Jeux de routage non-atomiques dans les réseaux
Une application de la théorie des jeux

Patrick Maillé

Télécom Bretagne
Rennes, France

Contexte (1/2)

La **théorie des jeux** est utilisée pour modéliser les interactions entre agents ayant des objectifs différents.
Interactions : mon utilité dépend non seulement de mes actions, mais également de celles des autres.

Exemples :

- (transports) mon temps de trajet dépend de mon choix de route, mais aussi des choix des autres véhicules,
- (téléphonie) ma probabilité de blocage dépend de l'opérateur que j'ai choisi et du choix des autres utilisateurs,
- (Internet) ma QoS dépend -entre autres- du nombre de personnes connectées au même service ou réseau d'accès que moi.

Contexte (2/2)

On s'intéresse ici à un cas particulier de jeux où

- les stratégies des utilisateurs peuvent être représentées par un choix de route sur un graphe,
- le nombre de joueurs est très grand,
- seules les décisions massives affectent les utilités pour chaque choix : l'impact individuel d'un joueur est négligeable$\Rightarrow$jeu non-atomique.

Intérêt de cette approche :

- valable dans différents domaines
- simplifie l'étude des équilibres de Nash

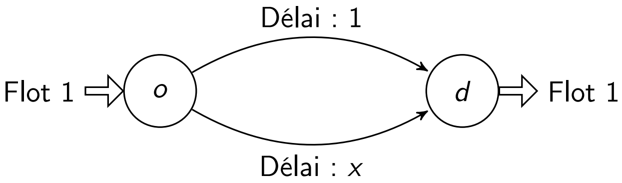
Applications : dimensionnement de réseaux, tarification, prédiction de demande

Un exemple : le réseau de Pigou (1/2)

Interprétation : imaginons qu'une unité (millier, million) de travailleurs souhaitent se rendre de la banlieue au centre ville pour travailler.

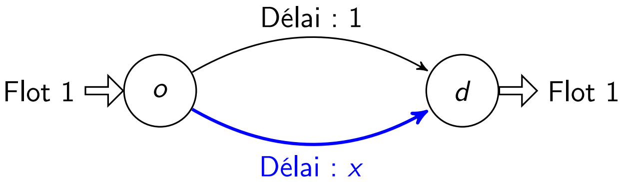
Deux possibilités :

- prendre les transports en commun$\Rightarrow$temps de transport fixe (1h)
- prendre sa voiture$\Rightarrow$le temps de transport dépend alors du nombre x de personnes sur la route (congestion), supposons que ce temps est x.



Un exemple : le réseau de Pigou (2/2)

Un seul équilibre : tout le monde prend sa voiture et met 1h à aller au travail !



Cette issue n'est **pas Pareto-efficace** : on pourrait diminuer le temps de transport de certains utilisateurs sans augmenter celui des autres, en faisant basculer des utilisateurs vers les transports publics.

- Forcer les gens à prendre les transports en commun$\Rightarrow$mal perçu
- Introduire des *incitations* à prendre les transports publics plutôt que sa voiture : péages routiers, subventions des transports en commun.

- Se rappeler qu'on utilise des *modèles* mathématiques, qui sont en général une simplification de la réalité
- Par exemple, considérer le « coût » des transports en commun comme indépendant de la charge n'est pas toujours parfaitement réaliste...

`http://www.youtube.com/watch?v=_X8dGGedxDc`

Plan

1. Présentation formelle des jeux de routage
   - Problème de routage de trafic
   - Flux réalisable, flux par arc
2. Équilibres d'un jeu de routage
   - Principe de Wardrop et équilibres
   - Équilibre de Wardrop : existence et unicité
   - Inégalité variationnelle
3. Efficacité
   - Coût total et optimum social
   - Le prix de l'anarchie
   - Comment introduire de la coordination entre les utilisateurs ?
4. Conclusion : deux exemples d'application
   - Routage partiellement optimal
   - Réseaux sans fil

Plan

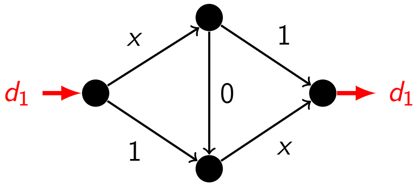
Problème de routage de trafic

On considère

- un réseau, représenté par un **graphe orienté** $G = (N, \mathcal{A})$, avec N l'ensemble des nœuds et $\mathcal{A}$ l'ensemble des arcs ;
- un ensemble $K \subset N \times N$ de **paires origine-destination** : pour tout $k = (s_k, t_k) \in K$, une demande d_k doit être routée[1] de s_k à t_k,
- pour tout arc $a \in \mathcal{A}$, une **fonction de latence** (ou de coût) ℓ_a, donnant le coût de traversée du lien a en fonction de sa charge.

Le triplet $(G, (\ell_a)_{a\in\mathcal{A}}, (d_k)_{k\in K})$ est une *instance* du problème de routage du trafic.

Exemple : instance de Braess



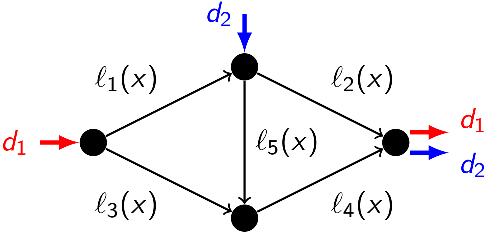
1. Remarque : ces données peuvent être présentées sous forme d'une matrice $|N| \times |N|$, appelée **matrice de trafic**

Chemins

On note

- $P \subset \mathcal{A}$ un **chemin** (ensemble d'arcs) ;
- $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des chemins de s_k à t_k pour $k = (s_k, t_k) \in K$;
- $\mathcal{P} = \bigcup_{k \in K} \mathcal{P}_k$ l'ensemble des chemins susceptibles d'être utilisés.

