

# **Pénalisation L2+L1 et Lagrangien augmenté en synthèse de Fourier**

## **Application à la radio-héliographie par interférométrie**

Jean – François GIOVANNELLI

Groupe Signal – Image

IMS (Université de Bordeaux – CNRS)

351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

*Préalablement* : Groupe Problèmes Inverses, Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS – Supélec – UPS)

*Collaborateur* : Alain COULAIS, Laboratoire d'Étude du Rayonnement de la Matière en Astrophysique, Observatoire de Paris

***Peyresq-Plus, fin juin 2013***

# PLAN

- Principe des mesures en interférométrie
- Modèle direct et problèmes d'inversion
  - Synthèse de Fourier, Interpolation – extrapolation, Déconvolution
- Indétermination, information *a priori* et régularisation
  - Positivité et support
  - Sources ponctuelles sur fond homogène et modèle composite
- Aspects algorithmiques
- Résultats de traitements
  - Simulations
  - Données NRH
- Conclusions et extensions

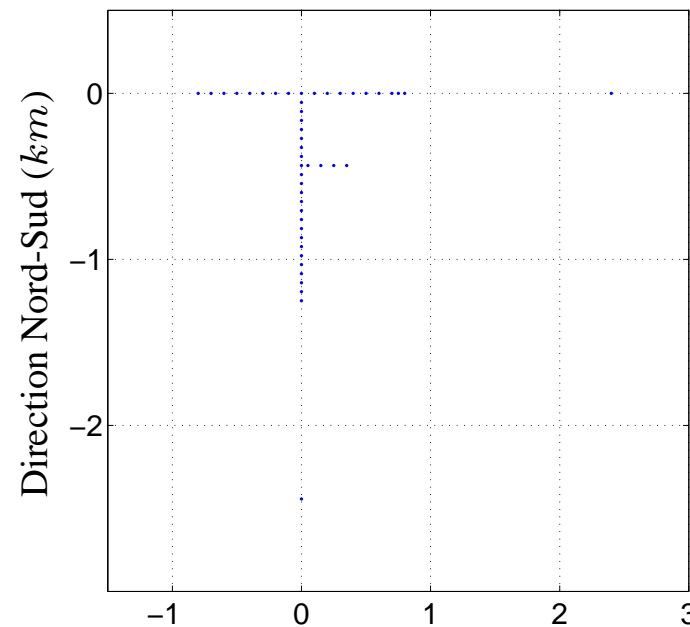
## INTERFÉROMÉTRIE : PRINCIPES DE L'INSTRUMENT (1/2)

- Principe physique [THOMPSON, MORAN, SWENSON, 2001]
  - Réseau d'antennes  $\rightsquigarrow$  large ouverture
  - Bande de fréquence, *e.g.*, 164 MHz
  - Interférence entre deux antennes  $\rightsquigarrow$  une donnée dans le plan de Fourier



