

# Analyse multifractale construite sur les weak scaling exponents

H. WENDT<sup>1</sup> P. ABRY<sup>2</sup> P. CIUCIU<sup>3</sup> M. DUMEUR<sup>3</sup> S. JAFFARD<sup>4</sup> W. BEN NASR<sup>4</sup> G. SAËS<sup>4</sup>

<sup>1</sup>CNRS, IRIT, Université de Toulouse, Toulouse, France

<sup>2</sup>CNRS, ENS de Lyon, Laboratoire de Physique, Lyon, France

<sup>3</sup>CEA (NeuroSpin), Inria MIND, Gif-sur-Yvette, France

<sup>4</sup>Univ Paris Est Creteil, Univ Gustave Eiffel CNRS, LAMA UMR8050, F-94010 Creteil, France

**Résumé** – L’analyse multifractale est un outil de traitement du signal bien établi qui examine la dynamique des données au-delà des statistiques de second ordre et à travers de multiples échelles en quantifiant les fluctuations de leur régularité ponctuelle. Un élément clé est de définir un exposant de régularité ponctuelle. Ce travail introduit un nouvel exposant qui, contrairement aux formulations antérieures basées sur les exposants Hölder ou les  $p$ -exposants, ne fait l’hypothèse d’aucune régularité globale *a priori*, ce qui le rend applicable à une plus large gamme de signaux et d’images, y compris ceux ayant une régularité négative. Les simulations numériques mettent en évidence ses avantages et illustrent son utilisation dans l’analyse d’un signal MEG.

**Abstract** – Multifractal analysis is a well-established signal processing tool that examines data dynamics beyond second-order statistics and across multiple scales by quantifying fluctuations in pointwise data regularity. A key component is defining and using a pointwise regularity exponent. This work introduces a new exponent that, unlike earlier formulations based on Hölder or  $p$ -exponents, does not assume any *a priori* global regularity, making it applicable to a broader range of signals and images, including those with negative regularity. Numerical simulations highlight its benefits and illustrate its use in MEG signal analysis.

## 1 Introduction

**Analyse multifractale.** L’analyse multifractale est aujourd’hui un outil de traitement du signal pertinent et valide. Il a été utilisé avec succès pour analyser, modéliser et classer la dynamique des signaux dans de nombreuses applications. L’analyse multifractale mesure les fluctuations temporelles d’un exposant de *régularité ponctuelle*  $h_X(t)$  associé à un signal  $X(t) \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , généralement par l’exposant de *Hölder* [5]. Plutôt que de caractériser  $X(t)$  via la fonction  $h(t)$ , l’analyse multifractale fournit une description géométrique globale des fluctuations de régularité de  $X$  dans le temps : le *spectre multifractal*  $D(h)$  de  $X$  désigne la dimension de Hausdorff de l’ensemble des points  $t$  où  $h(t)$  prend la valeur  $h$  [5]. Cette définition théorique ne permet cependant pas d’obtenir des procédures de calcul de  $D(h)$  à partir de données de résolution finie. L’estimation pratique est obtenue grâce à une procédure appelée *formalisme multifractal*. Il repose sur l’utilisation de quantités multi-échelles pertinentes pour mesurer les exposants de régularité qui, dans le cas des exposants Hölder, sont donnés par les *coefficients dominants* [5].

