Théorie des Jeux

Rida Laraki

Ecole d'été Peyresq
Séance 4: Jeux sous forme extensive

Contents

1. Jeux à information parfaite
2. Jeux sous forme extensive : le modèle générale
3. Mémoire parfaite

Ce chapitre vise à étudier les jeux dont le déroulement dynamique est décrit de manière explicite (comme le jeu d'echèc).

Ce chapitre vise à étudier les jeux dont le déroulement dynamique est décrit de manière explicite (comme le jeu d'echèc).

Le modèle de jeu à information parfaite correspond au cadre le plus naturel et est très utilisé (analyse fonctionnelle, théorie descriptive des ensembles, logique, informatique)

Description d'un jeu à information parfaite

Le jeu est décrit par un arbre orienté fini sans cycle avec :

Description d'un jeu à information parfaite

Le jeu est décrit par un arbre orienté fini sans cycle avec :

- une **origine** θ

Description d'un jeu à information parfaite

Le jeu est décrit par un arbre orienté fini sans cycle avec :

- une **origine** θ
- un ensemble de **noeuds** T

Description d'un jeu à information parfaite

Le jeu est décrit par un arbre orienté fini sans cycle avec :

- une **origine** θ
- un ensemble de **noeuds** T
- une application **prédecesseur** ϕ de $T \setminus \{\theta\}$ dans T

Description d'un jeu à information parfaite

Le jeu est décrit par un arbre orienté fini sans cycle avec :

- une **origine** θ
- un ensemble de **noeuds** T
- une application **prédecesseur** ϕ de $T \setminus \{\theta\}$ dans T
- des noeuds terminaux $R = T \setminus Im\phi$ et des **positions** $P = T \setminus R$.

Description d'un jeu à information parfaite

Le jeu est décrit par un arbre orienté fini sans cycle avec :

- une **origine** θ
- un ensemble de **noeuds** T
- une application **prédecesseur** ϕ de $T \setminus \{\theta\}$ dans T
- des noeuds terminaux $R = T \setminus Im\phi$ et des **positions** $P = T \setminus R$.

Description d'un jeu à information parfaite

Le jeu est décrit par un arbre orienté fini sans cycle avec :

- une **origine** θ
- un ensemble de **noeuds** T
- une application **prédecesseur** ϕ de $T \setminus \{\theta\}$ dans T
- des noeuds terminaux $R = T \setminus Im\phi$ et des **positions** $P = T \setminus R$.
- une **partition** $\{P_i, i \in N\}$ de P.

Description d'un jeu à information parfaite

Le jeu est décrit par un arbre orienté fini sans cycle avec :

- une **origine** θ
- un ensemble de **noeuds** T
- une application **prédecesseur** ϕ de $T \setminus \{\theta\}$ dans T
- des noeuds terminaux $R = T \setminus Im\phi$ et des **positions** $P = T \setminus R$.
- une **partition** $\{P_i, i \in N\}$ de P.
- A toute position p est associé une **histoire** précédant p (la suite des prédecesseurs itérés) et un **sous-jeu** suivant p.

Description d'un jeu à information parfaite

Le jeu est décrit par un arbre orienté fini sans cycle avec :

- une **origine** θ
- un ensemble de **noeuds** T
- une application **prédecesseur** ϕ de $T \setminus \{\theta\}$ dans T
- des noeuds terminaux $R = T \setminus Im\phi$ et des **positions** $P = T \setminus R$.
- une **partition** $\{P_i, i \in N\}$ de P.
- A toute position p est associé une **histoire** précédant p (la suite des prédecesseurs itérés) et un **sous-jeu** suivant p.
- On note $S(p)$ les successeurs de p : l'ensemble des noeuds dont p est un prédécesseur.

Déroulement de la partie

Déroulement de la partie

- Soit $\theta \in P_i$.

Déroulement de la partie

- Soit $\theta \in P_i$.
- Le joueur i choisit un successeur p_1 de θ.

Déroulement de la partie

- Soit $\theta \in P_i$.
- Le joueur i choisit un successeur p_1 de θ.
- Inductivement, $p_t \in P_j$ et le joueur j choisit un successeur de p_t.

Déroulement de la partie

- Soit $\theta \in P_i$.
- Le joueur i choisit un successeur p_1 de θ.
- Inductivement, $p_t \in P_j$ et le joueur j choisit un successeur de p_t.
- Le résultat est l'élément de R atteint par cette procédure, il correspond à une partie.

