Théorie des Jeux

Rida Laraki

Ecole d'été Peyresq
Séance 2: Jeux à somme nulle

Généralités

Jeu à somme nulle : 2 joueurs, intérêts diamétralement opposé.

Definition

Un jeu à somme nulle est un triplet (I, J, g) avec I et J non vides et $g : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$.

Interprétation :

- J1 choisit $i \in I$, J2 choisit $j \in J$,
- paiement $g^1(i,j) = g(i,j)$, $g_2 = -g_1 = -g$.
- J1 maximise g, J2 minimise.

- Jeu à somme nulle fini = I et J finis
- représenté par $A = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ telle que $a_{ij} = g(i,j)\ \forall i, j$.
- J1 choisit la ligne i, J2 la colonne j.

Exemple (Matching Pennies) :

1	-1
-1	1

Vocab : jeu matriciel = jeu à somme nulle fini.

Lien avec la représentation bimatricielle

Formulation 1 : soit le jeu à somme nulle

1	-1
-1	1

Formulation 2 : soit le jeu

1, -1	-1,1
-1,1	1,-1

Dire que le jeu est à somme nulle évite d'écrire les paiements du J2.

Garantir un paiement

Soit $w \in \bar{\mathbb{R}}$.

Definition

J1 peut garantir w si : $\exists i \in I, \forall j \in J,\ g(i,j) \geq w$.

Garantir un paiement

Soit $w \in \bar{\mathbb{R}}$.

Definition

J1 peut garantir w si : $\exists i \in I, \forall j \in J,\ g(i,j) \geq w$.

Definition

J2 peut garantir w si : $\exists j \in J, \forall i \in I,\ g(i,j) \leq w$.

Définition asymétrique car on ne s'intéresse qu'au paiement de J1

Rq : jouer i garantit $\inf_{j \in J} g(i,j)$; jouer j garantit $\sup_{i \in I} g(i,j)$.

Maxmin et minmax

Rappel : $i \in I$ garantit $\inf_{j \in J} g(i,j)$; $j \in J$ garantit $\sup_{i \in I} g(i,j)$.

- On pose : $\max\min(G) = \underline{v} = \sup_{i \in I} \inf_{j \in J} g(i,j)$
- maxmin : supremum des quantités garanties par J1.
- Paiement attendu si J1 joue avant J2

- $\min\max(G) = \overline{v} = \inf_{j \in J} \sup_{i \in I} g(i,j)$
- Paiement attendu si J2 joue avant J1

Saut de dualité et valeur

Lemma

$\underline{v} \leq \overline{v}$.

Def : $\overline{v} - \underline{v}$ est appelé *saut de dualité*.

Definition

Le jeu G a une *valeur* v si $\underline{v} = \overline{v} = v$. Notation : $v = val(G)$

Interprétation : somme équitable que J1 doit verser à J2 pour jouer le jeu.

Lemma

Si w peut être garanti à la fois par J1 et J2, alors w unique et le jeu a une valeur qui vaut w.

Lemma

Si w peut être garanti à la fois par J1 et J2, alors w unique et le jeu a une valeur qui vaut w.

Preuve : on a alors $w \leq \underline{v} \leq \overline{v} \leq w$

Exemples

1	-1
-1	1

$\underline{v} = -1 < 1 = \overline{v}$: pas de valeur.

1	2
-1	1

$\underline{v} = 1 = \overline{v}$: la valeur vaut $v = 1$.

Stratégies optimales

Supposons que le jeu a une valeur v

Definition

Une stratégie du joueur 1 est ε-optimale si elle garantit $v - \varepsilon$.

Une stratégie du joueur 2 est ε-optimale si elle garantit. $v + \varepsilon$.

Les stratégies 0-optimales sont dites optimales.

Exemple : $G = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}, g)$, où $g(i, j) = 1/(i + j + 1)$. Valeur $v = 0$.