**Travaux antérieurs et défis.** Dans les applications, les données à analyser ont souvent une régularité uniforme négative. Dans ce cas, l’exposant de Hölder ne peut pas être utilisé puisqu’il s’agit d’une quantité positive. Une solution historique consistait à analyser la primitive des données pour augmenter leur régularité, mais cela présente l’inconvénient de modifier la forme du spectre multifractal de certains modèles d’une façon non prédictible [1]. Plus récemment, le problème a été partiellement résolu en définissant de nouveaux exposants de régularité : les  $p$ -exposants  $h_p(t)$  ( $p \in (0, +\infty]$ ). Ces derniers sont une généralisation de l’exposant Hölder (qui correspond au cas limite  $p = +\infty$ ), peuvent prendre des valeurs négatives,  $h_p(t) \geq -1/p$ , et peuvent être analysés à l’aide de  $p$ -leaders

pour des fonctions appartenant à  $L^p$  [6]. La possibilité d’utiliser les  $p$ -exposants est déterminée par une condition simple portant sur la *fonction d’échelle ondelettes* :  $\zeta_f(p) > 0$ . Cependant, certaines classes de signaux du monde réel, comme des signaux biologiques, sont trop irréguliers pour satisfaire cette condition : ils vérifient  $\forall p > 0$ ,  $\zeta_f(p) < 0$ , et ils ne peuvent donc pas être correctement analysés par ces méthodes. C’est par exemple le cas de signaux cérébraux [4], ou des rythmes cardiaques [3]. De même, certains modèles mathématiques vérifient cette propriété ; c’est le cas du bruit blanc gaussien unidimensionnel pour lequel  $\forall p > 0$ ,  $\zeta_f(p) = -p/2$  ou encore du processus d’incrémentement d’une marche aléatoire multifractale (MRW) [2].

**Objectifs et contributions.** L’objectif de ce travail est de lever cette limitation. Nous étudions l’utilisation d’un nouvel exposant de régularité, le *weak scaling exponent (WSE)*, pour l’analyse multifractale, qui a récemment été proposé dans [4], avec l’avantage important qu’il ne repose pas sur l’hypothèse d’une régularité globale *a priori*. À cette fin, nous rappelons les concepts clés de l’analyse multifractale dans la section 2, et nous définissons le nouvel exposant et les coefficients multi-échelle associés pour leur analyse dans la section 3. Étant donné que, contrairement aux définitions précédentes, le WSE nécessite en pratique de fixer conjointement deux hyperparamètres, une attention particulière est accordée à leur étude. En particulier, nous proposons une nouvelle paramétrisation, plus adaptée à l’analyse de signaux que celle énoncée dans [4] qui peut détériorer les lois d’échelle. Dans la section 4, nous fournissons des résultats numériques pour les signaux synthétiques qui montrent les performances de l’approche proposée. Enfin, en section 5, nous illustrons l’utilisation pour l’analyse de données de magnétoencéphalographie (MEG), montrant sa pertinence dans les applications du monde réel.

## 2 Analyse multifractale

### 2.1 Quantités multiéchelle

L'estimation numérique du spectre multifractal  $D(h)$  est réalisée à partir de quantités multiéchelle construites à partir des coefficients de  $X$  sur une base orthonormée d'ondelettes [8]. Soit  $\psi$  une *ondelette mère*, c'est-à-dire une fonction bien localisée, régulière, ayant ses  $N_\psi$  premiers moments nuls, et telle que les  $2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k)$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ , forment une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Les coefficients d'ondelettes de  $X$  sont  $d_X(j, k) = 2^{-j}\langle \psi(2^{-j}t - k) | X(t) \rangle$ .

Une *quantité multiéchelle*  $\ell_{j,k}$  est une famille de semi-normes de coefficients d'ondelettes localement associées à chaque intervalle dyadique  $\lambda_{j,k} = [k2^j, (k+1)2^j)$  de largeur  $2^j$ . Soit  $\omega(j)$  une suite d'entiers strictement positifs ; notons  $\omega(j)\lambda_{j,k}$  l'intervalle qui est la réunion de  $\lambda_{j,k}$  et de ses  $\omega(j)-1$  plus proches voisins à la même échelle. Le choix  $\omega(j) = 3$  conduit à des exemples classiques de quantités multiéchelles ; ainsi, les coefficients dominants :

$$L_X(j, k) \triangleq \sup_{\lambda_{j',k'} \subset \omega(j)\lambda_{j,k}} |d_X(j', k')|, \quad (1)$$

correspondent à une norme  $l^\infty$  prise sur les coefficients d'ondelettes localisées au voisinage de  $\lambda$  et de plus petite échelle. De même les  $p$ -leaders sont définis par des normes  $l^p$  prises sur les mêmes ensembles, cf. [6].