Déroulement de la partie

- Soit $\theta \in P_i$.
- Le joueur i choisit un successeur p_1 de θ.
- Inductivement, $p_t \in P_j$ et le joueur j choisit un successeur de p_t.
- Le résultat est l'élément de R atteint par cette procédure, il correspond à une partie.
- Une stratégie σ^i du joueur i est définie sur P_i et associe à p un successeur $q \in S(p)$.

Déroulement de la partie

- Soit $\theta \in P_i$.
- Le joueur i choisit un successeur p_1 de θ.
- Inductivement, $p_t \in P_j$ et le joueur j choisit un successeur de p_t.
- Le résultat est l'élément de R atteint par cette procédure, il correspond à une partie.
- Une stratégie σ^i du joueur i est définie sur P_i et associe à p un successeur $q \in S(p)$.
- Un profil de stratégies $\sigma = \{\sigma^i, i \in N\}$ spécifie une partie, donc un résultat.

Déroulement de la partie

- Soit $\theta \in P_i$.
- Le joueur i choisit un successeur p_1 de θ.
- Inductivement, $p_t \in P_j$ et le joueur j choisit un successeur de p_t.
- Le résultat est l'élément de R atteint par cette procédure, il correspond à une partie.
- Une stratégie σ^i du joueur i est définie sur P_i et associe à p un successeur $q \in S(p)$.
- Un profil de stratégies $\sigma = \{\sigma^i, i \in N\}$ spécifie une partie, donc un résultat.
- Cette application $\sigma \to R$ est la **réduction sous forme normale**.

Jeux déterminés

- On considère le cas à 2 joueurs avec une partition $R_1 \cup R_2$ de R.

Jeux déterminés

- On considère le cas à 2 joueurs avec une partition $R_1 \cup R_2$ de R.
- Le joueur i a une stratégie gagnante si il peut forcer un résultat dans R_i.

Jeux déterminés

- On considère le cas à 2 joueurs avec une partition $R_1 \cup R_2$ de R.
- Le joueur i a une stratégie gagnante si il peut forcer un résultat dans R_i.
- Le jeu est dit détérminé si un des joueurs admet une stratégie gagnante.

Jeux déterminés

- On considère le cas à 2 joueurs avec une partition $R_1 \cup R_2$ de R.
- Le joueur i a une stratégie gagnante si il peut forcer un résultat dans R_i.
- Le jeu est dit détérminé si un des joueurs admet une stratégie gagnante.

Theorem (Zermelo)

Tout jeu fini à information parfaite est déterminé.

Jeux déterminés

- On considère le cas à 2 joueurs avec une partition $R_1 \cup R_2$ de R.
- Le joueur i a une stratégie gagnante si il peut forcer un résultat dans R_i.
- Le jeu est dit détérminé si un des joueurs admet une stratégie gagnante.

Theorem (Zermelo)

Tout jeu fini à information parfaite est déterminé.

Preuve par induction (amont et aval) sur la longueur n de l'arbre.

Extensions

- Jeux à somme nulle.

Extensions

- Jeux à somme nulle.
- Joueur hasard.

Extensions

- Jeux à somme nulle.
- Joueur hasard.
- Equilibres sous-jeu parfaits (jeux à comme non-nulle).

Extensions

- Jeux à somme nulle.
- Joueur hasard.
- Equilibres sous-jeu parfaits (jeux à comme non-nulle).
- Jeux infinis à information parfaite : Gale-Stewart, Martin.

Contents

1. Jeux à information parfaite
2. Jeux sous forme extensive : le modèle générale
3. Mémoire parfaite

Ensembles d'information

- Dans plusieurs situations, quand un joueur est amené à prendre une décision, il ne connaît pas avec exactitude la position du jeu.

Ensembles d'information

- Dans plusieurs situations, quand un joueur est amené à prendre une décision, il ne connaît pas avec exactitude la position du jeu.
- Les raisons sont multiples : le joueur ne connait pas l'état de la nature, il n'observe pas le coup de l'adversaire, il n'observe pas quelque chose que l'adversaire a observé, les décisions se font simultanément, etc

Ensembles d'information

- Dans plusieurs situations, quand un joueur est amené à prendre une décision, il ne connaît pas avec exactitude la position du jeu.
- Les raisons sont multiples : le joueur ne connait pas l'état de la nature, il n'observe pas le coup de l'adversaire, il n'observe pas quelque chose que l'adversaire a observé, les décisions se font simultanément, etc
- On doit donc préciser en plus dans la description d'un jeu, pour chaque joueur i, que i ne distingue pas entre certains noeuds... Dans une figure, de tels noeuds sont encerclés à l'aide d'une courbe.

