

Transport Optimal et Ondelettes

Morgane Henry Emmanuel Maitre Valérie Perrier

Laboratoire Jean Kuntzmann
Université de Grenoble

Ecole d'été de Peyresq
28 juin 2013



- 1 Problème de Monge Kantorovich
- 2 Stricte convexité de la fonctionnelle
- 3 Ondelettes à divergence nulle
- 4 Résolution Numérique
- 5 Applications nulles sur le bord
- 6 Algorithme utilisé
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Problème de Monge Kantorovich
- 2 Stricte convexité de la fonctionnelle
- 3 Ondelettes à divergence nulle
- 4 Résolution Numérique
- 5 Applications nulles sur le bord
- 6 Algorithme utilisé
- 7 Conclusion et perspectives

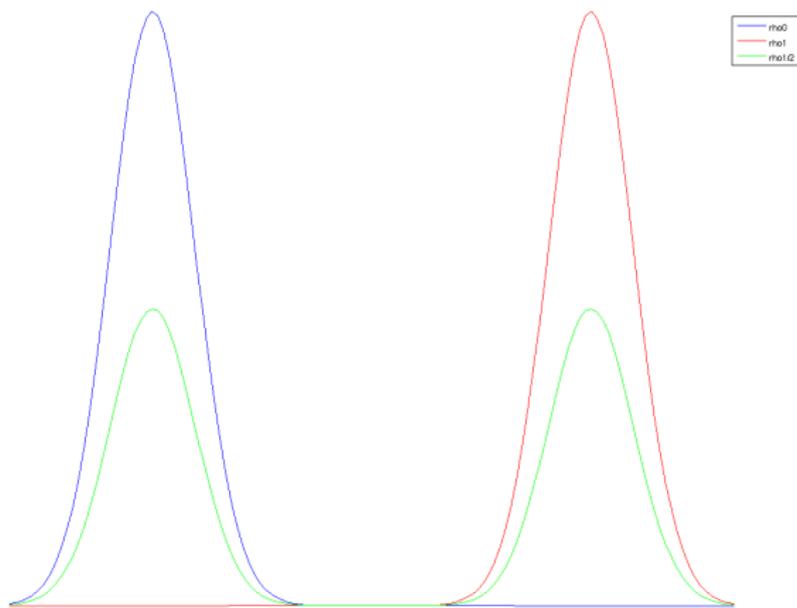


FIGURE: Interpolation linéaire

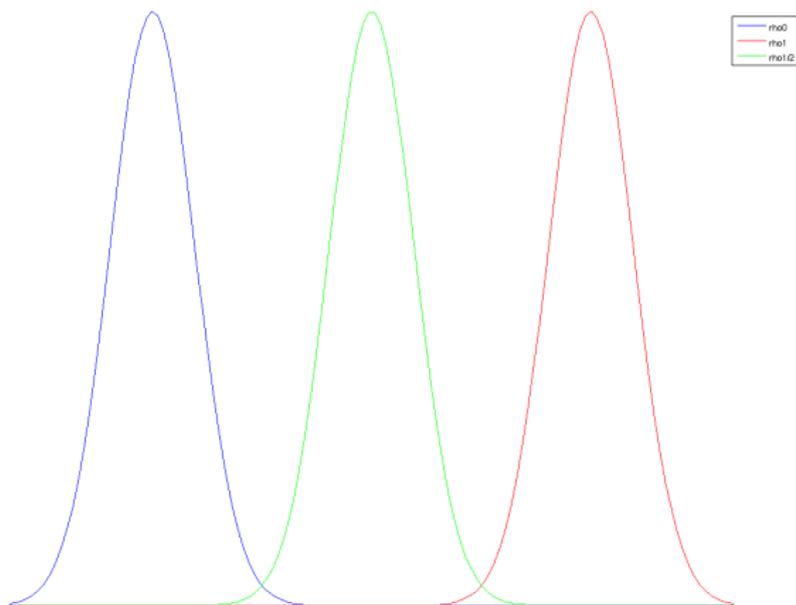


FIGURE: Interpolation par transport

Problème de Monge Kantorovich

On considère deux densités $(\rho_0, \rho_1) \in L^2(\mathbb{T}^n)$ positives ou nulles, bornées et de masse totale un

$$\int_{\mathbb{T}^n} \rho_0(x) dx = \int_{\mathbb{T}^n} \rho_1(x) dx = 1.$$

On introduit la distance L^2 de Monge-Kantorovich entre ρ_0 et ρ_1

$$d_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf_M \int |M(x) - x|^2 \rho_0(x) dx,$$

M transférant ρ_0 sur ρ_1 .