### 2.2 Formalisme multifractal

**Spectre de Legendre.** Les fonctions de structure associées à une quantité multiéchelle  $\ell_{j,k}$  sont définies par leurs moments statistique d'ordre  $q$

$$\forall q \in \mathbb{R}, \quad S(j, q) = 2^j \sum_k |\ell_{j,k}|^q. \quad (2)$$

Si ces quantités satisfont un comportement en loi de puissance à petite échelle, les exposants associés définissent la *fonction d'échelle* notée  $\eta(q)$  ; on a donc  $S(j, q) \sim 2^{\eta(q)j}$ , et sa transformée de Legendre définit le *spectre de Legendre*  $\mathcal{L}(H) \triangleq \inf_{q \in \mathbb{R}} (1 + Hq - \eta(q))$ .

Une quantité multiéchelle  $\ell_{j,k}$  est associée à un *exposant de régularité ponctuelle*  $h(t)$  si  $\forall H, D(H) \leq \mathcal{L}(H)$ . Des choix spécifique conduisent à des quantités multiéchelles associées aux différents exposants de régularité ponctuelle. Ainsi, les coefficients dominants (1) sont associés à l'exposant de Hölder ; de même les  $p$ -leaders sont associés au  $p$ -exposant.

**Log-cumulants.** En interprétant la moyenne temporelle (2) comme une moyenne d'ensemble, on peut montrer que les cumulants d'ordre  $m$  des quantités  $\log(\ell_{j,k})$  s'écrivent

$$C_m(j) = c_m^0 + j c_m \ln 2. \quad (3)$$

Les coefficients  $c_m$ , nommés *log-cumulants*, peuvent être estimés par régression linéaire des  $C_m(j)$  vs.  $j$ ,  $j_1 \leq j \leq j_2$  ; ils sont utilisé pour résumer les propriétés multifractales du signal  $X$ . En effet, ils peuvent être reliés au développement limité du spectre de Legendre au voisinage de son maximum [11] :

$$\mathcal{L}(h) = 1 + \frac{c_2}{2} \left( \frac{h - c_1}{c_2} \right)^2 - \frac{c_3}{6} \left( \frac{h - c_1}{c_2} \right)^3 + \dots, \quad (4)$$

ce qui permet de caractériser  $\mathcal{L}(h)$  au moyen de quelques paramètres ayant une interprétation simple :  $c_1$  est la position du maximum,  $c_2$  est relié à sa largeur,  $c_3$  à son asymétrie, etc.

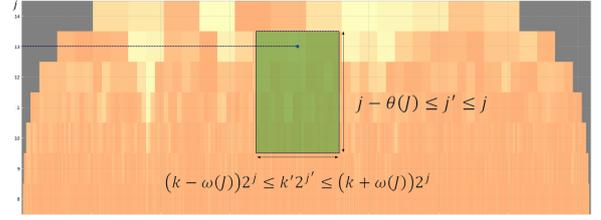


FIGURE 1 : Illustration de la définition des box-leaders.

## 3 Weak scaling exponent

### 3.1 Définition et propriétés

Contrairement aux autres exposants de régularité ponctuelle précédemment introduits, le *weak scaling exponent* (WSE) se définit sans hypothèse de régularité uniforme a priori sur les données. Il a été introduit par Y. Meyer dans le but de formaliser mathématiquement l'heuristique suivante [9] : cet exposant prend la valeur  $h = h^{ws}(x_0)$  en  $x_0$  si les coefficients d'ondelettes de la fonction  $X$  vérifient  $|d_X(j, k)| \sim 2^{hj}$  dans les "cônes d'influence" en  $x_0$  définis par  $|x_0 - k2^j| \leq C2^j$ .