Exemple :



$$\mathcal{P} = \big\{\{1,2\}; \{3,4\}; \{1,5,4\}; \{2\}; \{5,4\}\big\}$$

Flux réalisable, flux par arc (1/2)

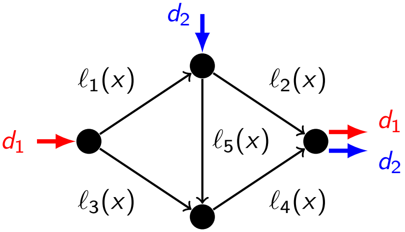
Définition

Un *flux réalisable* est un vecteur $(x_P)_{P\in\mathcal{P}}$ qui satisfait la demande, i.e.,

$$\begin{cases} \sum_{P\in\mathcal{P}_k} x_P &= d_k & \forall k\in K \\ x_P &\geq 0 & \forall P\in\mathcal{P}. \end{cases}$$

Étant donné un flux de chemins $(x_P)_{P\in\mathcal{P}}$, on obtient facilement le *flux par arc* :

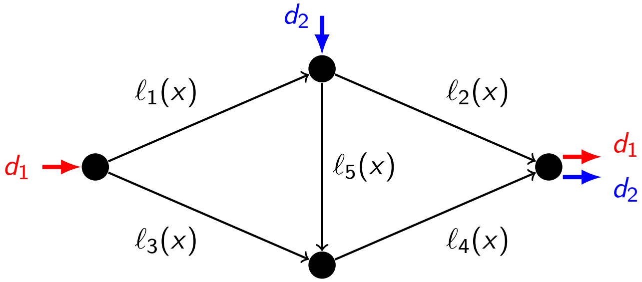
$$x_a = \sum_{P:a\in P} x_P \quad \forall a\in\mathcal{A}.$$



Exercice : vérifier que
$$\begin{cases} x_{\{1,2\}} = 0.5; x_{\{3,4\}} = 0.2; x_{\{1,5,4\}} = 0.3; \\ x_{\{2\}} = 1.5; x_{\{5,4\}} = 0.5 \end{cases}$$
est réalisable pour $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, et calculer le flux sur chaque lien $a\in\mathcal{A}$.

Flux réalisable, flux par arc (2/2)

Attention : plusieurs flux par chemin différents peuvent correspondre à un même flux par arc.



Exemple : calculer les flux par arc pour les flux par chemin suivants

$$(a) \quad \begin{cases} x_{\{1,2\}} = 0.5; x_{\{3,4\}} = 0.2; x_{\{1,5,4\}} = 0.3; \\ x_{\{2\}} = 1.5; x_{\{5,4\}} = 0.5 \end{cases}$$

$$\text{et} \quad (b) \quad \begin{cases} x_{\{1,2\}} = 0; x_{\{3,4\}} = 0.2; x_{\{1,5,4\}} = 0.8; \\ x_{\{2\}} = 2; x_{\{5,4\}} = 0 \end{cases}$$

Plan

Principe de Wardrop et équilibres

Définition

Le coût d'un chemin $P \in \mathcal{P}$ est la somme des coûts de ses liens :

$$\ell_P(x) := \sum_{a \in P} \ell_a(x_a).$$

Principe général : dans une situation stable (équilibre), pour toute paire origine-destination seuls les chemins les moins coûteux sont choisis.

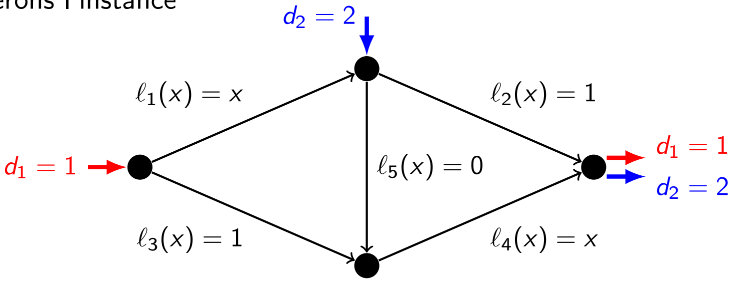
Définition (Wardrop, 1952 [11])

Un flux réalisable x est un *équilibre de Wardrop* si

$$\ell_P(x) \leq \ell_Q(x) \quad \text{pour tout } k \in K \text{ et } P, Q \in \mathcal{P}_k \text{ tel que } x_P > 0.$$

Équilibre de Wardrop : illustration

Considérons l'instance



Exercice : vérifier que $\begin{cases} x_{\{1,2\}} = 0.5; x_{\{3,4\}} = 0.2; x_{\{1,5,4\}} = 0.3; \\ x_{\{2\}} = 1.5; x_{\{5,4\}} = 0.5 \end{cases}$ n'est pas un équilibre de Wardrop, mais que $\begin{cases} x_{\{1,2\}} = 0.6; x_{\{3,4\}} = 0; x_{\{1,5,4\}} = 0.4; \\ x_{\{2\}} = 1.4; x_{\{5,4\}} = 0.6 \end{cases}$ en est un.

Équilibres comme solution d'un problème d'optimisation

Considérons des fonctions croissantes dérivables convexes $(f_a)_{a\in\mathcal{A}}$, et une solution x^* du problème d'optimisation convexe

$$\min_x \quad \sum_{a\in\mathcal{A}} f_a(x_a) \tag{1}$$

$$\text{sous contraintes} \quad \begin{cases} \sum_{P\in\mathcal{P}_k} x_P = d_k & \forall k \in K \\ x_P \geq 0 & \forall P \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

x^* est réalisable et vérifie

$$\sum_{a\in P} f_a'(x_a^*) \leq \sum_{a\in Q} f_a'(x_a^*) \quad \text{pour tout } k \in K \text{ et } P, Q \in \mathcal{P}_k \text{ tel que } x_P^* > 0.$$

$\Rightarrow$ *x^* est un équilibre de Wardrop pour une instance où* $\ell_a(x_a^*) = f_a'(x_a^*), \forall a \in \mathcal{A}$

On peut montrer que la réciproque est vraie, grâce à la convexité de la fonction objectif (admis ici, voir [1]) : un équilibre de Wardrop x^* est solution de (1) lorsque $f_a'(x_a^*) = \ell_a(x_a^*), \forall a \in \mathcal{A}$.

