Théorie des Jeux

Rida Laraki

Ecole d'été Peyresq
Séance 3: Jeux à somme NON nulle

Notations générales

- $G = (N, (S^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$: jeu sous forme stratégique.

Notations générales

- $G = (N, (S^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$: jeu sous forme stratégique.
- N : ensemble des joueurs.

Notations générales

- $G = (N, (S^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$: jeu sous forme stratégique.
- N : ensemble des joueurs.
- S^i : stratégies pures du joueur i.

Notations générales

- $G = (N, (S^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$: jeu sous forme stratégique.
- N : ensemble des joueurs.
- S^i : stratégies pures du joueur i.
- $g^i : S = \prod_{j \in N} S^j \to \mathbb{R}$. : fonction de gain du joueur i.

Notations générales

- $G = (N, (S^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$: jeu sous forme stratégique.
- N : ensemble des joueurs.
- S^i : stratégies pures du joueur i.
- $g^i : S = \prod_{j \in N} S^j \to \mathbb{R}.$: fonction de gain du joueur i.
- Jeu fini si N fini et S^i fini $\forall i$.

Stratégie mixtes, stratégies corrélés

- $\Delta(S^i) = \{$ stratégies mixtes du joueur i $\}$: σ^i, τ^i.

Stratégie mixtes, stratégies corrélés

- $\Delta(S^i) = \{$ stratégies mixtes du joueur i $\}$: σ^i, τ^i.
- $\sigma^i(s^i)$: proba de s^i sous σ^i.

Stratégie mixtes, stratégies corrélés

- $\Delta(S^i) = \{$ stratégies mixtes du joueur i $\}$: σ^i, τ^i.
- $\sigma^i(s^i)$: proba de s^i sous σ^i.
- $Supp(\sigma^i) = \{s^i \in S^i | \sigma^i(s^i) > 0\}$: support de σ^i

Stratégie mixtes, stratégies corrélés

- $\Delta(S^i) = \{$ stratégies mixtes du joueur i $\}$: σ^i, τ^i.
- $\sigma^i(s^i)$: proba de s^i sous σ^i.
- $Supp(\sigma^i) = \{s^i \in S^i | \sigma^i(s^i) > 0\}$: support de σ^i
- $\prod_i \Delta(S^i) = \{$ profils de stratégies mixtes $\}$

Stratégie mixtes, stratégies corrélés

- $\Delta(S^i) = \{$ stratégies mixtes du joueur i $\}$: σ^i, τ^i.
- $\sigma^i(s^i)$: proba de s^i sous σ^i.
- $Supp(\sigma^i) = \{s^i \in S^i | \sigma^i(s^i) > 0\}$: support de σ^i
- $\prod_i \Delta(S^i) = \{$ profils de stratégies mixtes $\}$
- $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^n)$, $\tau = (\tau^1, ..., \tau^n)$

Stratégie mixtes, stratégies corrélés

- $\Delta(S^i) = \{$ stratégies mixtes du joueur i $\}$: σ^i, τ^i.
- $\sigma^i(s^i)$: proba de s^i sous σ^i.
- $Supp(\sigma^i) = \{s^i \in S^i | \sigma^i(s^i) > 0\}$: support de σ^i
- $\prod_i \Delta(S^i) = \{$ profils de stratégies mixtes $\}$
- $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^n)$, $\tau = (\tau^1, ..., \tau^n)$
- $\Delta(S) = \{$ stratégies corrélés des joueurs $\}$

Stratégie mixtes, stratégies corrélés

- $\Delta(S^i) = \{$ stratégies mixtes du joueur i $\}$: σ^i, τ^i.
- $\sigma^i(s^i)$: proba de s^i sous σ^i.
- $Supp(\sigma^i) = \{s^i \in S^i | \sigma^i(s^i) > 0\}$: support de σ^i
- $\prod_i \Delta(S^i) = \{$ profils de stratégies mixtes $\}$
- $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^n)$, $\tau = (\tau^1, ..., \tau^n)$
- $\Delta(S) = \{$ stratégies corrélés des joueurs $\}$
- $\Delta(S^{-i}) = \{$ stratégies corrélés des joueurs $\neq i$ $\}$

Extension mixte du paiement

- Etant donné un profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma^i)_{i \in N}$, le *paiement espéré* du joueur i est :

$$g^i(\sigma) = \sum_{s \in S} (\prod_{i \in N} \sigma^i(s^i)) g^i(s)$$

Extension mixte du paiement

- Etant donné un profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma^i)_{i\in N}$, le *paiement espéré* du joueur i est :

$$g^i(\sigma) = \sum_{s\in S} (\prod_{i\in N} \sigma^i(s^i)) g^i(s)$$

- Ceci définit une extension de l'application g^i de $\prod_{i\in N} S^i$ à $\prod_{i\in N} \Delta(S^i)$ que l'on note encore g^i : on l'appelle l'extension multilinéaire ou mixte de g^i.