Le problème de Monge-Kantorovich (MKP) est alors de déterminer une application M qui réalise cet infimum.

Problème de Monge Kantorovich

Benamou et Brenier (2000) ont placé le problème dans un contexte de mécanique des milieux continus sur le tore. Soit \mathbb{T}^n le cube unité en dimension n avec des conditions périodiques sur les frontières. On fixe un intervalle de temps $[0, T]$. On considère les densités $\rho(t, x) \geq 0$ et les champs de vecteurs $v(t, x) \in \mathbb{T}^n$ assez réguliers et tels que

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \text{ et } \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad \rho(T, x) = \rho_1(x), \quad (1)$$

pour $0 < t < T$ et $x \in \mathbb{T}^n$.

Proposition (Benamou-Brenier)

La distance L^2 de Monge-Kantorovich entre ρ_0 et ρ_1 est telle que :

$$d_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf \int_{\mathbb{T}^n} \int_0^T \rho(t, x) |v(t, x)|^2 dx dt,$$

Problème de Monge Kantorovich

On définit $Q = [0, T] \times \mathbb{T}^n$ et

$$V(Q) = \{f \in (L^2(Q))^{1+n}, \operatorname{div}_{t,x} f = 0\}.$$

Pour obtenir un problème convexe avec des contraintes linéaires, on introduit la quantité de mouvement $m = \rho v$ et on cherche