On a donc le résultat suivant.

Théorème

L'ensemble des équilibres de Wardrop d'une instance de jeu de routage avec des fonctions de coûts croissantes est l'ensemble des solutions du problème

$$\min_x \quad \sum_{a\in\mathcal{A}} \int_0^{x_a} \ell_a(y)dy \tag{2}$$

$$\textit{sous contraintes} \quad \begin{cases} \sum_{P\in\mathcal{P}_k} x_P = d_k & \forall k \in K \\ x_P \geq 0 & \forall P \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Équilibre de Wardrop : existence et unicité

Proposition (résultat classique en optimisation)

Un problème de minimisation d'une fonction convexe sur un ensemble convexe admet toujours une solution, qui est unique si la fonction objectif est strictement convexe.

Théorème (Beckmann, McGuire, and Winsten 1956 [1])

Pour une instance avec des fonctions de latence continues et croissantes, un équilibre de Wardrop existe toujours et est essentiellement unique.
Si de plus les fonctions de latence sont strictement croissantes, les flux par arc sont uniques.

Unicité essentielle : pour tous les équilibres, chaque utilisateur perçoit le même coût total.

Exemple : pour l'instance du transparent 15,
$\begin{cases} x_{\{1,2\}} = 0; x_{\{3,4\}} = 0; x_{\{1,5,4\}} = 1; \\ x_{\{2\}} = 2; x_{\{5,4\}} = 0 \end{cases}$ est également un équilibre de Wardrop.

Inégalité variationnelle

Le raisonnement du transparent 16 peut également être appliqué avec les fonctions

$$f_a(x_a) = x_a \ell_a(x_a^{\mathrm{WE}}) \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

où x^{WE} est un équilibre de Wardrop avec les coûts $\ell_a, a \in \mathcal{A}$.

Ces fonctions sont linéaires donc convexes, on a alors

Théorème (Smith 1979 [8])

Un flux réalisable $\hat{x}$ pour une instance avec des fonctions de latence continues et croissantes est un équilibre de Wardrop si et seulement si

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} (x_a - \hat{x}_a)\ell_a(\hat{x}_a) \geq 0 \quad \textit{pour tout flux réalisable } x.$$

Cette relation est appelée *inégalité variationnelle*.

Plan

Coût total et optimum social

Définition

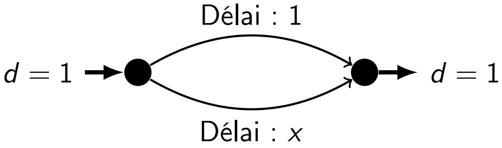
Pour un flux réalisable x, le coût total subi par l'ensemble de la population est

$$C(x) := \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \ell_P(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ell_a(x_a).$$

(Pour les réseaux routiers, cela correspond au temps total passé par la population sur la route.)

Exercice : pour l'instance de Pigou,

1. calculer l'équilibre de Wardrop et le coût total associé.
2. Quelle est la valeur minimale du coût total sur les flux réalisables ?



Définition

On appelle *optimum social* un flux réalisable qui minimise le coût total.

$$x^{\mathrm{SO}} \in \arg\min_x \sum_{a\in\mathcal{A}} x_a \ell_a(x_a) \tag{3}$$

$$\text{sous contraintes} \quad \begin{cases} \sum_{P\in\mathcal{P}_k} x_P = d_k & \forall k \in K \\ x_P \geq 0 & \forall P \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Il est naturellement intéressant de connaître la performance optimale du système, donc de calculer un optimum social.

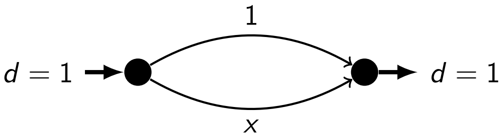
Optimum social comme équilibre

Appliquons encore le raisonnement du transparent 16 aux fonctions $f_a(x) = x\ell_a(x), a \in \mathcal{A}$:

Théorème

Si pour tout $a \in \mathcal{A}$, la fonction $x \mapsto x\ell_a(x)$ est convexe, alors l'ensemble des optimums sociaux est l'ensemble des équilibres de Wardrop pour une instance où les coûts sont $\overline{\ell}_a(x) := \ell_a(x) + x\ell'_a(x)$.

Exercice : retrouver l'optimum social pour l'instance de Pigou avec cette méthode.



Le paradoxe de Braess

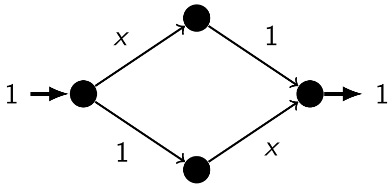
On pourrait raisonnablement s'attendre à ce qu'ajouter une ressource (ou en diminuer le coût) réduise toujours le coût total.

$\Rightarrow$C'est faux, à cause de l'égoïsme des participants !

Définition

Une situation où l'ajout d'une ressource détériore les performances est appelée *paradoxe de Braess*.

Exemple (Braess, 1969 [2, 3]) :



Sans lien entre les noeuds du haut et du bas :

Le paradoxe de Braess

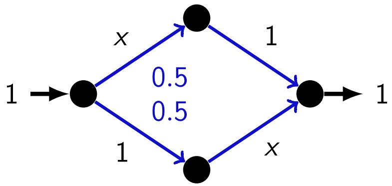
On pourrait raisonnablement s'attendre à ce qu'ajouter une ressource (ou en diminuer le coût) réduise toujours le coût total.

$\Rightarrow$C'est faux, à cause de l'égoïsme des participants !

Définition

Une situation où l'ajout d'une ressource détériore les performances est appelée *paradoxe de Braess*.