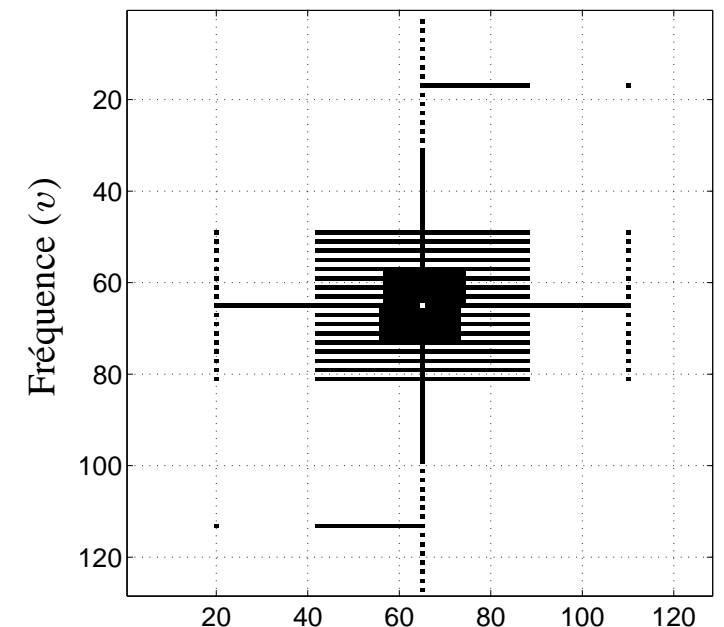
NRH

Positions des antennes



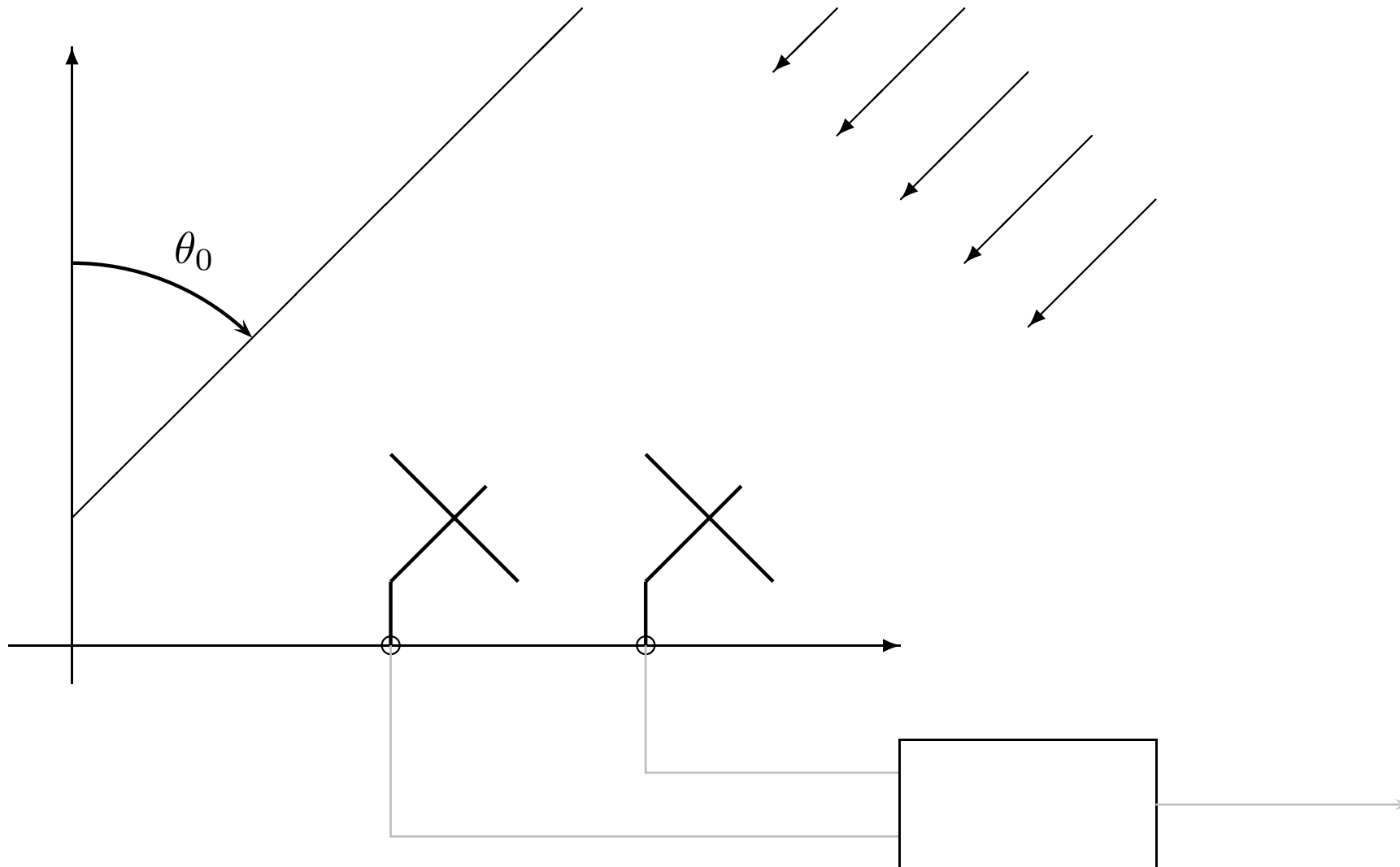
Direction Ouest-Est (km)

