Mini-cours contrôle optimal : introduction au cas déterministe en dimension finie

École d'été en traitement du signal et des images
Peyresq, Juin 2013

Jean-Baptiste Caillau
Institut Math.
Univ. Bourgogne & CNRS

ANR Geometric Control Methods
European Network SADCO
INRIA McTAO

Plan

1. Formulation de Lagrange
2. Principe du maximum de Pontrjagin
3. Application au cas linéaire-quadratique
4. Lien avec le filtrage de Kalman

4. Lien avec le filtrage de Kalman

Formulation continue et déterministe. On cherche à prédire la valeur en t_f du signal x à partir de l'observation ξ et du modèle

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

On minimise pour cela dans $\mathrm{L}^2([0,t_f],\mathbf{R}^m)$

$$C(u) := (Qx(0)|x(0)) + \int_0^{t_f} [(W(t)(C(t)x(t) - \xi(t))|C(t)x(t) - \xi(t)) + (U(t)u(t)|u(t))]\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Sous l'hypothèse $Q > 0$, on a existence et unicité et l'estimation optimale est

$$x(t_f) = -R^{-1}(t_f)h(t_f)$$

où

$$\dot{R}(t) = {}^tC(t)W(t)C(t) - R(t)A(t) - {}^tA(t)R(t) - R(t)B(t)U^{-1}(t)\,{}^tB(t)R(t), \quad R(0) = Q,$$

$$\dot{h}(t) = -\,{}^tC(t)W(t)\xi(t) - {}^tA(t)h(t) - R(t)B(t)U^{-1}(t)\,{}^tB(t)h(t), \quad h(0) = 0.$$

4. Lien avec le filtrage de Kalman

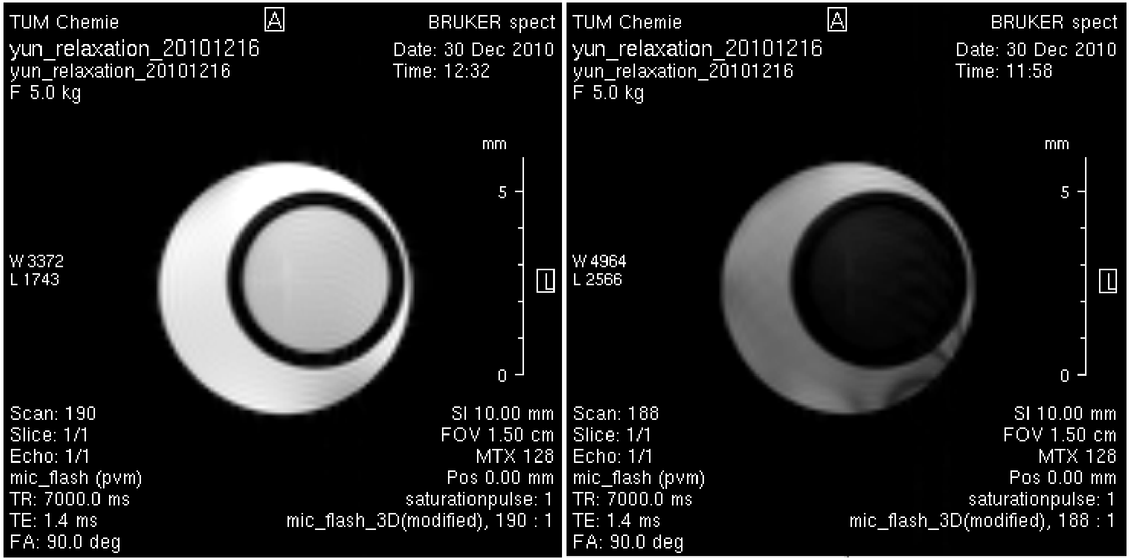
Schéma de preuve.

1. on fixe $x(t_f) = x_f$
2. on change le temps selon $t \to t_f - t$
3. on augmente l'état en posant $\hat{x} = (x, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$
4. revenant en x et en t, on a pour valeur optimale

$$S(x_f) = (R(t_f)x_f | x_f) + 2(h(t_f) | x_f),$$

d'où le résultat $\big(Q > 0 \implies R(t_f) > 0\big)$. $\square$

Imagerie médicale par RMN



Oxygenated and deoxygenated blood, before control (left), after control (right).

Bonnard, B.; Cots, O.; Glaser, S.; Lapert, M.; Sugny, D.; Zhang, Y. Geometric optimal control of the contrast imaging problem in nuclear magnetic resonance. *IEEE Trans. Automat. Control* **57** (2012), no. 8, 1957–1969.

Journées MODE 2014

Conférence MODE 2014 - RENNES
26-28 mars 2014

Mathématiques de l'Optimisation et de la décision

INSA RENNES · MODE · IRMAR · CENTRE HENRI LEBESGUE CENTRE DE MATHÉMATIQUES

Comité Scientifique

Comité d'organisation

Conférenciers pléniers

Contact

mode 2014

Calendrier

Conférence :
26-28 mars 2014

Partenaires

METROPOLE Rennes

Présentation

Du 26 au 28 mars 2014, se tiendront à l'INSA de Rennes les journées SMAI-MODE, la conférence biennale du groupe MODE de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI).

Cette manisfestation scientifique a pour but de regrouper sur le site de l'INSA de Rennes plus d'une centaine de chercheurs, doctorants, ou industriels, qui présenteront leurs travaux et échangeront sur les avancées récentes dans le domaine des mathématiques de l'optimisation et des sciences de la décision. Ce sera une manifestation d'envergure internationale comme pour les éditions précédentes puisque plusieurs pays seront représentés : France, Belgique, Italie, Espagne, Angleterre, Pologne…

Avec une cinquantaine de présentations orales, plusieurs posters et une dizaine de conférences plénières, le programme scientifique de ces journées proposera un large panorama des mathématiques de l'optimisation et de la décision, en abordant les thèmes suivants :

- Optimisation continue
- Théorie de la décision
- Analyse convexe et non lisse
- Théorie des jeux
- Calcul des variations et contrôle optimal
- Économie mathématique
- Finance mathématique
- Mathématiques de l'image et du signal

Les meilleurs exposés de jeunes chercheurs seront récompensés comme pour les éditions précédentes par le prix Dodu, patronné par EDF R&D.

→ `hjnet.math.cnrs.fr/MODE-Rennes.html`

→ GDR MOA : `gdrmoa.math.cnrs.fr`

Références

[1] Agrachev, A.; Sachkov, Y. *Control theory from the geometric viewpoint*, Springer, 2004.

[2] Bryson, A. E.; Ho, Y. C. *Applied optimal control*, Wiley, 1979.

[3] Evans, L. C. *An introduction to mathematical optimal control theory*, UCLA, 2008.

[4] Fleming, W. H.; Rishel, R. W. *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer, 1975.

[5] Lee, E. B.; Markus, L. *Foundations of optimal control theory*, Wiley, 1967.

[6] Trélat, E. *Contrôle optimal, théorie et applications*, Vuibert, 2005.

3-6-5-1, 2, 4