Meilleures réponses

Soient $\sigma^i \in \Delta(S^i)$ et $\theta^{-i} \in \Delta(S^{-i})$

σ^i est meilleure réponse en mixtes à θ^{-i} si

$$g^i(\sigma^i, \theta^{-i}) \geq g^i(\tau^i, \theta^{-i}) \quad \forall \tau^i \in \Delta(S^i)$$

$BR(\theta^{-i})$: ensemble des meilleures réponses en mixtes à θ^{-i}.

Propriétés

1. $\sigma^i \in BR(\theta^{-i}) \Leftrightarrow g^i(\sigma^i, \theta^{-i}) \geq g^i(s^i, \theta^{-i}) \forall s^i \in S^i$

Propriétés

1. $\sigma^i \in BR(\theta^{-i}) \Leftrightarrow g^i(\sigma^i, \theta^{-i}) \geq g^i(s^i, \theta^{-i}) \forall s^i \in S^i$
2. $\max_{\sigma^i \in \Delta(S^i)} g^i(\sigma^i, \theta^{-i}) = \max_{s^i \in S^i} g^i(s^i, \theta^{-i})$

Propriétés

1. $\sigma^i \in BR(\theta^{-i}) \Leftrightarrow g^i(\sigma^i, \theta^{-i}) \geq g^i(s^i, \theta^{-i}) \forall s^i \in S^i$
2. $\max_{\sigma^i \in \Delta(S^i)} g^i(\sigma^i, \theta^{-i}) = \max_{s^i \in S^i} g^i(s^i, \theta^{-i})$
3. $\sigma^i \in BR(\theta^{-i}) \Leftrightarrow \left(\forall s^i \in S^i, \sigma^i(s^i) > 0 \Rightarrow s^i \in BR(\theta^{-i})\right).$

Propriétés

1. $\sigma^i \in BR(\theta^{-i}) \Leftrightarrow g^i(\sigma^i, \theta^{-i}) \geq g^i(s^i, \theta^{-i}) \forall s^i \in S^i$
2. $\max_{\sigma^i \in \Delta(S^i)} g^i(\sigma^i, \theta^{-i}) = \max_{s^i \in S^i} g^i(s^i, \theta^{-i})$
3. $\sigma^i \in BR(\theta^{-i}) \Leftrightarrow \left(\forall s^i \in S^i, \sigma^i(s^i) > 0 \Rightarrow s^i \in BR(\theta^{-i})\right).$

Paiement de meilleure réponse : le paiement obtenu par n'importe quelle meilleure réponse.

Si $\sigma^i \in BR(\theta^{-i})$, alors toutes les stratégies dans le support de σ^i ont le même paiement contre θ^{-i}.

Equilibre de Nash

Equilibre de Nash mixte : profil de stratégies mixtes $\sigma \in \prod_i \Delta(S^i)$ où aucun joueur n'a intérêt à dévier de manière unilatérale :

$$\forall i \in N, \sigma^i \in BR(\sigma^{-i})$$

Equilibre de Nash pur : profil de stratégies pures qui est un équilibre

Exemples

1, -1	-1, 1
-1, 1	1, -1

3, 3	-1, 4
4, -1	0, 0

3, 2	1, 1
0, 0	2, 3

Exemples

1, -1	-1, 1
-1, 1	1, -1

3, 3	-1, 4
4, -1	0, 0

3, 2	1, 1
0, 0	2, 3

1. Matching-Pennies : pas d'équilibres purs, un mixte

Exemples

1, -1	-1, 1
-1, 1	1, -1

3, 3	-1, 4
4, -1	0, 0

3, 2	1, 1
0, 0	2, 3

1. Matching-Pennies : pas d'équilibres purs, un mixte
2. Dilemme du prisonnier : un équilibre pur, pas d'autres

Exemples

1, -1	-1, 1
-1, 1	1, -1

3, 3	-1, 4
4, -1	0, 0

3, 2	1, 1
0, 0	2, 3

1. Matching-Pennies : pas d'équilibres purs, un mixte
2. Dilemme du prisonnier : un équilibre pur, pas d'autres
3. Bataille des sexes : trois équilibres mixtes, dont deux purs

Théorème d'existence (Nash)

Theorem (Nash 1950)

Tout jeu fini a un équilibre en stratégies mixtes.