Remplissage du plan de Fourier



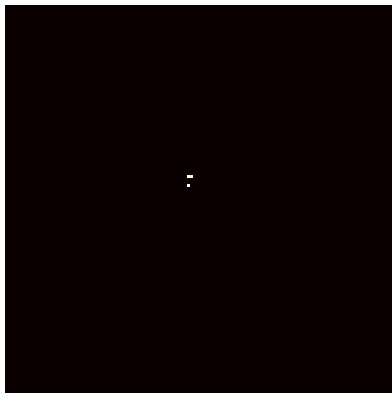
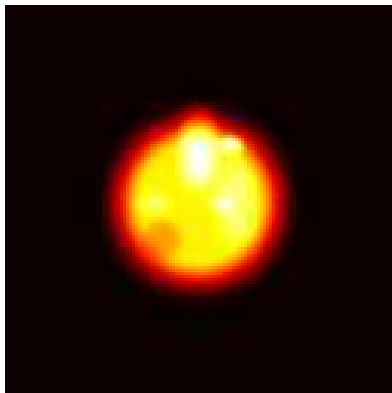
Fréquence (u)

# INTERFÉROMÉTRIE : PRINCIPES DE L'INSTRUMENT (2/2)

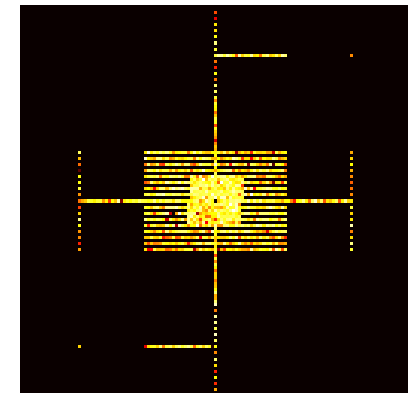
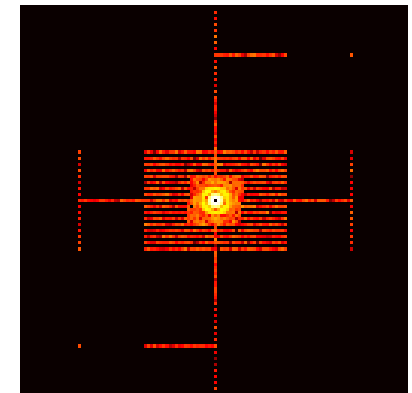
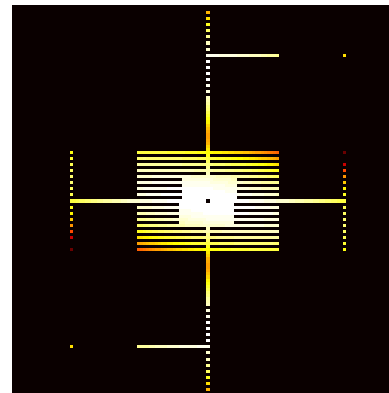
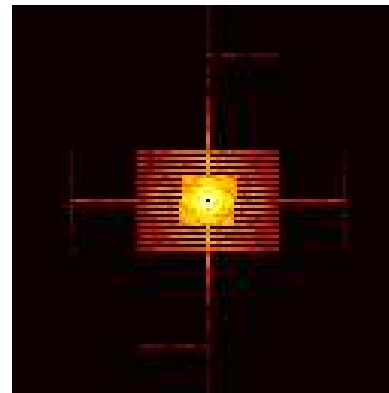
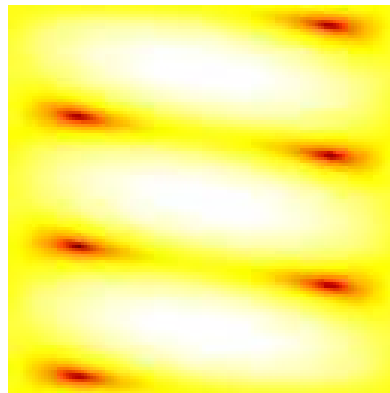
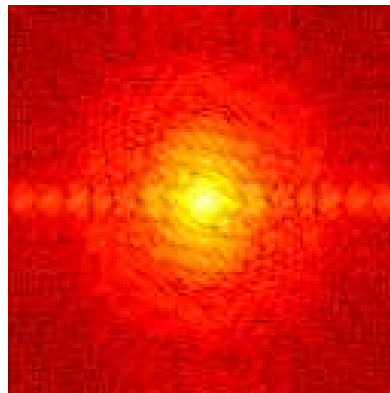