Exemple (Braess, 1969 [2, 3]) :



Sans lien entre les noeuds du haut et du bas :

$$C^{\mathrm{WE}} = 3/2.$$

Le paradoxe de Braess

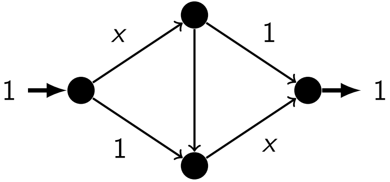
On pourrait raisonnablement s'attendre à ce qu'ajouter une ressource (ou en diminuer le coût) réduise toujours le coût total.

$\Rightarrow$C'est faux, à cause de l'égoïsme des participants !

Définition

Une situation où l'ajout d'une ressource détériore les performances est appelée *paradoxe de Braess*.

Exemple (Braess, 1969 [2, 3]) :



Sans lien entre les noeuds du haut et du bas :

$$C^{\mathrm{WE}} = 3/2.$$

Avec un lien de coût nul entre les noeuds du haut et du bas :

Le paradoxe de Braess

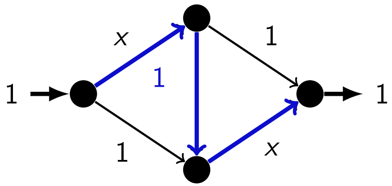
On pourrait raisonnablement s'attendre à ce qu'ajouter une ressource (ou en diminuer le coût) réduise toujours le coût total.

$\Rightarrow$C'est faux, à cause de l'égoïsme des participants !

Définition

Une situation où l'ajout d'une ressource détériore les performances est appelée *paradoxe de Braess*.

Exemple (Braess, 1969 [2, 3]) :



Sans lien entre les noeuds du haut et du bas :

$$C^{\text{WE}} = 3/2.$$

Avec un lien de coût nul entre les noeuds du haut et du bas :

$$C^{\text{WE}} = 2.$$

Le paradoxe de Braess

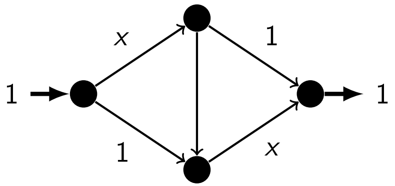
On pourrait raisonnablement s'attendre à ce qu'ajouter une ressource (ou en diminuer le coût) réduise toujours le coût total.

$\Rightarrow$C'est faux, à cause de l'égoïsme des participants !

Définition

Une situation où l'ajout d'une ressource détériore les performances est appelée *paradoxe de Braess*.

Exemple (Braess, 1969 [2, 3]) :



Sans lien entre les noeuds du haut et du bas :

$$C^{\text{WE}} = 3/2.$$

Avec un lien de coût nul entre les noeuds du haut et du bas :

$$C^{\text{WE}} = 2.$$

$\Rightarrow$**L'ajout du lien a détérioré le coût de tous les utilisateurs.**

Le paradoxe de Braess dans la « vraie vie »

Dans le New York Times du 25 Décembre 1990, p.38, *What if They Closed 42d Street and Nobody Noticed ?*, par Gina Kolata :

On Earth Day this year, New York City's Transportation Commissioner decided to close 42d Street, which as every New Yorker knows is always congested. "Many predicted it would be doomsday," said the Commissioner, Lucius J. Riccio. "You didn't need to be a rocket scientist or have a sophisticated computer queuing model to see that this could have been a major problem." But to everyone's surprise, Earth Day generated no historic traffic jam. *Traffic flow actually improved when 42d Street was closed.*

The Cheonggyecheon River in Seoul, before 2002 and after.

Le prix de l'anarchie

On veut répondre à la question : **Quelle est l'inefficacité du routage égoïste ?**

Définition (Koutsoupias & Papadimitriou [5])

On appelle *Prix de l'Anarchie* (**POA**) la valeur maximale du rapport entre le coût à un équilibre et le coût minimal.

$$\mathbf{POA} := \max_{\text{instances}} \frac{C^{\mathrm{WE}}}{C^{\mathrm{SO}}}$$

Le prix de l'anarchie

On veut répondre à la question : **Quelle est l'inefficacité du routage égoïste ?**

Définition (Koutsoupias & Papadimitriou [5])

On appelle *Prix de l'Anarchie* (**POA**) la valeur maximale du rapport entre le coût à un équilibre et le coût minimal.

$$\textbf{POA} := \max_{\text{instances}} \frac{C^{\mathrm{WE}}}{C^{\mathrm{SO}}}$$

Le prix de l'anarchie mesure l'impact de la non-coordination entre les joueurs :

Le prix de l'anarchie

On veut répondre à la question : **Quelle est l'inefficacité du routage égoïste ?**

Définition (Koutsoupias & Papadimitriou [5])

On appelle *Prix de l'Anarchie* (**POA**) la valeur maximale du rapport entre le coût à un équilibre et le coût minimal.

$$\textbf{POA} := \max_{\text{instances}} \frac{C^{\text{WE}}}{C^{\text{SO}}}$$

Le prix de l'anarchie mesure l'impact de la non-coordination entre les joueurs :

- Si **POA** petit, on peut laisser les participants choisir :
  Il y a peu à gagner à imposer ce que les gens doivent faire !

Le prix de l'anarchie

On veut répondre à la question : **Quelle est l'inefficacité du routage égoïste ?**

Définition (Koutsoupias & Papadimitriou [5])

On appelle *Prix de l'Anarchie* (**POA**) la valeur maximale du rapport entre le coût à un équilibre et le coût minimal.

$$\textbf{POA} := \max_{\text{instances}} \frac{C^{\text{WE}}}{C^{\text{SO}}}$$

Le prix de l'anarchie mesure l'impact de la non-coordination entre les joueurs :

- Si **POA** petit, on peut laisser les participants choisir :
  Il y a peu à gagner à imposer ce que les gens doivent faire !
- Si **POA** grand, on peut chercher à modifier le système, ou à introduire des incitations pour atteindre une issue plus efficace.

Price de l'anarchie – fonctions de coûts affines

- Sans restrictions sur les fonctions de coût, **POA** est non borné.
- On va considérer un ensemble fixé de fonctions de coût, e.g., des fonctions affines.