**Définition 3.1** Soit  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une distribution tempérée ;  $X \in C^{s,s'}(x_0)$ , si ses coefficients d'ondelettes vérifient :

$$\exists C, \forall j, k, \quad |d_X(j, k)| \leq C2^{sj}(1 + |2^{-j}x_0 - k|)^{-s'};$$

$f \in \Gamma^s(x_0)$  s'il existe  $s' > 0$  tel que  $f \in C^{s,-s'}(x_0)$ . Le *weak scaling exponent* de  $X$  en  $x_0$  est :

$$h_X^{ws}(x_0) \triangleq \sup\{s : X \in \Gamma^s(x_0)\}.$$

Contrairement à l'exposant de Hölder qui ne peut prendre que des valeurs positives, ou au  $p$ -exposant qui est toujours supérieur à  $-1/p$ , cet exposant peut prendre toute valeur positive ou négative sans limitation a priori.

### 3.2 Box-leaders

**Définition.** Les quantités multiéchelles associées aux WSE, nommées *box-leaders*  $B_X(j, k)$ , sont définies par une norme  $l^\infty$  sur les coefficients  $(j', k')$  dans les intervalles dyadiques  $V_{(\theta, \omega, J)}(j, k)$  vérifiant

$$V_{(\theta, \omega, J)}(j, k) = \left\{ (j', k') : \begin{aligned} &j - \theta(J) \leq j' \leq j, \\ &|k2^j - k'2^{j'}| \leq \omega(J)2^j \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

où la fonction  $\theta$  est à croissance sous polynomiale et la fonction  $\omega$  est à croissance sous-exponentielle,

$$B_X(j, k) \triangleq \sup_{(j', k') \in V_{(\theta, \omega, J)}(j, k)} |d_X(j', k')|, \quad (6)$$

(cf. [4] pour des définitions précises de  $\theta$  et  $\omega$ ). La différence mathématique fondamentale dans cette définition est qu'elle donne des quantités qui sont de taille finie et donc toujours bien définies, ce qui n'est pas le cas pour les coefficients dominants et  $p$ -leaders.

**Choix de  $\theta$  et  $\omega$ .** Dans [4], est choisi  $J = j$ , qui impose, pour un signal donné, que les voisinages sur lesquels sont pris les sup puissent *changer de taille et de forme* d'une échelle

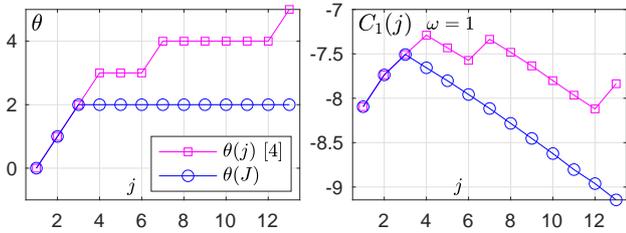


FIGURE 2 : Fonctions  $\theta$  (à gauche) et  $C_1(j)$  pour  $\Delta\text{MRW}$  correspondant (à droite, voir section 4 pour détails de simulation).

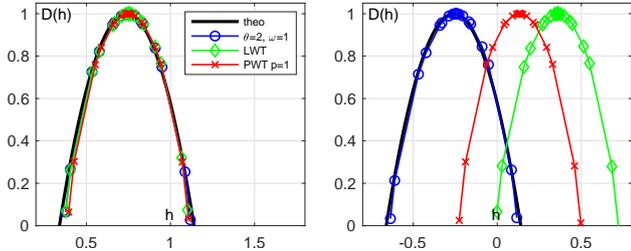


FIGURE 3 : Estimation de  $D(h)$   $j = 5 - 10$  pour MRW (à gauche) et ses incréments  $\Delta\text{MRW}$  (à droite).