Preuve 1 : on définit une fonction f telle que :
- f a un point fixe (par le théorème de Brouwer)
- tout point fixe de f est un équilibre mixte.

Preuve 2 : on définit une correspondance C telle que :
- C a un point fixe (par le théorème de Kakutani)
- tout point fixe de C est un équilibre mixte.

Lemme de Sperner

- Soit Δ un simplexe de dimension k et de sommets $\{x^0, ..., x^k\}$.
- Considérons une subdivision simpliciale. Le mesh de la subdivision est le diamètre du sous-simplexe le plus large.

Lemme de Sperner

- Soit Δ un simplexe de dimension k et de sommets $\{x^0, ..., x^k\}$.
- Considérons une subdivision simpliciale. Le mesh de la subdivision est le diamètre du sous-simplexe le plus large.
- Soit V l'ensemble des sommets de la subdivision. v dans V peut être décomposé : $v = \sum_{i=0}^{k} \alpha^i(v) x^i$. Soit $I(v) = \{i : \alpha^i(v) > 0\} \subset \{0, ..., k\}$

Lemme de Sperner

- Soit Δ un simplexe de dimension k et de sommets $\{x^0, ..., x^k\}$.
- Considérons une subdivision simpliciale. Le mesh de la subdivision est le diamètre du sous-simplexe le plus large.
- Soit V l'ensemble des sommets de la subdivision. v dans V peut être décomposé : $v = \sum_{i=0}^{k} \alpha^i(v) x^i$. Soit $I(v) = \{i : \alpha^i(v) > 0\} \subset \{0, ..., k\}$
- Un coloriage de V est une fonction λ qui associe à chaque v dans V un entier dans $I(v)$.

Lemme de Sperner

- Soit Δ un simplexe de dimension k et de sommets $\{x^0, ..., x^k\}$.
- Considérons une subdivision simpliciale. Le mesh de la subdivision est le diamètre du sous-simplexe le plus large.
- Soit V l'ensemble des sommets de la subdivision. v dans V peut être décomposé : $v = \sum_{i=0}^{k} \alpha^i(v) x^i$. Soit $I(v) = \{i : \alpha^i(v) > 0\} \subset \{0, ..., k\}$
- Un coloriage de V est une fonction λ qui associe à chaque v dans V un entier dans $I(v)$.
- Un sous-simplexe W supporté dans V est complétement coloré si $\lambda(W) = \{0, ..., k\}$ (toutes les couleurs sont utilisées dans les sommets de W).

- Soit Δ un simplexe de dimension k et de sommets $\{x^0, ..., x^k\}$.
- Considérons une subdivision simpliciale. Le mesh de la subdivision est le diamètre du sous-simplexe le plus large.
- Soit V l'ensemble des sommets de la subdivision. v dans V peut être décomposé : $v = \sum_{i=0}^{k} \alpha^i(v) x^i$. Soit $I(v) = \{i : \alpha^i(v) > 0\} \subset \{0, ..., k\}$
- Un coloriage de V est une fonction λ qui associe à chaque v dans V un entier dans $I(v)$.
- Un sous-simplexe W supporté dans V est complétement coloré si $\lambda(W) = \{0, ..., k\}$ (toutes les couleurs sont utilisées dans les sommets de W).

Lemma (Sperner, 1928)

Pour toute subdivision et coloriage de Δ, Il existe un nombre impaire de sous-simplexes complètement colorés.