Ensembles d'information

- Dans plusieurs situations, quand un joueur est amené à prendre une décision, il ne connaît pas avec exactitude la position du jeu.
- Les raisons sont multiples : le joueur ne connait pas l'état de la nature, il n'observe pas le coup de l'adversaire, il n'observe pas quelque chose que l'adversaire a observé, les décisions se font simultanément, etc
- On doit donc préciser en plus dans la description d'un jeu, pour chaque joueur i, que i ne distingue pas entre certains noeuds... Dans une figure, de tels noeuds sont encerclés à l'aide d'une courbe.
- Exemple au tableau : un jeu de pocker simplifié.

le jeu

$\Gamma = (N, X, f, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{C}, p, u)$ *où :*

le jeu

$\Gamma = (N, X, f, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{C}, p, u)$ *où :*

1. $N = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble *des joueurs*

le jeu

$$\Gamma = (N, X, f, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{C}, p, u) \text{ où :}$$

1. $N = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble *des joueurs*
2. X les *noeuds* de décision

le jeu

$$\Gamma = (N, X, f, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{C}, p, u) \text{ où :}$$

1. $N = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble *des joueurs*
2. X les *noeuds* de décision
3. $x_0 \in X$ le *début*

le jeu

$$\Gamma = (N, X, f, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{C}, p, u) \text{ où :}$$

1. $N = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble *des joueurs*
2. X les *noeuds* de décision
3. $x_0 \in X$ le *début*
4. $f : X \setminus \{x_0\} \to X$ la fonction de *prédécesseur*.

le jeu

$\Gamma = (N, X, f, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{C}, p, u)$ *où :*

1. $N = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble *des joueurs*
2. X les *noeuds* de décision
3. $x_0 \in X$ le *début*
4. $f : X \setminus \{x_0\} \to X$ la fonction de *prédécesseur*.
5. $x = f(x')$ le noeud x *précède* x'

le jeu

$\Gamma = (N, X, f, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{C}, p, u)$ *où :*

1. $N = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble *des joueurs*
2. X les *noeuds* de décision
3. $x_0 \in X$ le *début*
4. $f : X \setminus \{x_0\} \to X$ la fonction de *prédécesseur*.
5. $x = f(x')$ le noeud x *précède* x'
6. $T \subset X$ les noeuds *terminaux ou parties*

le jeu

$\Gamma = (N, X, f, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{C}, p, u)$ *où :*

1. $N = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble *des joueurs*
2. X les *noeuds* de décision
3. $x_0 \in X$ le *début*
4. $f : X \setminus \{x_0\} \to X$ la fonction de *prédécesseur*.
5. $x = f(x')$ le noeud x *précède* x'
6. $T \subset X$ les noeuds *terminaux ou parties*
7. $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, ..., P_n\}$ *la partition des joueurs* sur les noeuds non-terminaux. L'indice 0 représente les noeuds où la nature joue.

le jeu

1. $\mathcal{I} = \cup_{i \in N} \mathcal{I}_i$, où chaque $\mathcal{I}_i$ est une *partition d'information* de $P_i \subset X$ en *ensembles d'informations* $I \in \mathcal{I}_i$.

le jeu

1. $\mathcal{I} = \cup_{i \in N} \mathcal{I}_i$, où chaque $\mathcal{I}_i$ est une *partition d'information* de $P_i \subset X$ en *ensembles d'informations* $I \in \mathcal{I}_i$.
2. $\mathcal{C} = \{C_I : I \in \mathcal{I}\}$, où chaque C_I est l'ensemble de *choix ou actions disponibles* à l'ensemble d'information I.

le jeu

1. $\mathcal{I} = \cup_{i \in N} \mathcal{I}_i$, où chaque $\mathcal{I}_i$ est une *partition d'information* de $P_i \subset X$ en *ensembles d'informations* $I \in \mathcal{I}_i$.
2. $\mathcal{C} = \{C_I : I \in \mathcal{I}\}$, où chaque C_I est l'ensemble de *choix ou actions disponibles* à l'ensemble d'information I.
3. $\{C_0(p_0) : p_0 \in P_0\}$ l'ensemble des *choix de la nature* à p_0.