$j$  à l'autre. Cela induit une *détérioration des lois d'échelle* car ces changements sont discrets, comme illustrée sur figure 2. Nous proposons d'utiliser  $J = \log_2(n)$  et donc des boîtes de taille fixe (motivant le nom "box-leaders"), la taille dépendant de celle du signal (de façon croissante). Une illustration d'une boîte  $V_{(\theta, \omega, J)}(j, k)$  est représentée sur la figure 1. De cette façon, les lois d'échelle sont préservés dès que  $j > \theta(J)$  (cf. figure 2), sans pour autant modifier les propriétés théoriques des box-leaders.

Les fonctions d'échelle obtenues pour différents box-leaders coïncident pour  $q > 0$  et conduisent donc à la même partie gauche (croissante) du spectre de Legendre. Cependant, différents choix pour  $\theta$  et  $\omega$  peuvent conduire à des spectres de Legendre qui diffèrent sur leur partie décroissante. Dans le cas extrême où le box-leader est réduit à un seul élément (il est alors identique aux coefficients d'ondelettes  $d_X(j, k)$ ), on obtient une mauvaise estimation de la partie droite du spectre [3, 4]. Les fonctions  $\theta$  et  $\omega$  doivent donc être choisis suffisamment grands, sous condition que  $\theta < j_1$  pour garantir une boîte de taille fixe pour les échelles  $j$  intervenant dans la régression linéaire,  $j_1 \leq j \leq j_2$ .

## 4 Quantification des performances

### 4.1 Simulations Monte Carlo

Nous appliquons le formalisme multifractal par box-leader (BWT) à 100 réalisations indépendantes de marches aléatoires multifractales (MRW) avec  $n = 2^{16}$ , et son processus d'incrément ( $\Delta\text{MRW}$ ) qui, contrairement à MRW, a une régularité négative [2] (MRW est donc la primitive de  $\Delta\text{MRW}$ ). MRW est un processus dont les propriétés multifractales rappellent celles des cascades multiplicatives de Mandelbrot, avec un spectre multifractal donné par (4) et  $c_1 = H + \lambda^2$ ,  $c_2 = -\lambda^2$  et tous les cumulants d'ordre supérieur à 2 nuls. L'ondelette de Daubechies avec  $N_\psi = 3$  est choisie pour l'analyse, et

TABLE 1 : Comparaison de performances de LWT, PWT et BWT pour MRW (en haut) et ses incréments  $\Delta\text{MRW}$  (en bas). Meilleurs résultats marqués en bleu.

|       |  | $\theta = 2, \omega = 1$ MRW $H = 0.7, \lambda^2 = 0.08$                |      |      |       |      |      |       |      |      |
|-------|--|---|------|------|-------|------|------|-------|------|------|
|       |  | $c_1$   |      |      | $c_2$ |      |      | $c_3$ |      |      |
|       |  | LWT   | PWT  | BWT  | LWT   | PWT  | BWT  | LWT   | PWT  | BWT  |
| $ b $ |  | 0.13  | 0.10 | 0.10 | 0.01  | 0.01 | 0.01 | 0.05  | 0.02 | 0.05 |
| $s$   |  | 0.26  | 0.21 | 0.27 | 0.24  | 0.19 | 0.25 | 0.30  | 0.22 | 0.34 |
| $r$   |  | 0.29  | 0.24 | 0.28 | 0.24  | 0.19 | 0.25 | 0.31  | 0.22 | 0.35 |
|       |  | $\theta = 2, \omega = 1$ $\Delta\text{MRW}$ $H = 0.7, \lambda^2 = 0.08$ |      |      |       |      |      |       |      |      |
|       |  | $c_1$   |      |      | $c_2$ |      |      | $c_3$ |      |      |
|       |  | LWT   | PWT  | BWT  | LWT   | PWT  | BWT  | LWT   | PWT  | BWT  |
| $ b $ |  | 6.19  | 3.93 | 0.15 | 0.03  | 0.02 | 0.01 | 0.03  | 0.01 | 0.08 |
| $s$   |  | 0.19  | 0.11 | 0.23 | 0.22  | 0.11 | 0.23 | 0.28  | 0.12 | 0.32 |
| $r$   |  | 6.20  | 3.94 | 0.27 | 0.22  | 0.11 | 0.23 | 0.29  | 0.12 | 0.33 |