Lemme de Sperner

- Soit Δ un simplexe de dimension k et de sommets $\{x^0, ..., x^k\}$.
- Considérons une subdivision simpliciale. Le mesh de la subdivision est le diamètre du sous-simplexe le plus large.
- Soit V l'ensemble des sommets de la subdivision. v dans V peut être décomposé : $v = \sum_{i=0}^{k} \alpha^i(v) x^i$. Soit $I(v) = \{i : \alpha^i(v) > 0\} \subset \{0, ..., k\}$
- Un coloriage de V est une fonction λ qui associe à chaque v dans V un entier dans $I(v)$.
- Un sous-simplexe W supporté dans V est complétement coloré si $\lambda(W) = \{0, ..., k\}$ (toutes les couleurs sont utilisées dans les sommets de W).

Lemma (Sperner, 1928)

Pour toute subdivision et coloriage de Δ, Il existe un nombre impaire de sous-simplexes complètement colorés.

Corollary (Brouwer pour les simplexes)

Toute fonction continue $f : \Delta \to \Delta$ *admet un point fixe.*

Corollary (Brouwer pour les simplexes)

Toute fonction continue $f : \Delta \to \Delta$ admet un point fixe.

Démonstration.

Considérons une subdivison simpliciale de Δ de mesh $\epsilon > 0$.

Soit λ un coloriage de V qui satisfait :

$$\lambda(v) \in I(v) \cap \{i : f^i(v) \leq v^i\}.$$

Corollary (Brouwer pour les simplexes)

Toute fonction continue $f : \Delta \to \Delta$ admet un point fixe.

Démonstration.

Considérons une subdivison simpliciale de Δ de mesh $\epsilon > 0$.
Soit λ un coloriage de V qui satisfait :

$$\lambda(v) \in I(v) \cap \{i : f^i(v) \leq v^i\}.$$

L'intersection est non-vide, sinon $1 = \sum_{i=0}^k f^i(v) > \sum_{i=0}^k v^i = 1$.

Corollary (Brouwer pour les simplexes)

Toute fonction continue $f : \Delta \to \Delta$ admet un point fixe.

Démonstration.

Considérons une subdivison simpliciale de Δ de mesh $\epsilon > 0$.
Soit λ un coloriage de V qui satisfait :

$$\lambda(v) \in I(v) \cap \{i : f^i(v) \leq v^i\}.$$

L'intersection est non-vide, sinon $1 = \sum_{i=0}^{k} f^i(v) > \sum_{i=0}^{k} v^i = 1$.
Sperner implique qu'il existe un simplexe complétement coloré.

Brouwer

Corollary (Brouwer pour les simplexes)

Toute fonction continue $f : \Delta \to \Delta$ admet un point fixe.

Démonstration.

Considérons une subdivison simpliciale de Δ de mesh $\epsilon > 0$.
Soit λ un coloriage de V qui satisfait :

$$\lambda(v) \in I(v) \cap \{i : f^i(v) \leq v^i\}.$$

L'intersection est non-vide, sinon $1 = \sum_{i=0}^k f^i(v) > \sum_{i=0}^k v^i = 1$.
Sperner implique qu'il existe un simplexe complétement coloré. En tendant ϵ vers zéro et en utilisant la compacité on déduit l'existence d'un point v tel que pour tout i, $f^i(v) \leq v^i$. Donc $f(v) = v$. $\square$

Point fixe

Corollary

(Théorème de Brouwer) Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^k$ et $f : C \to C$ continue, alors f admet un point fixe : il existe $c \in C$ tel que $c = f(c)$.

Corollary

(Théorème de Brouwer) Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^k$ et $f : C \to C$ continue, alors f admet un point fixe : il existe $c \in C$ tel que $c = f(c)$.

Corollary

(Kakutani-Glicksberg) Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^k$ et F une correspondance de C dans C telle que, (i) $\forall c \in C$, $F(c)$ est un convexe compact non-vide et (ii) le graphe de F, soit $\{(c, d) \in C \times C : c \in F(d)\}$, est fermé. Alors, il existe $c \in C$ tel que $c \in F(c)$.

On déduit de ce résultat l'existence d'équilibres (Glicksberg, 1952, généralisant Nash, 1950).

Theorem

Soit $G = (N, (S^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu tel que : pour tout $i \in N$, S^i est un convexe compact non-vide de dimension fini, $g^i : S \to \mathbb{R}$ est continue et pour tout $s^{-i} \in S^{-i}$, l'application partielle $s^i \mapsto g^i(s^i, s^{-i})$ est quasi-concave.
Alors, l'ensemble des équilibres de Nash de G est compact et non-vide.