$$\inf \int_{\mathbb{T}^n} \int_0^T \frac{|m|^2}{\rho} dx dt$$

sur les paires (ρ, m) dans $V(Q)$ satisfaisant les conditions aux frontières

$$\rho(0, x) = \rho_0(x) \text{ dans } L^2(\mathbb{T}^n),$$

$$\rho(T, x) = \rho_1(x) \text{ dans } L^2(\mathbb{T}^n).$$

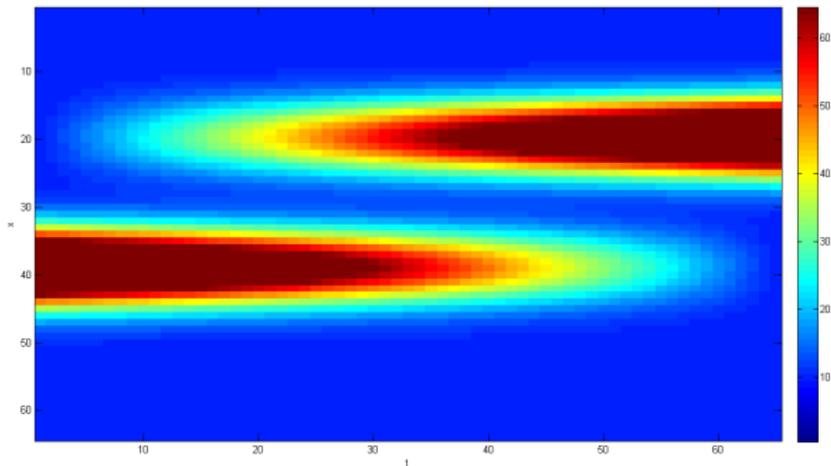


FIGURE: Interpolation linéaire

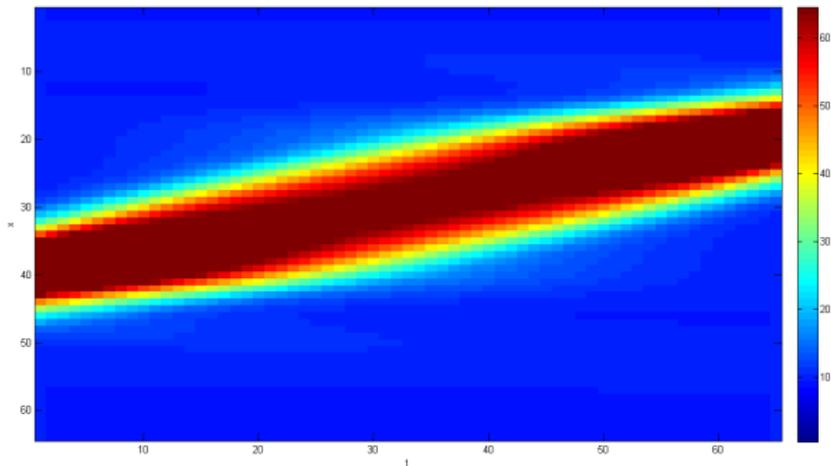


FIGURE: Interpolation par transport

- 1 Problème de Monge Kantorovich
- 2 **Stricte convexité de la fonctionnelle**
- 3 Ondelettes à divergence nulle
- 4 Résolution Numérique
- 5 Applications nulles sur le bord
- 6 Algorithme utilisé
- 7 Conclusion et perspectives

Stricte convexité de la fonctionnelle

On souhaite étudier de façon formelle la stricte convexité de la fonctionnelle sur la contrainte de divergence nulle. Pour cela on considère $Q = [0, 1] \times \mathbb{T}$ et

$$J(\rho, m) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{m^2(t, x)}{\rho(t, x)} dt dx.$$

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow]0, +\infty] : (\rho, m) \mapsto \begin{cases} \frac{m^2}{\rho} & \text{si } \rho > 0, \\ 0 & \text{si } (\rho, m) = (0, 0), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Stricte convexité de la fonctionnelle

La hessienne de la fonction f est :

$$H_f(\rho, m) = \begin{bmatrix} \frac{2m^2}{\rho^3} & -\frac{2m}{\rho^2} \\ -\frac{2m}{\rho^2} & \frac{2}{\rho} \end{bmatrix}.$$

On veut montrer que la hessienne est définie positive. Soit $(\tilde{\rho}, \tilde{m})$ un couple dans $V(Q)$ tel que $\tilde{\rho}(0) = 0$ et $\tilde{\rho}(1) = 0$. La différentielle de f s'écrit :

$$\begin{aligned} (\tilde{\rho} \ \tilde{m}) H_f(\rho, m) \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{m} \end{pmatrix} &= (\tilde{\rho}, \tilde{m}) \begin{bmatrix} \frac{2m^2}{\rho^3} & -\frac{2m}{\rho^2} \\ -\frac{2m}{\rho^2} & \frac{2}{\rho} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\rho^3} (m\tilde{\rho} - \tilde{m}\rho)^2. \end{aligned}$$

Cette différentielle est positive car $\rho \geq 0$.

Stricte convexité de la fonctionnelle

On cherche les couples $(\tilde{\rho}, \tilde{m})$ tels que

$$m\tilde{\rho} - \tilde{m}\rho = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\tilde{m} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

Le couple $(\tilde{\rho}, \tilde{m})$ est à divergence nulle donc il existe ψ définie à une constante près telle que $\begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x \psi \\ \partial_t \psi \end{pmatrix}$.

L'équation (2) devient

$$\begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_t \psi \\ \partial_x \psi \end{pmatrix} = V \cdot \nabla \psi = \rho \partial_t \psi + m \partial_x \psi = 0$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} \partial_x \psi(0, x) = 0 \\ \partial_x \psi(1, x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi(0, x) = a, \text{ où } a \in \mathbb{R} \\ \psi(1, x) = b, \text{ où } b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Stricte convexité de la fonctionnelle

On veut donc résoudre l'équation de transport :

$$\begin{cases} V \cdot \nabla \psi = 0 \\ \psi = 0 \text{ sur } V \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases}$$

où $\{V \cdot \mathbf{n} < 0\} = \{x, \rho_0(x) > 0\}$.

La solution de cette équation de transport est l'application nulle pour $V = (\rho, m)$ suffisamment régulier.

On a montré formellement que la hessienne de f est définie positive donc f est strictement convexe.