Théorème (Roughgarden & Tardos, 2002 [7])

Dans des réseaux où les fonctions de coût sont affines,

$$C^{WE} \leq \frac{4}{3} C^{SO}$$

Price de l'anarchie – fonctions de coûts affines

- Sans restrictions sur les fonctions de coût, **POA** est non borné.
- On va considérer un ensemble fixé de fonctions de coût, e.g., des fonctions affines.

Théorème (Roughgarden & Tardos, 2002 [7])

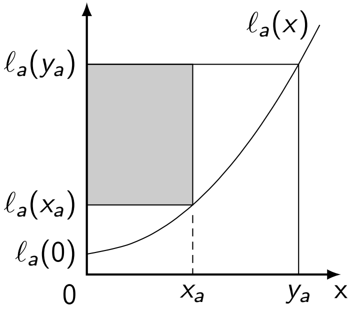
Dans des réseaux où les fonctions de coût sont affines,

$$C^{WE} \leq \frac{4}{3} C^{SO}$$

L'égoïsme conduit à une situation proche de l'optimum

Corollaire. Les instances de Braess et Pigou sont des pires cas.

Prix de l'anarchie – Coûts généraux



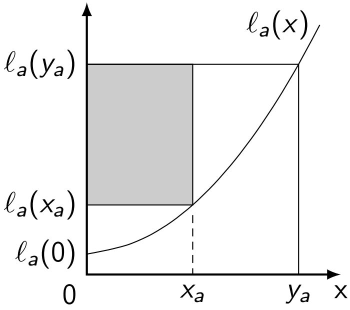
$$\text{Soit } \beta(\mathcal{L}) := \sup_{\ell\in\mathcal{L}} \left\{ \frac{\text{aire grisée}}{\text{grand rectangle}} \right\}$$

$$\text{i.e., } \beta(\mathcal{L}) = \sup_{\ell\in\mathcal{L}} \sup_{x,y\geq 0} \frac{x(\ell(y)-\ell(x))}{y\ell(y)}.$$

On a donc pour tout $x, y \geq 0$,

$$x(\ell(y)-\ell(x)) \leq \beta(\mathcal{L})y\ell(y).$$

Prix de l'anarchie – Coûts généraux



$$\text{Soit } \beta(\mathcal{L}) := \sup_{\ell \in \mathcal{L}} \left\{ \frac{\text{aire grisée}}{\text{grand rectangle}} \right\}$$

$$\text{i.e., } \beta(\mathcal{L}) = \sup_{\ell \in \mathcal{L}} \sup_{x,y \geq 0} \frac{x(\ell(y) - \ell(x))}{y\ell(y)}$$

On a donc pour tout $x, y \geq 0$,

$$x(\ell(y) - \ell(x)) \leq \beta(\mathcal{L}) y \ell(y).$$

Théorème (2003,2004 [6, 4])

Si les fonctions de coûts appartiennent à une famille $\mathcal{L}$ de fonctions continues,

$$C^{WE} \leq (1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1} \; C^{SO}$$

Exercice : démontrer ce théorème

Utiliser l'inégalité variationnelle à l'équilibre (transparent 19).

Bornes sur le prix de l'anarchie

Théorème (2002, 2003, 2004)

Pour des fonctions de coûts polynomiales de degré p, **POA** $= C^{WE}/C^{SO}$ *est borné par*

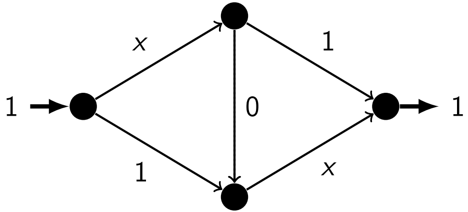
degré	*1*	*2*	*3*	*4*	$\dots$	p
POA	$4/3$	1.626	1.896	2.151	$\dots$	$\Omega(p/\ln p)$

Les coûts totaux du jeu et d'un système centralisé sont partiellement « alignés ».

Comment introduire de la coordination entre les utilisateurs ?

Jeu de Stackelberg : le *leader* (gestionnaire du réseau) choisit sa stratégie, en prédisant que les utilisateurs *(suiveurs)* réagiront égoïstement.

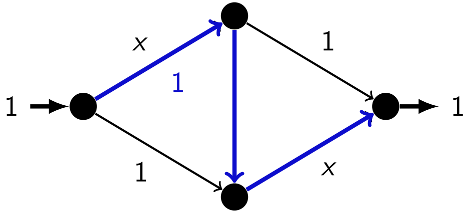
- Supprimer des arcs : **design de réseau**



Comment introduire de la coordination entre les utilisateurs ?

Jeu de Stackelberg : le *leader* (gestionnaire du réseau) choisit sa stratégie, en prédisant que les utilisateurs *(suiveurs)* réagiront égoïstement.

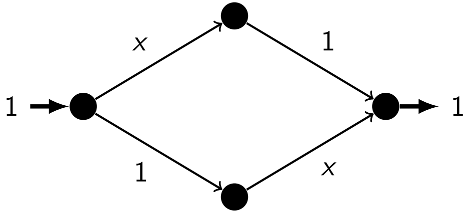
- Supprimer des arcs : **design de réseau**



Comment introduire de la coordination entre les utilisateurs ?

Jeu de Stackelberg : le *leader* (gestionnaire du réseau) choisit sa stratégie, en prédisant que les utilisateurs *(suiveurs)* réagiront égoïstement.

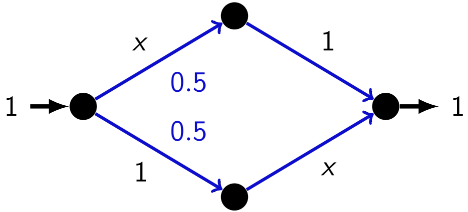
- Supprimer des arcs : **design de réseau**



Comment introduire de la coordination entre les utilisateurs ?

Jeu de Stackelberg : le *leader* (gestionnaire du réseau) choisit sa stratégie, en prédisant que les utilisateurs *(suiveurs)* réagiront égoïstement.