## OBSERVATIONS TYPIQUES

- Source étendue : basse fréquence
- Sources impulsionnelles : large bande



Objet



Données

## MODÈLE INSTRUMENT

### ● Transformée de Fourier tronquée bruitée

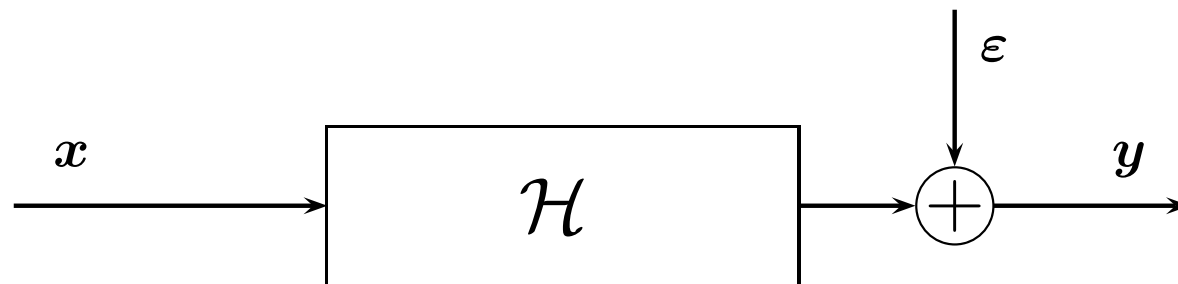
$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

●  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$  : image inconnue

●  $\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{C}^M$  : données mesurées, erreurs

●  $\mathbf{F}$  : matrice de Fourier ( $N \times N$ )

●  $\mathbf{T}$  : matrice de troncature ( $M \times N$ ), e.g.,  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



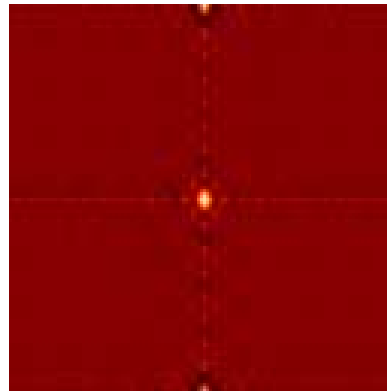
### ● Difficultés : $M \ll N$ (7% observé), aspect « bi », bruit (pas trop)

## AUTRES FORMULATIONS

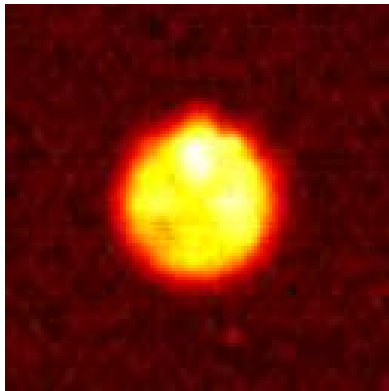
- Formulation initiale Fourier – spatial :  $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$
- Quelques propriétés
  - $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\dagger = \mathbf{I}_N$  : orthonormalité
  - $\mathbf{T}^\dagger$  : matrice de « bourrage »,  $M \rightsquigarrow N$
  - $\mathbf{T}\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{I}_M$  et  $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}$  : matrice de projection,  $N \rightsquigarrow N$
- Deux autres formulations : spatial – spatial et Fourier – Fourier
  - Changement de variable :  $\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} \rightsquigarrow$  interpolation – extrapolation
$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{T}\overset{\circ}{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
  - Transformation des données :  $\overset{\circ}{\mathbf{y}} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{T}^\dagger \mathbf{y}$  (carte sale)  
Transformation de l'opérateur :  $\mathbf{H} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}\mathbf{F}$  (lobe sale)  $\rightsquigarrow$  déconvolution
$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \longrightarrow \overset{\circ}{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