le jeu

1. $\mathcal{I} = \cup_{i \in N} \mathcal{I}_i$, où chaque $\mathcal{I}_i$ est une *partition d'information* de $P_i \subset X$ en *ensembles d'informations* $I \in \mathcal{I}_i$.
2. $\mathcal{C} = \{C_I : I \in \mathcal{I}\}$, où chaque C_I est l'ensemble de *choix ou actions disponibles* à l'ensemble d'information I.
3. $\{C_0(p_0) : p_0 \in P_0\}$ l'ensemble des *choix de la nature* à p_0.
4. $p : P_0 \to \Delta(C_0(p_0))$ les probabilités avec lequelles la "nature" sélectionne un choix.

le jeu

1. $\mathcal{I} = \cup_{i \in N} \mathcal{I}_i$, où chaque $\mathcal{I}_i$ est une *partition d'information* de $P_i \subset X$ en *ensembles d'informations* $I \in \mathcal{I}_i$.
2. $\mathcal{C} = \{C_I : I \in \mathcal{I}\}$, où chaque C_I est l'ensemble de *choix ou actions disponibles* à l'ensemble d'information I.
3. $\{C_0(p_0) : p_0 \in P_0\}$ l'ensemble des *choix de la nature* à p_0.
4. $p : P_0 \to \Delta(C_0(p_0))$ les probabilités avec lequelles la "nature" sélectionne un choix.
5. $u^i : T \to \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité vonNeumann-Morgernstern du joueur i.

la forme stratégique ou normale

- Une stratégie pure $s_i \in S_i$ spécifie exactement un choix à chaque ensemble d'information du joueur en question
- Soit un profile de stratégies pures $s = (s_1, ..., s_n) \in S = \times S_i$

la forme stratégique ou normale

- Une stratégie pure $s_i \in S_i$ spécifie exactement un choix à chaque ensemble d'information du joueur en question
- Soit un profile de stratégies pures $s = (s_1, ..., s_n) \in S = \times S_i$
- S induit une distribution de probabilité sur les parties du jeu (noeuds terminaux) $\tau \in T : \rho(\tau, s)$

la forme stratégique ou normale

- Une stratégie pure $s_i \in S_i$ spécifie exactement un choix à chaque ensemble d'information du joueur en question
- Soit un profile de stratégies pures $s = (s_1, ..., s_n) \in S = \times S_i$
- S induit une distribution de probabilité sur les parties du jeu (noeuds terminaux) $\tau \in T$: $\rho(\tau, s)$
- Le paiement espéré du joueur i est $g^i : S \to \mathbb{R}$

$$g^i(s) = \sum_{\tau \in T} \rho(\tau, s) u_i(\tau)$$

la forme stratégique ou normale

- Une stratégie pure $s_i \in S_i$ spécifie exactement un choix à chaque ensemble d'information du joueur en question
- Soit un profile de stratégies pures $s = (s_1, ..., s_n) \in S = \times S_i$
- S induit une distribution de probabilité sur les parties du jeu (noeuds terminaux) $\tau \in T$: $\rho(\tau, s)$
- Le paiement espéré du joueur i est $g^i : S \to \mathbb{R}$

$$g^i(s) = \sum_{\tau \in T} \rho(\tau, s)\, u_i(\tau)$$

- Souvent, beaucoup de stratégies dans la forme normale sont inutiles : en identifiant les stratégies équivalentes on obtient la forme normale réduite.

Transformations élémentaires

- Plusieurs jeux sous forme extensives ont la même forme normale réduite. On dit que ces deux jeux sont stratégiquement équivalents.