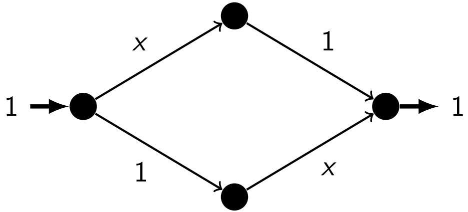
- Supprimer des arcs : **design de réseau**



Comment introduire de la coordination entre les utilisateurs ?

Jeu de Stackelberg : le *leader* (gestionnaire du réseau) choisit sa stratégie, en prédisant que les utilisateurs *(suiveurs)* réagiront égoïstement.

- Supprimer des arcs : **design de réseau**

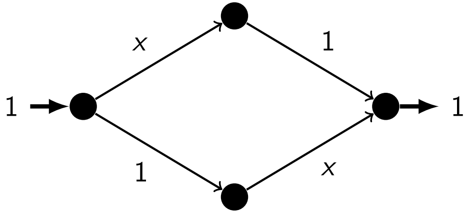


$\Rightarrow$ déterminer l'ensemble de liens à supprimer est un problème NP-difficile...

Comment introduire de la coordination entre les utilisateurs ?

Jeu de Stackelberg : le *leader* (gestionnaire du réseau) choisit sa stratégie, en prédisant que les utilisateurs *(suiveurs)* réagiront égoïstement.

- Supprimer des arcs : **design de réseau**



⇒ déterminer l'ensemble de liens à supprimer est un problème NP-difficile...

- Contrôler une **proportion de la demande**

Coordination par les prix

Politique la plus connue : ajouter sur chaque arc $a \in \mathcal{A}$ une *taxe pigouvienne*

$$t_a = x_a^{\mathsf{SO}} \ell'_a(x_a^{\mathsf{SO}}), \tag{4}$$

où ℓ'_a est la dérivée de ℓ_a, et x^{SO} est un optimum social.

Coordination par les prix

Politique la plus connue : ajouter sur chaque arc $a \in \mathcal{A}$ une *taxe pigouvienne*

$$t_a = x_a^{\mathrm{SO}} \ell_a'(x_a^{\mathrm{SO}}), \tag{4}$$

où ℓ_a' est la dérivée de ℓ_a, et x^{SO} est un optimum social.

Les utilisateurs perçoivent maintenant un coût $\ell_a(x_a) + t_a$ sur chaque arc a.

Exercice : montrer le résultat suivant

Théorème

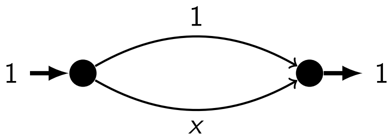
Le flux optimal x^{SO} utilisé dans (4) est un équilibre de Wardrop pour le jeu incluant les prix, et le seul si les fonctions de coût $(\ell_a)_{a\in\mathcal{A}}$ sont strictement croissantes.

$\Rightarrow$ les taxes pigouviennes induisent un comportement optimal !

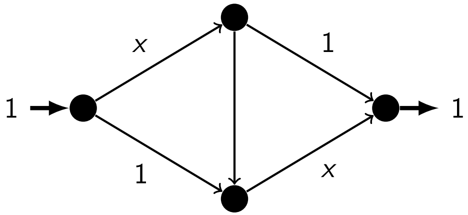
Application : exercice

Calculer des taxes optimales pour

- l'instance de Pigou



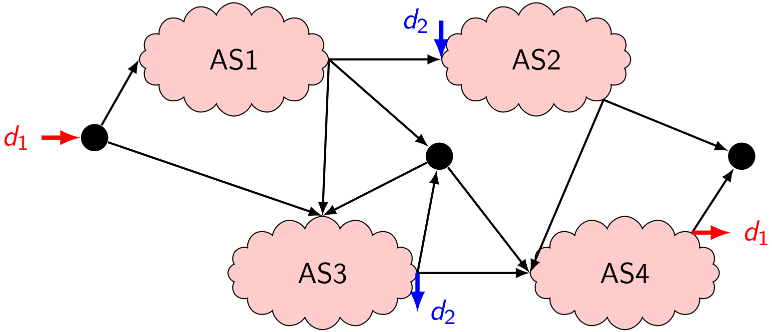
- l'instance de Braess



Plan

Routage partiellement optimal (1/2)

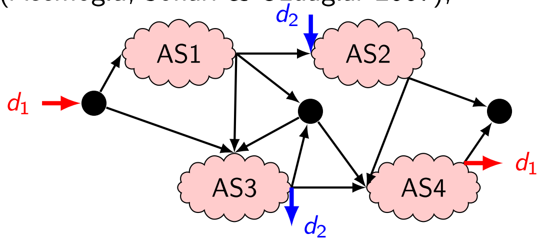
Les systèmes autonomes (ASs) peuvent contrôler le routage à l'intérieur de leur domaine.



Que se passe-t-il si les ASs optimisent leur routage interne ?

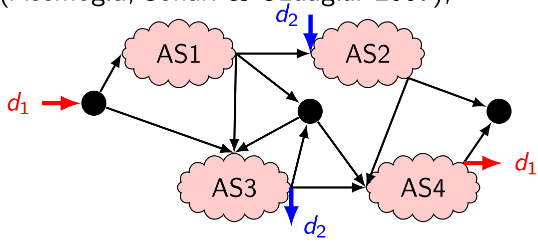
Routage partiellement optimal (2/2)

Si les ASs optimisent leur routage interne, mais les flux choisissent le routage global (Acemoglu, Johari & Ozdaglar 2007),



Routage partiellement optimal (2/2)

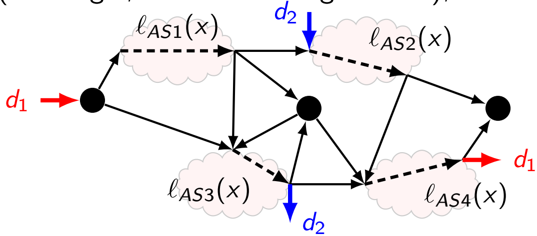
Si les ASs optimisent leur routage interne, mais les flux choisissent le routage global (Acemoglu, Johari & Ozdaglar 2007),



