

Reconstruction de matrices de covariance basée sur des autoencodeurs beta-variationnels débruiteurs régularisés pour l'estimation de la direction d'arrivée

Gabriel VALENTI¹ Moctar MOUHAMADOU^{1,2} Cyril DECROZE¹

¹XLIM UMR CNRS 7252, Université de Limoges, 87060 Limoges, France

²3iL Ingénieurs, 43 rue de Sainte Anne, 87015 Limoges, France

Résumé – L'estimation de la direction d'arrivée (DoA) est une tâche importante en traitement du signal, notamment dans les domaines du radar, de l'acoustique et des communications. Cet article propose une nouvelle approche combinant des techniques d'apprentissage profond et l'algorithme MUSIC (MULTiple Signal Classification) afin d'améliorer l'estimation de la direction d'arrivée pour les réseaux linéaires uniformes (ULA). Nous proposons de reconstruire la matrice de covariance du réseau à partir de la matrice de covariance empirique des échantillons, en utilisant un autoencodeur bêta-variationnel densément connecté. Cette méthode permet d'améliorer la localisation des cibles dans des conditions de faible rapport signal sur bruit (SNR), en appliquant l'algorithme MUSIC à la matrice de covariance ainsi reconstruite.

1 Introduction

L'estimation de la direction d'arrivée (DoA) de signaux multiples est un sujet couramment étudié dans de nombreux domaines, tels que les radars, l'acoustique et les communications. Traditionnellement, l'estimation de la DoA repose sur la transformée de Fourier rapide. Cependant, la résolution obtenue est limitée par la résolution de Rayleigh, réduisant alors la capacité du système à distinguer des cibles proches. Plusieurs méthodes basées sur l'analyse des sous-espaces propres ont alors été proposées, telles que la méthode MUSIC (MULTiple Signal Classification)[9] et ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)[8]. Ces algorithmes sont performants, mais restent sensibles à la qualité de l'estimation de la matrice de covariance des antennes, aux imperfections du réseau, aux corrélations entre les cibles ainsi qu'à la présence de bruit dans les mesures. Les avancées récentes en apprentissage automatique ont permis le développement de nouvelles approches, telles que les réseaux à fonctions de base radiale [1] et les machines à vecteurs de support [7]. Plus récemment, les réseaux neuronaux profonds se sont révélés être une technologie prometteuse pour améliorer l'estimation de la DoA, notamment dans des conditions de faible rapport signal sur bruit (SNR). De nombreuses architectures ont été proposées, tels que des autoencodeurs de débruitage régularisés [6]. La plupart des approches existantes furent évaluées jusqu'à un SNR de -10 dB. Dans cet article, nous proposons une méthode de reconstruction de la matrice de covariance basée sur un autoencodeur bêta-variationnel, afin d'estimer l'angle d'arrivée dans des scénarios à faible SNR. Pour évaluer les performances, le pseudospectre MUSIC, le rapport entre les valeurs propres du signal et celles du bruit (SENER), ainsi que le rapport entre la valeur propre maximale et minimale (MME), sont comparés avant et après la reconstruction de la matrice de covariance. Les résultats obtenus montrent que la méthode proposée offre de bonnes performances.

Notations- Tout au long du document, les matrices sont re-

présentées par des lettres majuscules en gras, les vecteurs par des lettres minuscules en gras et les scalaires par des lettres minuscules ordinaires. Les symboles $(.)^T$ et $(.)^\dagger$ désignent respectivement la transposition et l'opérateur de transposition-conjugaison. Les normes l_1 et l_2 sont désignées respectivement par $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Le symbole \odot indique le produit de Hadamard. L'opérateur $\mathbb{E}[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique et $D_{\text{KL}}(p||q)$ représente la divergence de Kullback-Leiner (KL) de la distribution de probabilité p par rapport à la distribution de probabilité q . Les fonctions $\Re(\cdot)$, $\Im(\cdot)$ donnent respectivement les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe, avec $j = \sqrt{-1}$. Enfin, $H_N(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices hermitiennes de taille N et \mathbf{I}_N la matrice identité de taille N .

2 Rappels théoriques

2.1 Modèle de signal

On considère un réseau linéaire uniforme (ULA) composé de N éléments, espacés d'une demi-longueur d'onde et fonctionnant en bande étroite. On suppose également la présence de L cibles ponctuelles isotropes, non corrélées, situées en champ lointain, chacune caractérisée par une DoA θ_l pour $l \in \{1, L\}$. Ces L cibles reflètent le signal émis par un émetteur isotrope en champ lointain ; $s_l(t)$ désigne le signal réfléchi par la l -ième cible à l'instant t . Chaque élément du réseau reçoit un signal complexe résultant de la superposition linéaire des signaux réfléchis par les différentes cibles. Le signal reçu est donné par :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

où $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_L)] \in \mathbb{C}^{N \times L}$ est la matrice direction, $\mathbf{a}(\theta_l) = [1, e^{-j\pi \sin(\theta_l)}, \dots, e^{-j(N-1)\pi \sin(\theta_l)}]^T \in \mathbb{C}^N$ est le vecteur directionnel de la l -ième cible, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_L(t)]^T \in \mathbb{C}^L$ est le vecteur des signaux réfléchis par les L cibles et $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_N(t)]^T \in \mathbb{C}^N$ représente un bruit blanc additif gaussien, de moyenne nulle et de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}_N$, avec σ^2 la variance du bruit. Il

est alors possible d'estimer la matrice de covariance empirique du réseau, notée $\tilde{\mathbf{R}}_x$ à partir de la matrice des échantillons $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(0), \dots, \mathbf{x}(M-1)]$, d'après (2) :

$$\tilde{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{M} \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \quad (2)$$

où M est le nombre d'échantillons. Le signal reçu sans bruit, noté \mathbf{S} , s'écrit : $\mathbf{S} = [\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(0), \dots, \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(M-1)]$. La matrice de covariance estimée $\tilde{\mathbf{R}}_s$ à partir du signal sans bruit est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{R}}_s = \frac{1}{M} \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \quad (3)$$