Transformations élémentaires

- Plusieurs jeux sous forme extensives ont la même forme normale réduite. On dit que ces deux jeux sont stratégiquement équivalents.
- **Théorème (Thompson) :** *Deux jeux Γ_1 et Γ_2 sont sont stratégiquement équivalents si et seulement si on peut passer de l'un à un autre à l'aide des quatre transformations élémentaires simples.*

Transformations élémentaires

- Plusieurs jeux sous forme extensives ont la même forme normale réduite. On dit que ces deux jeux sont stratégiquement équivalents.
- **Théorème (Thompson) :** *Deux jeux Γ_1 et Γ_2 sont sont stratégiquement équivalents si et seulement si on peut passer de l'un à un autre à l'aide des quatre transformations élémentaires simples.*
- Une partie des théoriciens des jeux pensent que la solution d'un jeu doit dépendre seulement des aspects stratégique (i.e. de la forme normale) et pas d'une description arbitraire du déroulement qui contient de l'information inutile. Selten et d'autres d'éfendent le point de vue inverse.

Stratégie

Stratégie

- Pure : une application des ensembles d'information dans une classe d'équivalence de successeurs.

Stratégie

- Pure : une application des ensembles d'information dans une classe d'équivalence de successeurs.
- Mixte : une probabilité sur l'ensemble des stratégies pures.

Stratégie

- Pure : une application des ensembles d'information dans une classe d'équivalence de successeurs.
- Mixte : une probabilité sur l'ensemble des stratégies pures.
- Comportementale : une application des ensembles d'information dans les probabilités sur les classes d'équivalence de successeurs.

Stratégie

- Pure : une application des ensembles d'information dans une classe d'équivalence de successeurs.
- Mixte : une probabilité sur l'ensemble des stratégies pures.
- Comportementale : une application des ensembles d'information dans les probabilités sur les classes d'équivalence de successeurs.
- Générale : une probabilité sur l'ensemble des stratégies comportementales.

Stratégie

- Pure : une application des ensembles d'information dans une classe d'équivalence de successeurs.
- Mixte : une probabilité sur l'ensemble des stratégies pures.
- Comportementale : une application des ensembles d'information dans les probabilités sur les classes d'équivalence de successeurs.
- Générale : une probabilité sur l'ensemble des stratégies comportementales.
- Un profil de stratégies induit une probabilité sur les parties donc sur R : réduction sous forme normale.

Stratégie

- Pure : une application des ensembles d'information dans une classe d'équivalence de successeurs.
- Mixte : une probabilité sur l'ensemble des stratégies pures.
- Comportementale : une application des ensembles d'information dans les probabilités sur les classes d'équivalence de successeurs.
- Générale : une probabilité sur l'ensemble des stratégies comportementales.
- Un profil de stratégies induit une probabilité sur les parties donc sur R : réduction sous forme normale.
- Questions : est ce que c'est équivalent de jouer en mixte et en comportement ?

Stratégie

- Pure : une application des ensembles d'information dans une classe d'équivalence de successeurs.
- Mixte : une probabilité sur l'ensemble des stratégies pures.
- Comportementale : une application des ensembles d'information dans les probabilités sur les classes d'équivalence de successeurs.
- Générale : une probabilité sur l'ensemble des stratégies comportementales.
- Un profil de stratégies induit une probabilité sur les parties donc sur R : réduction sous forme normale.
- Questions : est ce que c'est équivalent de jouer en mixte et en comportement ?
- Exemples : amnésie, mémoire imparfaite...

Contents

1 Jeux à information parfaite

2 Jeux sous forme extensive : le modèle générale

3 Mémoire parfaite

La notion de mémoire parfaite veut dire qu'un joueur ne perd pas d'information durant le jeu. Celle-ci peut être décomposée en deux propriétés :

La notion de mémoire parfaite veut dire qu'un joueur ne perd pas d'information durant le jeu. Celle-ci peut être décomposée en deux propriétés :

- le joueur ne perd pas d'information le concernant : et se rappelle de tout ce qu'il a fait ou pas fait dans le passé.

La notion de mémoire parfaite veut dire qu'un joueur ne perd pas d'information durant le jeu. Celle-ci peut être décomposée en deux propriétés :

- le joueur ne perd pas d'information le concernant : et se rappelle de tout ce qu'il a fait ou pas fait dans le passé.
- le joueur ne perd pas d'information qu'il a su des autres ou de la nature.

La notion de mémoire parfaite veut dire qu'un joueur ne perd pas d'information durant le jeu. Celle-ci peut être décomposée en deux propriétés :

- le joueur ne perd pas d'information le concernant : et se rappelle de tout ce qu'il a fait ou pas fait dans le passé.
- le joueur ne perd pas d'information qu'il a su des autres ou de la nature.

Comment exprimer mathématiquement cette idée ?