Stratégies optimales de J1 ?

Stratégies optimales

Supposons que le jeu a une valeur v

Definition

Une stratégie du joueur 1 est ε-optimale si elle garantit $v - \varepsilon$.

Une stratégie du joueur 2 est ε-optimale si elle garantit. $v + \varepsilon$.

Les stratégies 0-optimales sont dites optimales.

Exemple : $G = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$, où $g(i,j) = 1/(i+j+1)$. Valeur $v = 0$.

Stratégies optimales de J1 ? Toutes !
Stratégies optimales de J2 ?

Stratégies optimales

Supposons que le jeu a une valeur v

Definition

Une stratégie du joueur 1 est ε-optimale si elle garantit $v - \varepsilon$.

Une stratégie du joueur 2 est ε-optimale si elle garantit. $v + \varepsilon$.

Les stratégies 0-optimales sont dites optimales.

Exemple : $G = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}, g)$, où $g(i,j) = 1/(i+j+1)$. Valeur $v = 0$.

Stratégies optimales de J1 ? Toutes !
Stratégies optimales de J2 ? Aucune !

Être imprévisible est rationnel

- Dans plusieurs situations, il est optimal pour un joueur d'être imprévisible (que les autres ne connaissent pas avec certitude ce qu'il compte faire).

Être imprévisible est rationnel

- Dans plusieurs situations, il est optimal pour un joueur d'être imprévisible (que les autres ne connaissent pas avec certitude ce qu'il compte faire).
- Par exemple : jouer à pierre-papier-ciseaux, un tire au but en football, choisir la date d'une promotion, jouer au pocker, composer l'équipe qui jouera la finale d'un évènement...

Être imprévisible est rationnel

- Dans plusieurs situations, il est optimal pour un joueur d'être imprévisible (que les autres ne connaissent pas avec certitude ce qu'il compte faire).
- Par exemple : jouer à pierre-papier-ciseaux, un tire au but en football, choisir la date d'une promotion, jouer au pocker, composer l'équipe qui jouera la finale d'un évènement...
- On est naturellement conduit à autoriser les joueurs à choisir l'action au hasard. On parle de stratégies mixtes.

- Extension mixte : les joueurs peuvent jouer des stratégies aléatoires (ex : J1 joue une distribution de proba sur I).
- Paiement : $g(x, y) = \int_I \int_J g(i, j) dx(i) dy(j)$
- Pas toujours défini !

Lemma

Si $g(x, j) \geq w \; \forall j$ *alors* $g(x, y) = \int_J g(i, j) dy(j) \geq w \; \forall y$.

Lemma

Le saut de dualité d'une extension mixte de G est inférieur au saut de dualité de G.

Corollaire : si un jeu à somme nulle a une valeur, alors toute extension mixte a la même valeur.

Extension mixte d'un jeu fini - I

Si I fini de cardinal n, on note :

$$\Delta(I) = \{x \in \mathbb{R}^n_+; \sum_i x^i = 1\}$$

Extension mixte d'un jeu fini $G = (I, J, g)$: le jeu

$$\Gamma = (\Delta(I), \Delta(J), g)$$

où

$$g(x, y) = \mathbb{E}_{x \otimes y}\, g = \sum_{i,j} x^i y^j g(i, j).$$

Extension mixte d'un jeu fini - II

- $x \in \Delta(I)$, $y \in \Delta(J)$: *stratégie mixte*
- $i \in I$, $j \in J$: *stratégie pure*
- *support* d'une stratégie mixte x : $supp(x) = \{i \in I : x^i > 0\}$.
- Si on pose $A_{ij} = g(i, j)$, qu'on écrit x en ligne, et y en colonne :

$$g(x, y) = xAy$$

Theorem

Soit A une matrice réelle $I \times J$. Il existe (x^*, y^*, v) dans $\Delta(I) \times \Delta(J) \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall y \in \Delta(J),\ \ x^*Ay \geq v \ \text{ et } \ \forall x \in \Delta(I),\ \ xAy^* \leq v.$$

I.e. l'extension mixte d'un jeu matriciel a une valeur et les joueurs y ont des stratégies optimales.