# LOBE SALE – CARTE SALE

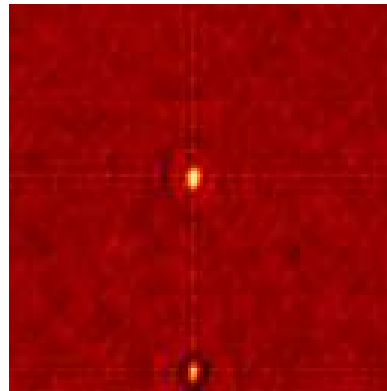
Lobe sale



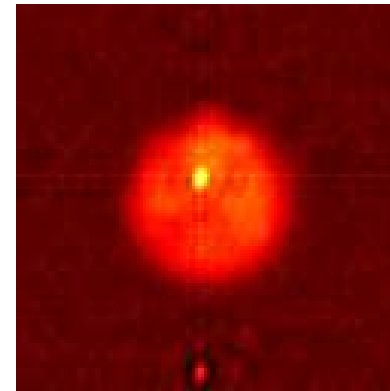
Carte sale



Carte sale



Carte sale





## CARACTÈRE MAL POSÉ – INDÉTERMINATION

- Rang déficient, données manquantes

- $FT, T, H$  : 1 valeur singulière d'ordre  $M$  et 0 d'ordre  $N - M$

- Pas de solution unique par moindres carrés

- $Q^{\text{MC}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x}\|^2$

- Solution à norme minimale, autres solutions

- $Q^{\text{MC}}(\overset{\circ}{\mathbf{y}}) = 0$

- $Q^{\text{MC}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{y}} + [\mathbf{u} - \mathbf{F}^\dagger \mathbf{T}^t \mathbf{T} \mathbf{F} \mathbf{u}]\right) = 0$ , pour toute carte  $\mathbf{u}$

- Nécessité d'introduire d'autres informations

- Bi-modèle et pénalités adaptées

- Contraintes

## POSITIVITÉ ET SUPPORT

- Positivité

$$C_p : \forall p \in \mathcal{M}, \quad x_p \geq 0$$

- Support

$$C_s : \forall p \in \bar{\mathcal{S}}, \quad x_p = 0$$

- Gabarit (non exploré ici)

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad t_p^- \leq x_p \leq t_p^+$$

- Carte par défaut (non exploré ici)

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad x_p \sim m_p$$

## SOURCE ÉTENDUE + SOURCES PONCTUELLES

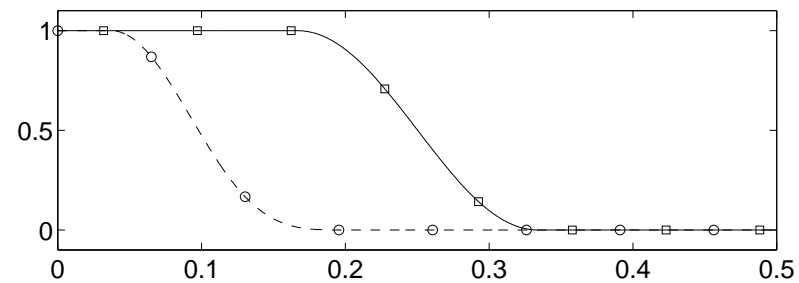
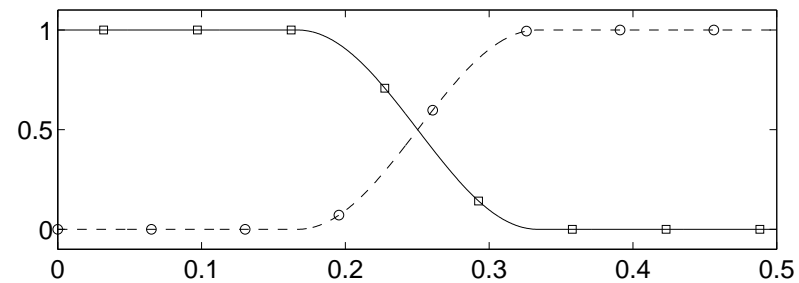
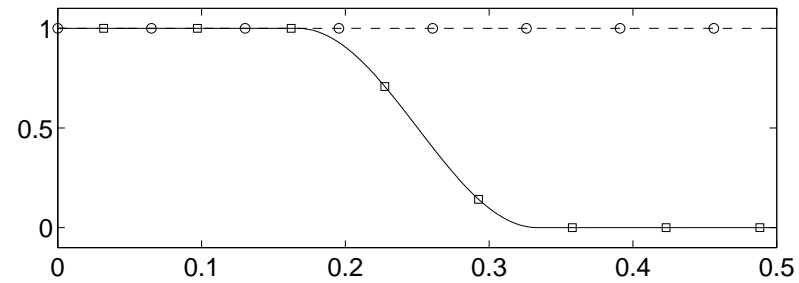
### ● Bi-modèle [CIUCIU 96, SAMSON 00] et [MAGAIN 98, PIRZKAL 00]

