calcul de la matrice de covariance inverse

Cette matrice est symétrique (2×2) :

$$\begin{vmatrix} V_{\alpha\alpha} & V_{\alpha\beta} \\ V_{\alpha\beta} & V_{\beta\beta} \end{vmatrix} = M^{-1}$$

a. *Éléments* $V_{\alpha\alpha}$, $V_{\beta\beta}$

Pour $V_{\alpha\alpha}$ par exemple :

$$(22)\quad V_{\alpha\alpha} = P_\alpha \pi^2 \cos^2\alpha \operatorname{Re} V'^+_\alpha \times \left| \frac{I}{\sigma^2} + AV_\alpha V_\alpha^+ + BV_\alpha \beta_\beta^+ + CV_\beta V_\alpha^+ + DV_\beta V_\beta^+ \right| V'_\alpha.$$

Le calcul s'effectue mécaniquement à l'aide des quantités calculées :

$$(23)\quad \frac{V_{\alpha\alpha}}{P_\alpha \pi^2 \cos^2\alpha} = M - m\delta^2.$$

Si on pose :

$$M = \frac{1}{\sigma^2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (A+B+C+D)\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$m = \frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n+2)}{72}D$$

et le même :

$$(24)\quad \frac{V_{\beta\beta}}{P_\beta \pi^2 \cos^2\beta} = M - p\delta^2,$$

avec :

$$p = \frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n+2)}{72}A.$$

b. *Éléments* $V_{\alpha\beta}$

$$(25)\quad V_{\alpha\beta} = \sqrt{P_\alpha P_\beta}\,\pi^2 \cos\alpha \cos\beta \operatorname{Re} V'^+_\alpha \times \left| \frac{I}{\sigma^2} + AV_\alpha V_\alpha^+ + BV_\alpha V_\beta^+ + CV_\beta V_\alpha^+ + DV_\beta V_\beta^+ \right| V'_\beta.$$

Et on trouve de même :

$$(26)\quad \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{P_\alpha P_\beta}\,\pi^2 \cos\alpha \cos\beta} = M - q\delta^2.$$

Si on pose :

$$(27)\quad q = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n+3n-1)}{60\sigma^2} + (A+B+C+D)\frac{c^3(n+1)^3}{16} + C\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}.$$

Donc :

$$(28)\quad M^{-1} = \pi^2 \begin{vmatrix} \cos^2\alpha\, P_\alpha^2 (M - m\delta^2) & \cos\alpha \cos\beta \sqrt{P_\alpha P_B}(M - q\delta^2) \\ \cos\alpha \cos\beta \sqrt{P_\alpha P_\beta}(M - q\delta^2) & \cos^2\beta\, P_\beta (M - p\delta^2) \end{vmatrix}.$$

Le déterminant est :

$$\pi^4 P_\alpha P_\beta \cos\alpha^2 \cos\beta^2 \,|(M-m\,\delta^2)(M-p\,\delta^2)-(M-q\,\delta^2)^2|,$$

ou, au second ordre :

$$\pi^4 P_\alpha P_\beta \cos^2\alpha \cos^2\beta\, M\,\delta^2 (2q-m-p).$$

La matrice de covariance (α, β) prend alors la forme approchée :

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ Q & R \end{vmatrix}$$

avec :

$$(29\,a) \qquad P=\frac{1}{\pi^2 P_\alpha \cos^2\alpha\,(2q-m-p)\,\delta^2},$$

$$(29\,b) \qquad Q=\frac{1}{\pi^2 (P_\alpha P_\beta)^{1/2} \cos\alpha \cos\beta\,(2q-m-p)\,\delta^2},$$

$$(29\,c) \qquad R=\frac{1}{\pi^2 P_\beta \cos^2\beta\,(2q-m-p)\,\delta^2}.$$

Dans la suite, on confondra α, β avec $(\alpha+\beta)/2=\gamma$.

3.4. Pouvoir séparateur

La variance $V(\hat{\alpha}-\hat{\beta})$ sur l'écart angulaire est alors facile à évaluer :

$$V(\widehat{\alpha-\beta})=P+R-2Q,$$

ou :

$$(P+R-2Q)/(2\,BT),$$

pour $2\,BT$ échantillons de mesure indépendants :

$$(30) \quad V(\widehat{\alpha-\beta}) =\frac{1}{4(q-[(m+p)/2])\,\delta^2\,\pi^2}\left(\frac{1}{\sqrt{P_\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{P_\beta}}\right)\frac{1}{\cos^2\gamma}\,\frac{1}{BT}.$$

On en déduit le pouvoir séparateur correspondant à la définition précédente, en écrivant que cette variance est égale à :

$$\frac{(\alpha_0-\beta_0)^2}{4}=\frac{\delta^2}{\pi^2\cos^2\gamma}\,\frac{1}{4}$$

donc :

$$(31) \quad \frac{\delta_0^2}{\pi^2\cos^2\gamma\,.\,4} =\frac{1}{4(q-[(m+p)/2])\,\delta_0^2\,\pi^2}\left(\frac{1}{\sqrt{P_\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{P_\beta}}\right)\frac{1}{\cos^2\gamma}\,\frac{1}{BT}$$

et :

$$(32) \quad \delta_0=\frac{1}{(q-[(m+p)/2])^{1/4}}\left(\frac{1}{\sqrt{P_\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{P_\beta}}\right)^{1/2}\frac{1}{(BT)^{1/4}}.$$