Linéarité et mémoire parfaite

Definition

Un jeu sous forme extensive est linéaire pour le joueur i s'il n'existe aucune partie qui traverse plus d'une fois un ensemble d'information du joueur i.

Linéarité et mémoire parfaite

Definition

Un jeu sous forme extensive est linéaire pour le joueur i s'il n'existe aucune partie qui traverse plus d'une fois un ensemble d'information du joueur i.

Definition

Un jeu sous forme extensive est à mémoire parfaite pour le joueur i si est seulement si pour tout couple (x, y) dans un même ensemble d'information P_i^k, si x' est un prédécesseur de x appartenant à l'ensemble d'information $P_i^{k'}$ avec $P_i^{k'} \neq P_i^k$ alors :

Linéarité et mémoire parfaite

Definition

Un jeu sous forme extensive est linéaire pour le joueur i s'il n'existe aucune partie qui traverse plus d'une fois un ensemble d'information du joueur i.

Definition

Un jeu sous forme extensive est à mémoire parfaite pour le joueur i si est seulement si pour tout couple (x, y) dans un même ensemble d'information P_i^k, si x' est un prédécesseur de x appartenant à l'ensemble d'information $P_i^{k'}$ avec $P_i^{k'} \neq P_i^k$ alors :

- il existe y' un prédécesseur de y tel que $y' \in P_i^{k'}$.

Linéarité et mémoire parfaite

Definition

Un jeu sous forme extensive est linéaire pour le joueur i s'il n'existe aucune partie qui traverse plus d'une fois un ensemble d'information du joueur i.

Definition

Un jeu sous forme extensive est à mémoire parfaite pour le joueur i si est seulement si pour tout couple (x, y) dans un même ensemble d'information P_i^k, si x' est un prédécesseur de x appartenant à l'ensemble d'information $P_i^{k'}$ avec $P_i^{k'} \neq P_i^k$ alors :

- il existe y' un prédécesseur de y tel que $y' \in P_i^{k'}$.
- l'action qui mène de x' à x est dans la même classe d'équivalence que celle qui mène de y' à y.

La mémoire parfaite implique la linéarité.

Theorem (Kuhn, 1953)

Si le jeu est linéaire pour le joueur i, pour toute stratégie de comportement μ^i il existe une stratégie mixte σ^i telle que pour tout profil θ^{-i} des autres joueurs, les distributions induites $\mathsf{P}(\mu^i, \theta^{-i})$ et $\mathsf{P}(\sigma^i, \theta^{-i})$ coincident sur les noeuds terminaux T.

La mémoire parfaite implique la linéarité.

Theorem (Kuhn, 1953)

Si le jeu est linéaire pour le joueur i, pour toute stratégie de comportement μ^i il existe une stratégie mixte σ^i telle que pour tout profil θ^{-i} des autres joueurs, les distributions induites $\mathbf{P}(\mu^i, \theta^{-i})$ *et* $\mathbf{P}(\sigma^i, \theta^{-i})$ *coincident sur les noeuds terminaux T.*
Si le jeu est à mémoire parfaite, pour tout joueur i et toute stratégie mixte σ^i il existe une stratégie de comportement μ^i telle que pour tout profil θ^{-i} des autres joueurs, les distributions induites $\mathbf{P}(\mu^i, \theta^{-i})$ *et* $\mathbf{P}(\sigma^i, \theta^{-i})$ *coincident sur T.*

La mémoire parfaite implique la linéarité.

Theorem (Kuhn, 1953)

Si le jeu est linéaire pour le joueur i, pour toute stratégie de comportement μ^i il existe une stratégie mixte σ^i telle que pour tout profil θ^{-i} des autres joueurs, les distributions induites $\mathsf{P}(\mu^i, \theta^{-i})$ et $\mathsf{P}(\sigma^i, \theta^{-i})$ coincident sur les noeuds terminaux T.
Si le jeu est à mémoire parfaite, pour tout joueur i et toute stratégie mixte σ^i il existe une stratégie de comportement μ^i telle que pour tout profil θ^{-i} des autres joueurs, les distributions induites $\mathsf{P}(\mu^i, \theta^{-i})$ et $\mathsf{P}(\sigma^i, \theta^{-i})$ coincident sur T.

Corollary

Tout jeu fini, sous forme extensive et à mémoire parfaite admet un équilibre de Nash en stratégies de comportement.