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \mathbf{x}_p$
- Modèle direct  $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}(\mathbf{x}_e + \mathbf{x}_p) + \varepsilon$
- Nouvelles indéterminations

### ● Régularisation adaptée

- Régularité :  $R_e(\mathbf{x}_e) = \sum_n [\mathbf{d}_n^t \mathbf{x}_e]^2 = \sum_{n \sim m} [x_e(n) - x_e(m)]^2$ 
  - Gauss-Markov, recomposition (ondelettes, dictionnaire, ...)
- Parcimonie :  $R_p(\mathbf{x}_p) = \sum |x_p(n)| = \sum x_p(n)$ 
  - Blanc-Laplace, Blanc-Exponentiel

# ANALYSE FRÉQUENTIELLE



Fréquence réduite

## CRITÈRE ET SOLUTION RÉGULARISÉS

- Critère : pénalisé, quadratique, strictement convexe

$$Q^{\text{MCR}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_p) = \|\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{F}(\mathbf{x}_e + \mathbf{x}_p)\|^2 + \lambda_e \sum [x_e(n+1) - x_e(n)]^2 + \lambda_p \sum x_p(n) \\ + \varepsilon_e \sum x_e(n)^2 + \varepsilon_p \sum x_p(n)^2$$

- Solution : *unique minimiseur sous contrainte*

$$(\widehat{\mathbf{x}}_e, \widehat{\mathbf{x}}_p) = \arg \min_{\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_p} \begin{cases} Q^{\text{MCR}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_p) \\ \text{s.c. } (C) \end{cases} = \arg \min_{\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_p} \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{q}^t \mathbf{x} \\ \text{s.c. } \begin{cases} x_p = 0 & \text{for } p \in \bar{\mathcal{S}} \\ x_p \geq 0 & \text{for } p \in \mathcal{M} \end{cases} \end{cases}$$

- Solution fonction des deux paramètres  $\lambda_e$  et  $\lambda_p$

## OPTIMISATION

- Optimisation quadratique avec contrainte linéaire
- Difficultés
  - $N \sim 130000$
  - Contrainte et variables liées
- Outils existants *garantis convergents* [BERTSEKAS 95,99 ; NOCEDAL 00,08 ; BOYD 04,11]
  - Gradient projeté, contraint
  - Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (L-BFGS) et *limited memory*
  - Points intérieurs
  - Descente coordonnée par coordonnée
  - Lagrangien augmenté, ADMM
    - Contraint mais non-liées + liées mais non-contraint
    - Solutions intermédiaires par FFT

## OPTIMISATION : LAGRANGIENS ET PÉNALISATION

- Contrainte égalité :  $x_p = 0$

$$- \sum_{p \in \bar{\mathcal{S}}} \ell_p x_p + \frac{1}{2} c \sum_{p \in \bar{\mathcal{S}}} x_p^2$$

- Contrainte inégalité :  $(x_p \geq 0) \rightsquigarrow (s_p - x_p = 0 ; s_p \geq 0)$

$$- \sum_{p \in \mathcal{S}} \ell_p (x_p - s_p) + \frac{1}{2} c \sum_{p \in \mathcal{S}} (x_p - s_p)^2$$

- Globalement

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\ell}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{q}^t \mathbf{x} - \boldsymbol{\ell}^t (\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} c (\mathbf{x} - \mathbf{s})^t (\mathbf{x} - \mathbf{s})$$

## ALGORITHME ITÉRATIF

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\ell}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{q}^t \mathbf{x} - \boldsymbol{\ell}^t (\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} c (\mathbf{x} - \mathbf{s})^t (\mathbf{x} - \mathbf{s})$$

● Itérer trois étapes

① Unconstrained minimization of  $\mathcal{L}$  w.r.t.  $\mathbf{x}$

$$\tilde{\mathbf{x}} = -(\mathbf{Q} + c\mathbf{I}_N)^{-1} (\mathbf{q} + [\boldsymbol{\ell} + c\mathbf{s}]) \quad (\equiv \text{FFT, Wiener})$$

② Minimization of  $\mathcal{L}$  w.r.t.  $\mathbf{s}$ , s.t.  $s_p \geq 0$

$$\tilde{s}_p = \begin{cases} \max(0, c\tilde{x}_p - \ell_p)/c & \text{for } p \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{for } p \in \bar{\mathcal{S}} \end{cases}$$