On a :

$$v = \max_{x \in \Delta(I)} \min_{y \in \Delta(J)} xAy = \min_{y \in \Delta(J)} \max_{x \in \Delta(I)} xAy.$$

Soit un jeu matriciel défini par $A \in \mathbb{R}^{I \times J}$. Soit $X(A) \in \Delta(I)$ et $Y(A) \in \Delta(J)$ les ensembles de stratégies optimales de J1 et J2

Theorem (début)

a) $X(A)$ et $Y(A)$ sont des polytopes non vides.

b) Si $x \in X(A)$, $y \in Y(A)$, $i \in \mathrm{supp}\,(x)$ et $j \in \mathrm{supp}\,(y)$, alors $iAy = v$ et $xAj = v$ (complémentarité).

Stratégies optimales - suite

Theorem (suite)

c) Il existe $(x^*, y^*) \in X(A) \times Y(A)$ *tel que :*

$\forall i \in I, \left(x^{*i} > 0 \Leftrightarrow iAy^* = v\right)$ *et* $\forall j \in J, \ \left(y^{*j} > 0 \Leftrightarrow x^*Aj = v\right)$.

(complémentarité forte)

d) $X(A) \times Y(A)$ *est l'ensemble des points-selles de* A *: éléments* (x^*, y^*) *de* $\Delta(I) \times \Delta(J)$ *tels que :*

$$x\,A\,y^* \leq \ x^*\,A\,y^* \leq \ x^*\,A\,y \qquad \forall (x, y) \in \Delta(I) \times \Delta(J).$$

Exemple 1 (Matching-Pennies)

1	-1
-1	1

Exemple 2

1	2
0	x

Exemple 3

a	b
c	d

Fictitious play : définition

Fictitious play : processus d'apprentissage qui permet de calculer la valeur et des stratégies optimales dans les jeux à somme nulle finis

- On part de (i_1, j_1) arbitraire dans $I \times J$,
- A chaque étape n on considère les fréquences empiriques $x_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} i_t$ et $y_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} j_t$.

Definition

Une suite $(i_n, j_n)_{n\geq 1}$ à est une réalisation d'un processus de fictitious play si pour tout $n \geq 1$, i_{n+1} est une meilleure réponse du joueur 1 contre y_n, et j_{n+1} est une meilleure réponse du joueur 2 contre x_n.

Fictitious play : théorème

Theorem (Robinson, 1951)

Soit $(i_n, j_n)_{n\geq 1}$ *une réalisation d'un processus de fictitious play. La distance entre* (x_n, y_n) *et l'ensemble des couples de stratégies optimales tend vers 0, quand* $n \to \infty$ *:*

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in \Delta(I), \forall y \in \Delta(J),$

$$x_n A y \geq val(A) - \varepsilon \text{ et } \; x A y_n \leq val(A) + \varepsilon.$$

Fictitious play : preuve

- Preuve initiale : par récurrence sur le nombre de stratégies.
- Nous : preuve en temps continu + pourquoi on peut en déduire le résultat discret.

Theorem (Sion, 1958)

Soit un jeu à somme nulle $G = (S, T, g)$ *tel que :*
(i) S *et* T *sont convexes,*
(ii) S *ou* T *est compact,*
(iii) pour tout t *dans* T, $g(., t)$ *est quasi-concave s.c.s. en* s,
(iv) pour tout s *dans* S, $g(s, .)$ *est quasi-convexe s.c.i. en* t.
Alors G *a une valeur (en stratégies pures) :*

$$\sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s, t) = \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s, t).$$

De plus, si S *(resp.* T*) est compact, les suprema (resp. infima) ci-dessus sont atteints.*