On en déduit que

$$J(\rho, m) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{m^2(t, x)}{\rho(t, x)} dt dx$$

est strictement convexe sur la contrainte de divergence nulle.

- 1 Problème de Monge Kantorovich
- 2 Stricte convexité de la fonctionnelle
- 3 Ondelettes à divergence nulle**
- 4 Résolution Numérique
- 5 Applications nulles sur le bord
- 6 Algorithme utilisé
- 7 Conclusion et perspectives

Ondelettes à divergence nulle

Une analyse multirésolution est une suite de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$, $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifiant certaines propriétés dont :

- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$,
- $\exists \varphi \in V_0$ tel que $\{\varphi(x - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0 .

On introduit W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

La fonction ψ telle que $\{\psi(x - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base de W_0 est appelée ondelette de l'AMR. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, sa décomposition en ondelettes s'écrit :

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x),$$

où $d_{j,k} = \int f \psi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$.

Ondelettes à divergence nulle

- Soit $\{\psi_{j,k}(x), j, k \in \mathbb{Z}\}$ une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.
- Pour construire une base orthonormée de $L^2([0, 1])$, on périodise les ondelettes $\psi_{j,k}$ sur \mathbb{R} :

$$\psi_{j,k}^{per}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x + n), \quad x \in [0, 1]$$

$\{\psi_{j,k}^{per}(x), j, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2([0, 1])$.

- Les ondelettes sur \mathbb{R}^2 sont obtenues par produit tensoriel d'ondelettes 1D, $\psi_{j_1,k_1}(x)\psi_{j_2,k_2}(y)$ est une ondelette anisotrope de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

On définit l'espace des fonctions d'échelle à divergence nulle (Lemarié 1992, Deriaz Perrier 2006) par

$$\mathbf{V}_j^{div} = \text{span}\{\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\} = \text{span}\{\mathbf{curl}[\phi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2}]\},$$

où les ondelettes à divergence nulle sont :

$$\Psi_{j,\mathbf{k}}^{div} := \mathbf{curl}[\psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j_2,k_2}] = \begin{pmatrix} \psi_{j_1,k_1} \otimes (\psi_{j_2,k_2})' \\ -(\psi_{j_1,k_1})' \otimes \psi_{j_2,k_2} \end{pmatrix}.$$

La construction d'ondelettes à divergence nulle se fait donc en 3 étapes :

- Choisir une analyse multirésolution de L^2 , $(V_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$.
- Construire l'analyse $\frac{d}{dx} V_j^1$.
- Prendre la rotationnelle de l'analyse multirésolution 2D $V_j^1 \otimes V_j^1$.

- 1 Problème de Monge Kantorovich
- 2 Stricte convexité de la fonctionnelle
- 3 Ondelettes à divergence nulle
- 4 Résolution Numérique**
- 5 Applications nulles sur le bord
- 6 Algorithme utilisé
- 7 Conclusion et perspectives

Résolution Numérique

Les espaces d'approximation X_h que nous considérons sont des analyses multirésolutions de X :

$$X_h = \mathbf{V}_j^{div} \text{ avec } h = 2^{-j}.$$

Alors, le couple (ρ, m) est calculé sur la base d'ondelettes $\Psi_{j,k}^{div}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} &= \sum_j \sum_k d_{j,k}^{div} \Psi_{j,k}^{div}, \\ &= \sum_j \sum_k d_{j,k}^{div} \begin{pmatrix} \psi_{j_1, k_1} \otimes (\psi_{j_2, k_2})' \\ -(\psi_{j_1, k_1})' \otimes \psi_{j_2, k_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 1 Problème de Monge Kantorovich
- 2 Stricte convexité de la fonctionnelle
- 3 Ondelettes à divergence nulle
- 4 Résolution Numérique
- 5 Applications nulles sur le bord**
- 6 Algorithme utilisé
- 7 Conclusion et perspectives