$(j_1, j_2) = (5, 10)$  pour la régression linéaire. Nous prenons  $\theta \in \{0, 1, 2, 3\}$  et  $\omega = \{0, 1, 2\}$  pour étudier l'impact du choix des paramètres de BWT. Les performances sont évaluées avec le biais  $b$ , l'écart-type  $s$  et la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (rms)  $r$ , et comparées avec les wavelet leaders (LWT) et  $p$ -leaders (PWT) avec  $p = 1$ .

### 4.2 Performances d'estimation

**Estimation de  $D(h)$ .** La figure 3 illustre l'estimation moyenne de  $D(h)$  pour MRW (à gauche) et  $\Delta\text{MRW}$  (à droite). Elle montre que LWT, PWT et BWT fournissent des estimations comparables et précises lorsque les données présentent une régularité positive. Cependant, pour  $\Delta\text{MRW}$ , seul le BWT proposé donne des estimations correctes pour  $D(h)$ . En revanche, celles obtenues à l'aide de PWT et LWT se déplacent vers la droite sans modification de la forme du spectre.

**Estimation des  $c_m$ .** La performance d'estimation relative de LWT, PWT et BWT pour l'estimation de  $c_1, c_2$  et  $c_3$  est davantage quantifiée dans le tableau 2. Pour MRW (régularité positive), toutes les méthodes fonctionnent très bien. LWT et BWT sont presque identiques, tandis que le PWT - l'état de l'art actuel - atteint les meilleures performances globales (et 15-30% de valeurs rms plus faibles). Pour  $\Delta\text{MRW}$  (régularité négative), la situation est similaire à celle de MRW en ce qui concerne l'estimation de  $c_2$  et  $c_3$ , avec des performances presque identiques pour LWT et BWT, et de meilleures performances pour PWT. Mais seul BWT fournit des estimations justes pour  $c_1$ , correspondant quasiment à celles obtenues pour MRW. LWT et PWT produisent des estimations extrêmement biaisées pour  $c_1$ , avec des valeurs rms 10 à 20 fois plus élevées par rapport à BWT.

**Réglage de  $\omega$  et  $\theta$ .** Le tableau 2 étudie l'influence de la sélection des paramètres  $\omega$  et  $\theta$  pour BWT. Dès que  $\theta \geq 1$  et  $\omega \geq 1$ , les résultats obtenus à l'aide de BWT restent robustes et présentent une variation minimale avec la sélection précise des paramètres. Cependant, une valeur plus petite pour  $\theta$  est préférée car elle permet l'utilisation de valeurs plus petites pour  $j_1 > \theta$  dans (3), réduisant ainsi l'écart-type et l'erreur quadratique moyenne de racine (dans ce cas,  $j_1 = 5$  est fixe pour toutes les combinaisons de paramètres afin de faciliter les comparaisons). Par conséquent, la combinaison de paramètres  $\omega = 1, \theta = 2$  est un choix recommandé.