1. Si chaque AS a un point d'entrée unique et un point de sortie unique

Routage partiellement optimal (2/2)

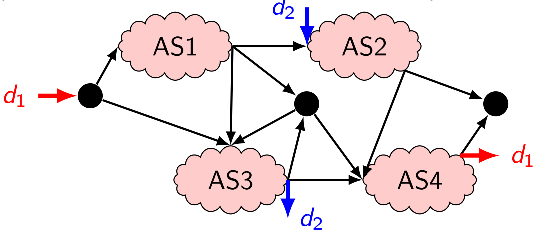
Si les ASs optimisent leur routage interne, mais les flux choisissent le routage global (Acemoglu, Johari & Ozdaglar 2007),



1. Si chaque AS a un point d'entrée unique et un point de sortie unique
   - l'issue peut être pure que lorsque les flux choisissent complètement leur route
   - pour des fonctions de coût polynomiales, le **POA** est inchangé

Routage partiellement optimal (2/2)

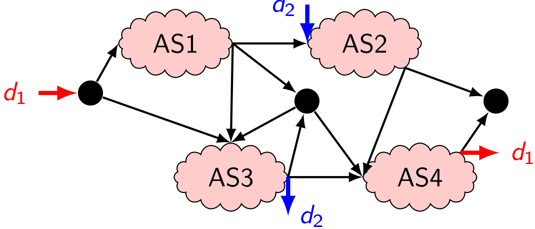
Si les ASs optimisent leur routage interne, mais les flux choisissent le routage global (Acemoglu, Johari & Ozdaglar 2007),



1. Si chaque AS a un point d'entrée unique et un point de sortie unique
   - l'issue peut être pure que lorsque les flux choisissent complètement leur route
   - pour des fonctions de coût polynomiales, le **POA** est inchangé
2. Si les ASs peuvent avoir plusieurs points d'entrée et de sortie
   - même avec des fonctions de coût affines, l'issue peut être infiniment inefficace (**POA** $= +\infty$).

Routage partiellement optimal (2/2)

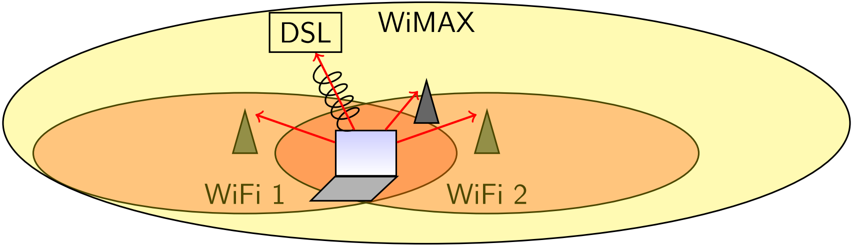
Si les ASs optimisent leur routage interne, mais les flux choisissent le routage global (Acemoglu, Johari & Ozdaglar 2007),



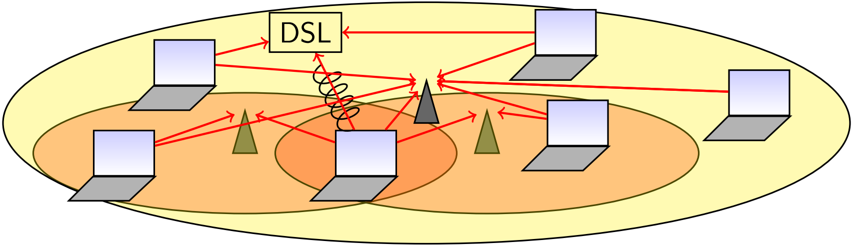
1. Si chaque AS a un point d'entrée unique et un point de sortie unique
   - l'issue peut être pure que lorsque les flux choisissent complètement leur route
   - pour des fonctions de coût polynomiales, le **POA** est inchangé
2. Si les ASs peuvent avoir plusieurs points d'entrée et de sortie
   - même avec des fonctions de coût affines, l'issue peut être infiniment inefficace (**POA** $= +\infty$).

Dans tous les cas, un AS n'est même pas sûr de subir un coût total moindre, puisque son optimisation peut le rendre plus attractif...

Réseaux sans fil

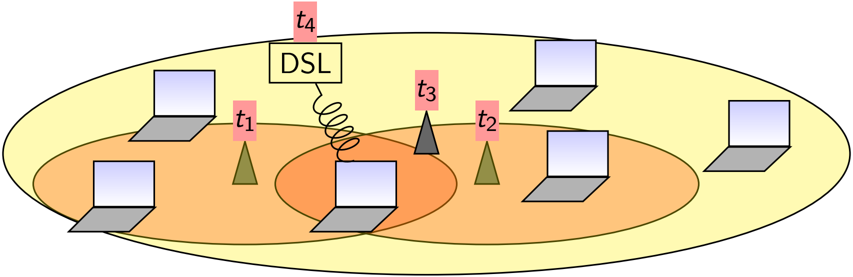


Réseaux sans fil

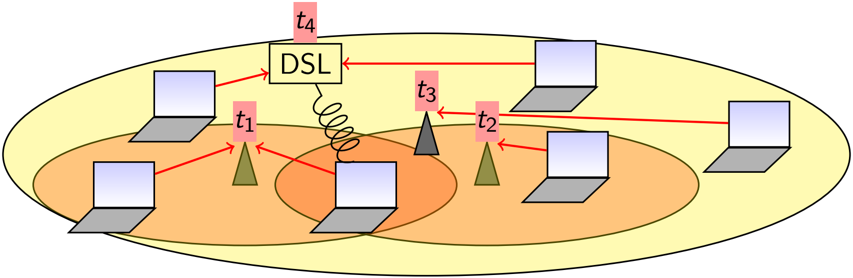


- Interactions entre des utilisateurs non coopérants : **jeu**
- Les réseaux congestionnés offrent une moins bonne qualité de service (délai, pertes)

Déterminer les prix optimaux



Réseaux sans fil



Situation : un jeu noncoopératif à deux niveaux

1. *Haut niveau* : **le(s) gestionnaire(s) du réseau** fixent les prix (taxes) pour minimiser le coût total ou maximiser leur revenu,
2. *Bas niveau* : **les utilisateurs** choisissent leur réseau d'accès.