Le pouvoir séparateur correspondant est $\delta_0/\pi\cos\gamma$ soit :

$$(33) \quad P_S=\frac{1}{(q-[(m+p)\,2])^{1/4}}\,\frac{1}{\sqrt{P_\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{P_\beta}}\,\frac{1}{(BT)^{1/4}}\,\frac{1}{\pi\cos\gamma}.$$

On peut remarquer que :

a. Le pouvoir séparateur ne varie que comme $(BT)^{1/4}$ et comme $(2q-[(p+m)/2])^{-1/4}$, c'est-à-dire comme $n^{-5/4}$ si n est grand. On a le meilleur résultat pour une puissance totale donnée quand les puissances des sources sont égales.

b. Le calcul peut être fait aussi avec des sources partiellement corrélées, en changeant la matrice de bruit.

c. Les mesures faites sur α et β sont fortement anticorrélées.

3.5. Résultats numériques

Les formules précédentes se prêtent très facilement à une exploitation numérique. On donne quelques exemples, correspondant à un produit BT de 100, le passage à une autre valeur se déduit de la loi en $(BT)^{-1/4}$.

On donne les pouvoirs séparateurs en degrés.

a. *Sources d'égale puissance*

On prend cette puissance comme unité, et on peut alors dresser le tableau I.

Tableau I

σ^2	n	P.S.(deg.)
10	10	1,34
	20	0,53
	50	0,14
1	10	0,48
	20	0,18
	50	0,045
0,1	10	0,15
	20	0,056
	30	0,014

b. *Sources inégales*

On leur affecte les puissances 1 et 0,1 et on donne le tableau analogue (1).

4. Étude des ondes imparfaites

La déformation aléatoire du front d'onde produit évidemment une dégradation des mesures angulaires. On se propose d'étudier cette dégradation, pour une source unique à incidence normale, dans deux cas extrêmes.

a. *Perte constante de corrélation*

C'est le phénomène qui se produit en présence d'une déformation de l'antenne à court rayon de corrélation, et de nature stationnaire. Si les amplitudes sur les capteurs i, j sont ε_i, ε_j :

$$\overline{\varepsilon_i^2} = \mathrm{P},$$
$$\overline{\varepsilon_i \varepsilon_j} = \mathrm{P}a \qquad (\forall \vee i, j),$$

où a est un nombre réel inférieur à 1 en module.

b. *Perte croissante de corrélation*

C'est le cas d'une onde qui a traversé un milieu aléatoire. Un cas de nature mixte se produit si on considère une onde diffusée par une surface de mer aléatoire (perte croissante de corrélation jusqu'à une valeur limite).

4.1. Perte constante de corrélation

Ce problème est formalisé comme dans les paragraphes précédents.
La matrice de bruit est représentée par :

$$(34) \qquad \mathrm{S} = \left| \begin{matrix} \sigma^2+\mathrm{P} & \mathrm{P}a & \dots & \mathrm{P}a \\ \mathrm{P}a & \sigma^2+\mathrm{P} & \dots & \mathrm{P}a \\ \dots & \dots & \dots & \sigma^2+\mathrm{P} \end{matrix} \right| .$$

L'inverse Δ^{-1} est évalué sans difficulté en appliquant l'identité de Woodbury. En appelant U le vecteur colonne à $n+1$ dimensions, formé de 1 :

$$(35) \qquad \mathrm{S} = [\sigma^2 + \mathrm{P}(1-a)]\,\mathrm{I} + \mathrm{P}a\,\mathrm{U}^+\,\mathrm{U}.$$

On peut poser :

$$1 - a = b,$$

qui représente la perte de corrélation :

$$(36) \qquad \mathrm{S}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2+\mathrm{P}b}\mathrm{I} - \frac{\mathrm{P}a}{(\sigma^2+\mathrm{P}b)}\,\frac{1}{\sigma^2+\mathrm{P}b+\mathrm{P}a(n+1)}\mathrm{U}^+\,\mathrm{U}$$

et l'inverse de la variance sur la mesure angulaire est donné par :

$$(37) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{P}\pi^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\frac{1}{\sigma^2+\mathrm{P}b} - \frac{p^2 a \pi^2}{\sigma^2+\mathrm{P}b}\,\frac{1}{\sigma^2+\mathrm{P}b+\mathrm{P}a(n+1)}\,\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Pour un nombre 2BT d'échantillons de mesure indépendants :

$$'\Delta\theta^2 = \frac{1}{\mathrm{A}}\,\frac{1}{2\mathrm{BT}}.$$

4.2. Perte croissante de corrélation

On suppose que le module de corrélation de l'onde décroît exponentiellement avec la distance, on appellera a ce module pour une distance d'une demi-longueur d'onde.