TABLE 2 : Performances d'estimation (rms) de BWT  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  pour différentes valeurs de  $\theta$  et  $\omega$  pour MRW (en haut) et ses incréments  $\Delta$ MRW (en bas). Meilleurs (pires) résultats marqués en bleu (rouge).

| MRW $H = 0.7, \lambda^2 = 0.08$ |           |      |      |           |      |      |           |      |      |
|---------------------------------|-----------|------|------|-----------|------|------|-----------|------|------|
| $\times 10$                     | rms $c_1$ |      |      | rms $c_2$ |      |      | rms $c_3$ |      |      |
| $\omega$                        | 0         | 1    | 2    | 0         | 1    | 2    | 0         | 1    | 2    |
| $\theta=0$                      | 0.37      | 0.33 | 0.34 | 1.09      | 0.34 | 0.33 | 6.24      | 0.63 | 0.42 |
| $\theta=1$                      | 0.28      | 0.29 | 0.32 | 0.39      | 0.25 | 0.26 | 0.93      | 0.35 | 0.34 |
| $\theta=2$                      | 0.26      | 0.28 | 0.31 | 0.32      | 0.25 | 0.26 | 0.56      | 0.32 | 0.33 |
| $\theta=3$                      | 0.26      | 0.28 | 0.31 | 0.30      | 0.24 | 0.26 | 0.47      | 0.32 | 0.33 |
| $\theta=4$                      | 0.26      | 0.28 | 0.31 | 0.30      | 0.24 | 0.26 | 0.47      | 0.32 | 0.33 |

| $\Delta$ MRW $H = 0.7, \lambda^2 = 0.08$ |            |      |      |            |      |      |            |      |      |
|--|------------|------|------|------------|------|------|------------|------|------|
| $\times 10$                              | rmse $c_1$ |      |      | rmse $c_2$ |      |      | rmse $c_3$ |      |      |
| $\omega$                                 | 0          | 1    | 2    | 0          | 1    | 2    | 0          | 1    | 2    |
| $\theta=0$                               | 0.39       | 0.32 | 0.34 | 1.23       | 0.36 | 0.33 | 6.64       | 0.75 | 0.38 |
| $\theta=1$                               | 0.26       | 0.27 | 0.31 | 0.41       | 0.23 | 0.24 | 0.90       | 0.33 | 0.33 |
| $\theta=2$                               | 0.24       | 0.31 | 0.36 | 0.31       | 0.21 | 0.23 | 0.55       | 0.28 | 0.28 |
| $\theta=3$                               | 0.26       | 0.40 | 0.45 | 0.25       | 0.20 | 0.25 | 0.51       | 0.24 | 0.30 |
| $\theta=4$                               | 0.26       | 0.40 | 0.45 | 0.25       | 0.20 | 0.25 | 0.51       | 0.24 | 0.30 |

## 5 Signaux électrophysiologiques MEG

Les signaux enregistrés à l'état de repos en MEG capture l'activité cérébrale spontanée, qui possède une invariance d'échelle [7]. Ils présentent des régularités négatives, nécessitant une intégration fractionnaire de différents ordres  $s$  avec LWT ou PWT, ce qui peut conduire à des résultats incohérents, nécessitant ainsi l'analyse BWT. Nous avons sélectionné un enregistrement au repos à partir d'un ensemble de données en libre accès [10], échantillonnées à 1793 Hz, et filtrées entre 0.1 et 3 Hz. Nous avons utilisé  $(j_1, j_2) = (10, 14)$  comme dans les travaux précédents, correspondant à [0.3-7] s, cf. la figure 4 (en bas) : les résultats sont homogènes aux simulations, le signal prenant la place de  $\Delta$ MRW et sa primitive celui de MRW, respectivement. Ainsi, les trois méthodes donnent des résultats similaires pour la primitive, mais seul BWT fournit des résultats significatifs et cohérents avec la série originale, soulignant sa robustesse pour l'étude de données complexes comme les signaux électrophysiologiques.