Nous avons considéré un modèle simple !

Il existe des travaux de recherche récents visant à relâcher certaines hypothèses.

On a supposé les utilisateurs

Nous avons considéré un modèle simple !

Il existe des travaux de recherche récents visant à relâcher certaines hypothèses.

On a supposé les utilisateurs

- **Non-atomiques** (i.e., infiniment petits) : que se passe-t-il si des utilisateurs ont une demande non négligeable ?

Nous avons considéré un modèle simple !

Il existe des travaux de recherche récents visant à relâcher certaines hypothèses.

On a supposé les utilisateurs

- **Non-atomiques** (i.e., infiniment petits) : que se passe-t-il si des utilisateurs ont une demande non négligeable ?
- **Homogènes** : que se passe-t-il si tous les utilisateurs n'ont pas la même sensibilité aux taxes ?

Nous avons considéré un modèle simple !

Il existe des travaux de recherche récents visant à relâcher certaines hypothèses.
On a supposé les utilisateurs

- **Non-atomiques** (i.e., infiniment petits) : que se passe-t-il si des utilisateurs ont une demande non négligeable ?
- **Homogènes** : que se passe-t-il si tous les utilisateurs n'ont pas la même sensibilité aux taxes ?
- **Parfaitement rationnels** : que se passe-t-il si les utilisateurs font des erreurs (limitées) dans le choix de leur stratégie optimale ?

Nous avons considéré un modèle simple !

Il existe des travaux de recherche récents visant à relâcher certaines hypothèses.
On a supposé les utilisateurs

- **Non-atomiques** (i.e., infiniment petits) : que se passe-t-il si des utilisateurs ont une demande non négligeable ?
- **Homogènes** : que se passe-t-il si tous les utilisateurs n'ont pas la même sensibilité aux taxes ?
- **Parfaitement rationnels** : que se passe-t-il si les utilisateurs font des erreurs (limitées) dans le choix de leur stratégie optimale ?
- **À information parfaite** : que se passe-t-il si les utilisateurs ne connaissent pas à tout instant le niveau de congestion de tous les arcs ?

Nous avons considéré un modèle simple !

Il existe des travaux de recherche récents visant à relâcher certaines hypothèses.
On a supposé les utilisateurs

- **Non-atomiques** (i.e., infiniment petits) : que se passe-t-il si des utilisateurs ont une demande non négligeable ?
- **Homogènes** : que se passe-t-il si tous les utilisateurs n'ont pas la même sensibilité aux taxes ?
- **Parfaitement rationnels** : que se passe-t-il si les utilisateurs font des erreurs (limitées) dans le choix de leur stratégie optimale ?
- **À information parfaite** : que se passe-t-il si les utilisateurs ne connaissent pas à tout instant le niveau de congestion de tous les arcs ?

De plus, nous nous sommes concentrés ici sur des mesures d'**efficacité** et avons ignoré celles d'**équité** (est-ce que des utilisateurs similaires ont des coûts similaires ?).

Conclusions

- Les réseaux mettent en interaction plusieurs types d'agents
- Les choix stratégiques des agents peuvent s'influencer
- La plupart des agents sont égoïstes

$\Rightarrow$ La théorie des jeux fournit un cadre approprié

Les jeux de routage (et la notion d'équilibre de Wardrop) ont fait l'objet de développements récents, et peuvent s'appliquer dans divers domaines :

- réseaux de transport (routier, ferroviaire, ...)
- modèles de demande en économie
- réseaux de télécommunication

Pour une version rédigée... (en anglais)

La plupart des concepts et résultats présentés dans ce document sont inclus dans le chapitre 2 (pp 33–49) de la thèse de Nicolàs E. Stier-Moses [9], accessible ici :

`http://www.columbia.edu/~ns2224/papers/ThesisNStier.pdf`

Références I

[1] M. Beckmann, C. B. McGuire, and C. B. Winsten.
Studies in the economics of transportation.
Yale University Press, New Heaven, Connecticut, 1956.

[2] D. Braess.
Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung.
Unternehmensforschung, 12 :258–268, 1969.

[3] D. Braess, A. Nagurney, and T. Wakolbinger.
On a paradox of traffic planning.
Transportation Science, 39 :446–450, 2005.

[4] J. R. Correa, A. S. Schulz, and N. E. Stier-Moses.
Selfish routing in capacitated networks.
Mathematics of Operations Research, 29(4) :961–976, Nov 2004.

Références II

[5] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou.
Worst-case equilibria.
In *Proc. of 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 1999)*, volume 1563 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 404–413, 1999.

[6] T. Roughgarden.
The price of anarchy is independent of the network topology.
Journal of Computer and System Sciences, 67(2) :341–364, Sept 2003.

[7] T. Roughgarden and É. Tardos.
How bad is selfish routing ?
Journal of the ACM, 49(2) :236–259, Mar 2002.

[8] M. J. Smith.
The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria.
Transportation Research, Part B, 13B :295–304, 1979.

Références III

[9] N. E. Stier-Moses.
Selfish versus Coordinated Routing in Network Games.
PhD thesis, Sloan School of Management, MIT, May 2004.

[10] C. Touati.
La théorie des jeux pour les partages de ressources dans les grands systèmes distribués.
ENS Lyon seminar, Jan 2009.
available at `http://mescal.imag.fr/membres/corinne.touati/Talks/game-ENS-2009.pdf`.

[11] J. G. Wardrop.
Some theoretical aspects of road traffic research.
Proc. of the Institute of Civil Engineers, 1 :325–378, 1952.