Le calcul exact est difficile, on peut obtenir une évaluation par développement en partant du cas simple où le bruit omnidirectionnel est nul.

4.2.1. *Bruit nul*

La matrice de bruit se réduit alors à :

$$(38) \qquad \mathrm{S} = \mathrm{P} \left| \begin{matrix} 1\,a & \dots & a^n \\ a\,1 & \dots & a^{n-1} \\ & & a\,1 \end{matrix} \right| .$$

C'est une matrice de Toeplitz, dont l'inverse est connu (*voir* référence [4] par exemple) :

$$(39) \qquad \mathrm{S}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{P}}\,\frac{1}{1-a^2} \left| \begin{matrix} 1 & -a & 0 & \\ -a & (1+a^2) & a & 0 \\ 0 & -a & (1+a) & -a^2 \end{matrix} \right| .$$

C'est une matrice tridiagonale, où le caractère de Toeplitz a disparu.

L'inverse de la variance est évalué, comme toujours par l'expression :

$$(40) \qquad \pi^2 \quad \overline{0 \quad -in}\,[\mathrm{S}^{-1}] \left| \begin{matrix} 0 \\ in \end{matrix} \right| .$$

Le calcul est trivial et fournit comme résultat :

$$(41) \qquad \frac{\pi^2}{12}\left(2n^3 + 3n^2 + n\frac{1+5a^2}{1-a^2}\right)$$

donc, pour 2BT échantillons de mesure indépendants :

$$42)\ \Delta\theta^2 = \frac{6}{\pi^2\,\mathrm{BT}\,(2n^3+3n^2+n\,[(1+5a^2)/(1-a^2)])}.$$

4.2.2. *Bruit faible*

La matrice s_1 qui correspond à ce cas est de la forme :

$$s_1 = s + \sigma^2\,\mathrm{I},$$

on confondra son inverse avec :

$$s_1^{-1} = s^{-1} - \sigma^2 s^{-2},$$

$$(43) \qquad s^{-2} = \frac{1}{\mathrm{P}^2(1-a^2)^2} \left| \begin{matrix} (1+a^2) & -a(2+a^2) & a^2 & 0 & 0 & \dots \\ -a(2+a^2) & (1+4a^2+a^4) & -2a(1+a^2) & a^2 & 0 & \dots \\ a^2 & -2a(1+a^2) & (1+4a^2+a^4) & -2a(4a^2) & a^2 & \dots \end{matrix} \right| .$$

Le calcul se conduit alors comme précédemment, et fournit pour un nombre 2 BT d'échantillons de mesure indépendants :

(44)

$$\Delta\theta^2 = \frac{6}{\pi^2 \mathrm{BT}} \frac{1}{2n^3[1-[(\sigma^2/\mathrm{P})(1+a^2)/(1-a^2)]]+3n^2[1-(\sigma^2/\mathrm{P})]+[n/(1-a^2)][(1+5a^2)-(\sigma^2/\mathrm{P})(1+13a^2)]},$$

résultat valable si les termes correctifs en σ^2 sont assez faibles, en particulier, si :

$$\frac{\sigma^2}{\mathrm{P}} \frac{1+a^2}{1-a^2} \ll 1.$$

On peut faire la remarque suivante :

– les opticiens ont montré depuis longtemps qu'une lentille attaquée par une onde à corrélation décroissante (par exemple, une onde ayant traversé une atmosphère turbulente de Kolmogorov) a une résolution angulaire qui n'augmente plus au-delà d'un certain rayon.

Mais une lentille ne peut effectuer d'autre traitement que la formation de voie classique. Là, on recherche la limite de précision angulaire pour tous les traitements possibles, et on arrive, bien sûr, à une conclusion différente.

5. Conclusion

La souplesse d'utilisation de l'inégalité de Cramer-Rao permet donc de dégager de nombreuses limitations théoriques dans les mesures de paramètres à l'aide d'une antenne.

Les résultats obtenus ont un caractère très fragmentaire et, on peut envisager une étude beaucoup plus générale incorporant d'une part une mesure simultanée de plusieurs paramètres (non envisagés dans le cadre de cet article) et l'évolution dans le temps, quand ces paramètres un essai de synthèse avec les méthodes de Kalman Bucy peut être tenté.

Cette utilisation systématique fournit un guide très efficace à la recherche des traitements de signaux. Il ne faut cependant pas perdre de vue que les résultats réels sont en général très en retrait.

Manuscrit reçu le 27 *juin* 1984.

BIBLIOGRAPHIE

[1] VAN TREES, *Detection, estimation, and modulation Theory*, Wiley, New York, 1968, part 1.

[2] J. MUNIER, *Pouvoir séparateur en estimation non linéaire en présence de bruit faible*, GRETSI 1977, communication n° 20.

[3] H. COX, *Resolving power and sensibility to mismatch of optimum array processes, JASA* (84), septembre 1973, p. 771-785.

[4] GRENANDER SZEGÖ, *Toeplitz forms*, Wiley, New York, 19A.