## 6 Conclusions et perspectives

Nous avons proposé, étudié et validé un nouveau formalisme multifractal basé sur le *weak scaling exponent* et une nouvelle formulation de quantités multiéchelles, les box-leaders. Contrairement aux formulations précédentes, il ne nécessite pas d'hypothèse *a priori* sur la régularité des données. Les résultats des simulations numériques montrent ses avantages, en particulier pour les données de régularité négative, conduisant à d'excellentes performances tandis que les leaders et les  $p$ -leaders donnent des estimations biaisées du spectre multifractal. L'étude d'un signal MEG a en outre souligné sa pertinence pour l'analyse complexe des données de neurosciences. Les travaux futurs se concentreront sur les recommandations théoriques pour la taille des boîtes des box-leaders, l'analyse de singularités oscillantes et lacunaires, et des applications à l'analyse de signaux cérébraux.

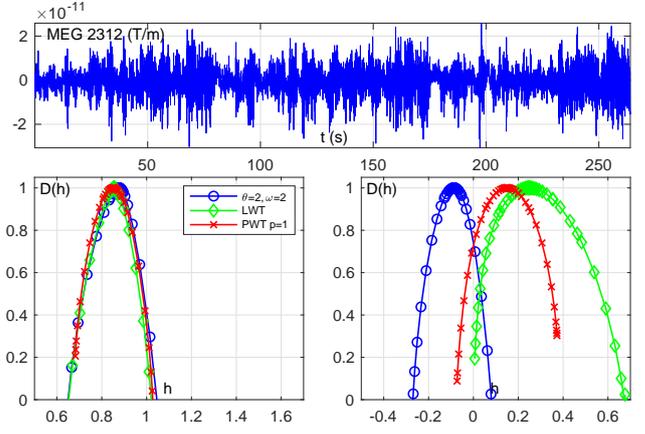


FIGURE 4 : Signal MEG (en haut) et  $D(h)$  estimé (en bas) de la primitive (à gauche,  $s = 1$ ) et du signal brut (à droite).

## Références

- [1] A. ARNEODO, S. G. ROUX et N. DECOSTER : A wavelet-based method for multifractal analysis of rough surfaces : applications to high-resolution satellite images of cloud structure. *AIP Conf. Proc.*, 622:80, 2002.
- [2] E. BACRY, J. DELOUR et J.-F. MUZY : Multifractal random walk. *Phys Rev E*, 64(2):2–5, 2001.
- [3] W. BEN NASR, V. BILLAT, S. JAFFARD, F. PALACIN et G. SAËS : The weak scaling multifractal spectrum : Mathematical setting and applications to marathon runners physiological data. *Proc. FARF IV, Springer*, 2025.
- [4] M. DUMEUR, G. SAËS, P. ABRY, P. CIUCIU, H. WENDT et S. JAFFARD : Multifractal analysis based on weak scaling exponents : Applications to MEG recordings in neuroscience. *preprint hal-04712582*, 2025.
- [5] S. JAFFARD : Wavelet techniques in multifractal analysis. In M. Lapidus et AL, éditeur : *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot, Proc. Symp. Pure Math.*, volume 72(2), pages 91–152. AMS, 2004.
- [6] S. JAFFARD, C. MELOT, R. LEONARDUZZI, H. WENDT, P. ABRY, S. ROUX et M. E. TORRES :  $p$ -exponent and  $p$ -leaders, Part I : Negative pointwise regularity. *Physica A*, 448:300–318, 2016.
- [7] D. LA ROCCA, N. ZILBER, P. ABRY, V. van WASSENHOVE et P. CIUCIU : Self-similarity and multifractality in human brain activity : A wavelet-based analysis of scale-free brain dynamics. *Journal of Neuroscience Methods*, 309:175–187, 2018.
- [8] S. MALLAT : *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Elsevier, 1999.
- [9] Yves MEYER : *Wavelets, vibrations and scalings*. CRM Ser. AMS Vol. 9, Presses U. Montréal, Paris, 1998.
- [10] M. P. WEISEND ET AL : MIND DATA, 2022. Dataset.
- [11] H. WENDT, S. G. ROUX, P. ABRY et S. JAFFARD : Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images. *Signal Proces.*, 89(6):1100–1114, 2009.