③ Update  $\boldsymbol{\ell}$

$$\tilde{\ell}_p = \begin{cases} \max(0, \ell_p - c\tilde{x}_p) & \text{for } p \in \mathcal{S} \\ \ell_p - c\tilde{x}_p & \text{for } p \in \bar{\mathcal{S}} \end{cases}$$



## PRÉCISIONS SUR $Q$ ET $q$

●  $q \rightsquigarrow$  carte sale :

$$q = \left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_e, x_p=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_e} \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_p} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{y}} \\ \overset{\circ}{\mathbf{y}} + \lambda_c \mathbf{1}/2 \end{bmatrix}$$

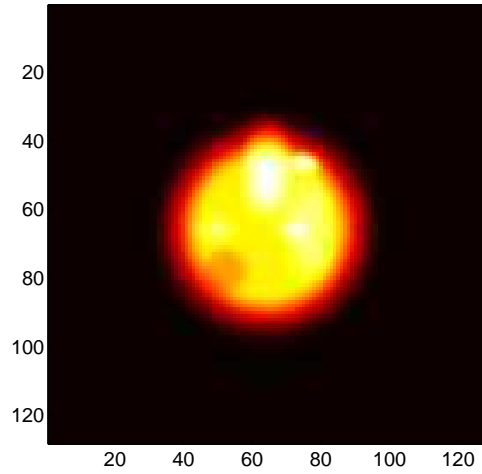
●  $Q \rightsquigarrow$  lobe sale :

$$Q = \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}_e^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}_e \partial \mathbf{x}_p} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}_p \partial \mathbf{x}_e} & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}_p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} + \lambda_s \mathbf{D}^t \mathbf{D} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & \mathbf{H} + \varepsilon_s \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

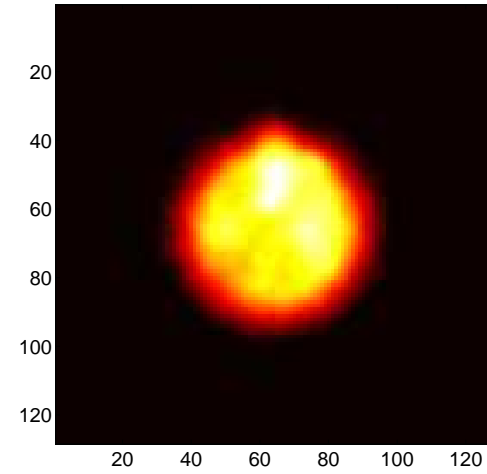
● ... et  $q$  et  $Q$  par FFT

## DONNÉES SIMULÉES : RÉSULTATS

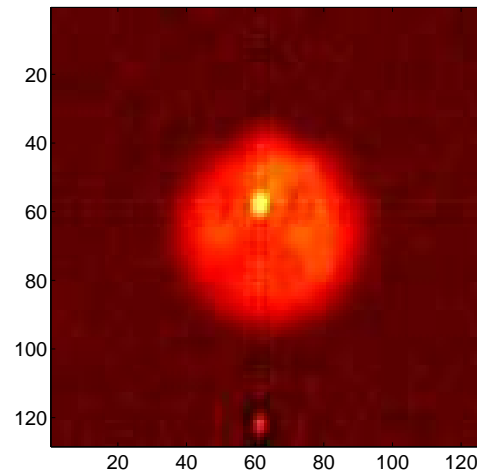
Objet étendu vrai  $\mathbf{x}_e$



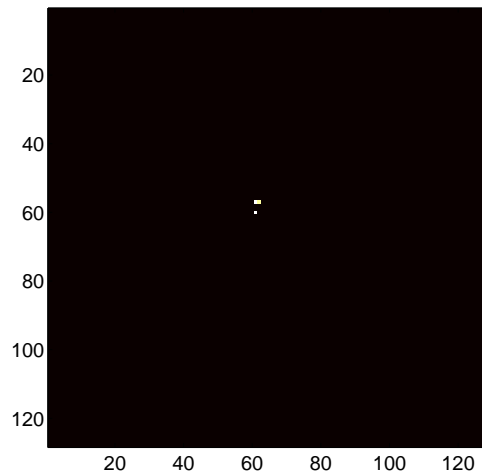
Objet étendu estimé  $\widehat{\mathbf{x}}_e$