Applications nulles aux bords

On définit

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(t, x) &= \rho(t, x) - (t\rho_1(x) + (1-t)\rho_0(x)) \\ \tilde{m}(t, x) &= m(t, x) + \int_0^x (\rho_1(y) - \rho_0(y)) dy \end{cases}$$

qui vérifient,

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(0, x) &= 0 \\ \tilde{\rho}(1, x) &= 0 \\ \tilde{m}(t, 0) &= 0 \\ \tilde{m}(t, 1) &= 0 \\ \operatorname{div}_{t,x}(\tilde{\rho}, \tilde{m}) &= 0 \end{cases}$$

La nouvelle énergie à minimiser est

$$\tilde{J}(\mathbf{d}^{\operatorname{div}}) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 \frac{(\tilde{m}(\mathbf{d}^{\operatorname{div}}) - \int_0^x (\rho_1(y) - \rho_0(y)) dy)^2}{\tilde{\rho}(\mathbf{d}^{\operatorname{div}}) + t\rho_1(x) + (1-t)\rho_0(x)} dx dt.$$

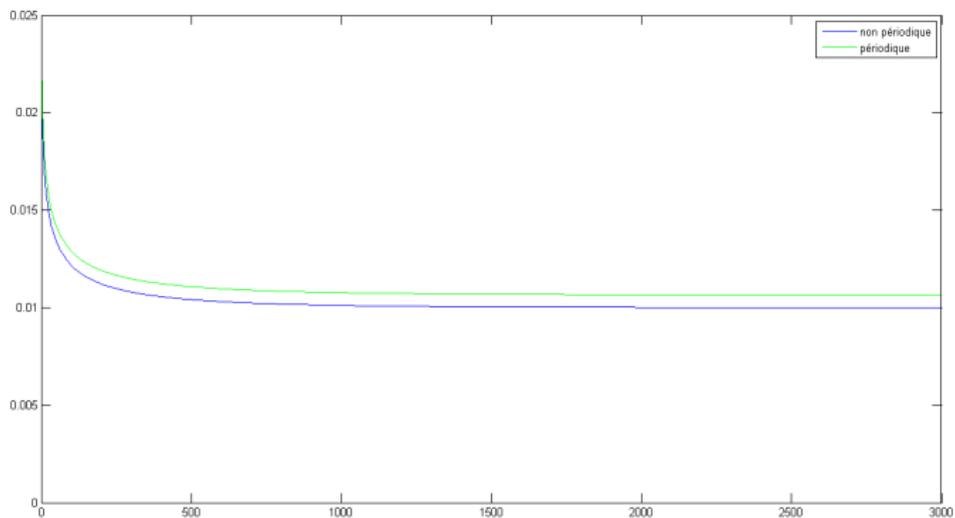


FIGURE: Fonctionnelle dans le cas non périodique et dans le cas périodique.

- 1 Problème de Monge Kantorovich
- 2 Stricte convexité de la fonctionnelle
- 3 Ondelettes à divergence nulle
- 4 Résolution Numérique
- 5 Applications nulles sur le bord
- 6 Algorithme utilisé**
- 7 Conclusion et perspectives

Algorithme utilisé

Algorithme du gradient :

Choisir $d^{(0)}$

Choisir un seuil de tolérance $\varepsilon \geq 0$

Choisir k_{max}

Poser $k = 0$

Tant que $\|d^{(k+1)} - d^{(k)}\| \geq \varepsilon$ et $k \leq k_{max}$ faire

Calculer $\nabla J(d^{(k)})$

Calculer $\rho^{(k)}$

Poser $d^{(k+1)} = P_K(d^{(k)} - \rho^{(k)}\nabla J(d^{(k)}))$

Poser $k = k + 1$

Fin tant que

P_k est la projection sur l'espace des contraintes K , convexe et fermé.

Algorithme utilisé

- Projection sur un convexe :

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, K étant convexe et fermé, il existe un unique $y \in K$ défini par

$$y = \operatorname{argmin}_{u \in K} \|u - x\|.$$

y est la projection sur K de x et s'écrit $y = P_K(x)$.

- Dans notre cas, les contraintes sont :

$$\rho(0, x) = \rho_0(x),$$

$$\rho(T, x) = \rho_1(x),$$

$$\operatorname{div}_{t,x}(\rho, m) = 0.$$

Un des avantages de la décomposition des fonctions ρ et m sur des bases d'ondelettes à divergence nulle est de ne pas sortir de la contrainte de divergence nulle.