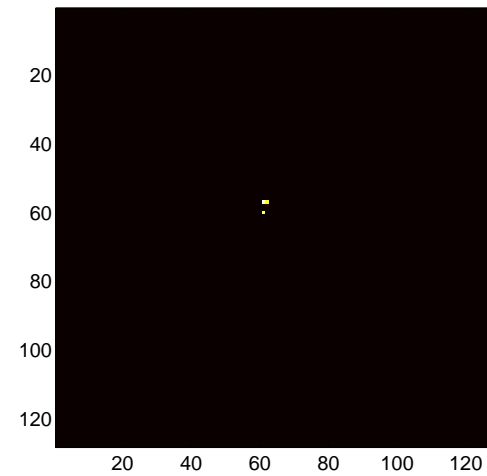
Carte sale



Objet ponctuel vrai  $\mathbf{x}_p$

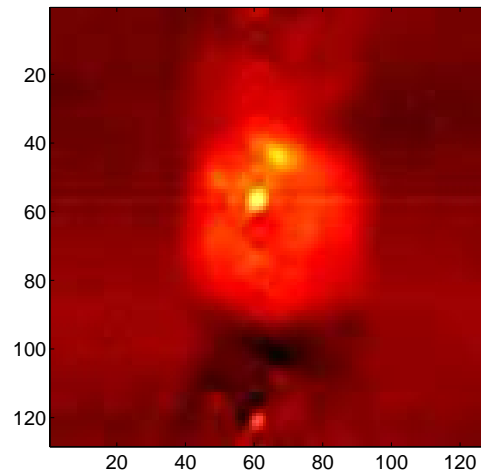


Objet ponctuel estimé  $\widehat{\mathbf{x}}_p$

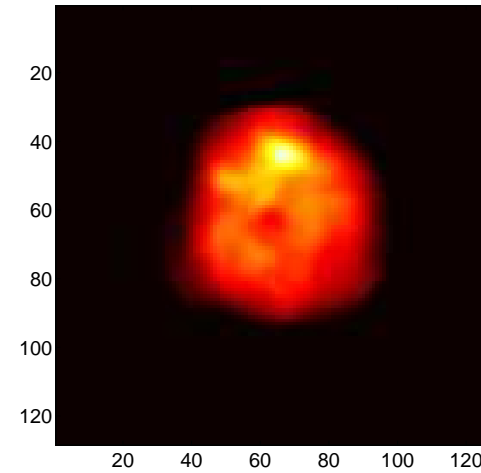


# DONNÉES RÉELLES : PREMIERS RÉSULTATS

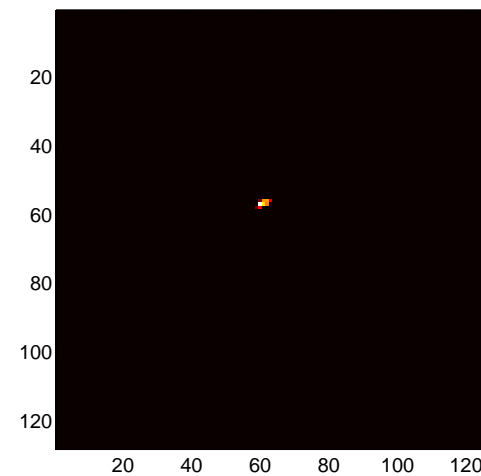
Carte sale



Objet étendu estimé  $\widehat{x}_e$



Objet ponctuel estimé  $\widehat{x}_p$



## CONCLUSIONS

- Synthèse de Fourier en radioastronomie
  - Bi-modèle et régularisation adaptée : séparation fond / sources
  - Positivité et support
- Optimisation : lagrangiens augmenté, ADMM
- Simulations et données réelles
- Perspectives
  - Régularisation convexe non quadratique  $\rightsquigarrow$  résolution accrue du fond
  - Sources « hors grille » et sur-résolution
  - Données hors grille (fait en IRM)
  - Convexité large et unimodalité
  
  - Hyperparamètres, paramètres de réglage : *non-supervisé*
  - Paramètres instruments (gain, position) : *myope*
  - Variable cachées : contours, régions, points singuliers, *etc...* : *augmenté*