Algorithme utilisé

Le nouveau gradient

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial d_{j,k}^{\text{div}}}(\mathbf{d}^{\text{div}}) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 2 \frac{\tilde{m}(\mathbf{d}^{\text{div}}) - \int_0^x (\rho_1(y) - \rho_0(y)) dy}{\tilde{\rho}(\mathbf{d}^{\text{div}}) + t\rho_1(x) + (1-t)\rho_0(x)} \psi_{j,k}^2 - \frac{(\tilde{m}(\mathbf{d}^{\text{div}}) - \int_0^x (\rho_1(y) - \rho_0(y)) dy)^2}{(\tilde{\rho}(\mathbf{d}^{\text{div}}) + t\rho_1(x) + (1-t)\rho_0(x))^2} \psi_{j,k}^1 dx dt$$

Pour calculer ce gradient, il y a deux possibilités :

- On peut voir $\int_{\mathbb{T}} \int_0^1 \frac{(\tilde{m}(\mathbf{d}^{\text{div}}) - \int_0^x (\rho_1(y) - \rho_0(y)) dy)^2}{(\tilde{\rho}(\mathbf{d}^{\text{div}}) + t\rho_1(x) + (1-t)\rho_0(x))^2} \psi_{j,k}^1 dx dt$ comme un coefficient d'ondelettes
- On peut décomposer $\frac{(\tilde{m}(\mathbf{d}^{\text{div}}) - \int_0^x (\rho_1(y) - \rho_0(y)) dy)^2}{(\tilde{\rho}(\mathbf{d}^{\text{div}}) + t\rho_1(x) + (1-t)\rho_0(x))^2}$ sur les ondelettes pour faire apparaître les matrices de Gram.

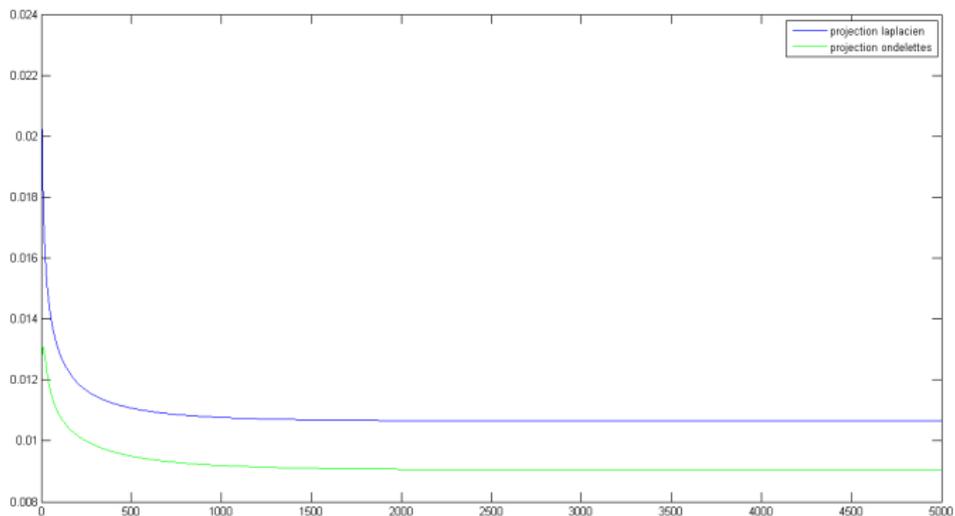


FIGURE: Fonctionnelle calculée avec projection classique et projection avec ondelettes.

- 1 Problème de Monge Kantorovich
- 2 Stricte convexité de la fonctionnelle
- 3 Ondelettes à divergence nulle
- 4 Résolution Numérique
- 5 Applications nulles sur le bord
- 6 Algorithme utilisé
- 7 Conclusion et perspectives**

Conclusion et perspectives

- ▶ Fonctionnelle strictement convexe sur la contrainte de divergence nulle.
- ▶ Pertinence de l'utilisation d'ondelettes.
- ▶ Extensions 2D et 3D.
- ▶ Développement d'algorithmes efficaces.