2.2 Estimation de la DoA basée sur les sous-espaces

Les méthodes d'estimation de la DoA basées sur les sous-espaces exploitent l'orthogonalité entre le sous-espace signal, noté \mathbf{U}_s , et le sous-espace bruit, noté \mathbf{U}_n . En effectuant la décomposition en valeurs propres de $\tilde{\mathbf{R}}_x$, on obtient alors : $\tilde{\mathbf{R}}_x = \mathbf{U} \Delta \mathbf{U}^\dagger$, où $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_s \mid \mathbf{U}_n]$ est la base orthonormée des vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{R}}_x$ et Δ une matrice diagonale contenant les valeurs propres, triées par ordre décroissant. Il est possible d'estimer la DoA θ en calculant le pseudo-spectre MUSIC comme suit :

$$\tilde{\theta} = \arg \max_{\theta} \frac{1}{\mathbf{a}^\dagger(\theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^\dagger \mathbf{a}(\theta)} \quad (4)$$

Cependant, lorsque le rapport signal sur bruit (SNR) est faible, l'orthogonalité entre le sous-espace signal et le sous-espace bruit est compromise. Ce phénomène, connu sous le nom de "fuite du sous-espace de bruit", entraîne une dégradation significative des performances d'estimation de la DoA. Les avancées récentes en apprentissage automatique ont ouvert la voie à des approches prometteuses. Parmi celles-ci, les architectures basées sur les autoencodeurs apparaissent comme des candidats prometteurs, notamment en raison de leur capacité à extraire et compresser efficacement l'information, ce qui les rend particulièrement adaptées au débruitage [2]. Ces architectures reposent sur une ou plusieurs couches cachées représentant un espace latent dans lequel l'information est encodée. Les autoencodeurs variationnels (VAE) sont une extension des autoencodeurs classiques. Contrairement à ces derniers, ils n'encodent pas l'information sous forme d'un vecteur fixe dans l'espace latent, mais sous forme d'une densité de probabilité, permettant ainsi une modélisation plus souple et générative de l'information. Les travaux présentés font suite à des études précédentes et explorent les possibilités offertes par ce type d'architecture.

3 Génération des données

Pour générer les données d'entraînement, un réseau linéaire composé de 20 antennes espacées de $d = 0.5\lambda$ est considéré, où $\lambda = f_0/c$, f_0 étant la fréquence centrale et c la vitesse de la lumière. Les données ont été générées selon la procédure suivante :

Pour chaque simulation, les angles de trois cibles sont choisis aléatoirement et les signaux réfléchis correspondants sont générés, puis reçus pour différents niveaux de bruit. Les cibles

TABLE 1 : Paramètres de simulation

Paramètres	Valeur
Bande du signal (MHz)	10
Fréquence Centrale f_0 (GHz)	2,855
Angle minimal θ_{min} (°)	-60
Angle maximal θ_{max} (°)	60
SNR minimal (dB)	-5
SNR maximal (dB)	9
Pas du SNR (dB)	1
Nombre de tirages par SNR	2500

sont situées dans la même cellule de résolution en distance. À partir de ces signaux, les matrices de covariance bruitées $\tilde{\mathbf{R}}_x$ et non bruitées $\tilde{\mathbf{R}}_y$ sont calculées à l'aide des équations (2) et (3) puis conservées, ainsi que les angles d'arrivée correspondants θ . Les paramètres de simulation sont résumés dans le tableau 1. Les matrices de covariance étant hermitiennes, seule la partie triangulaire supérieure est conservée, puis transformée en vecteur complexe à l'aide de l'opérateur $\text{tru}(\cdot)$, conformément à [1]. Ensuite, ce vecteur est converti en vecteur réel via $\text{vect}(\cdot)$ défini comme suit :

$$\text{vect}(\mathbf{R}) = [\Re(\text{tru}(\mathbf{R})), \Im(\text{tru}(\mathbf{R}))]^T \quad (5)$$

L'opérateur inverse de $\text{vect}(\cdot)$, noté $\text{mat}(\cdot)$, permet de reconstruire une matrice hermitienne complexe \mathbf{R}' à partir de son vecteur réel \mathbf{r}' associé, comme suit : $\mathbf{R}' = \text{mat}(\mathbf{r}')$. Le jeu de données généré, noté $\mathcal{D} = \{\mathbf{r}_x^{(i)}, \mathbf{r}_y^{(i)}\}_{i=1}^J$, est constitué de $J = 37500$ paires d'observations étiquetées. Ce jeu de données est ensuite divisé en un ensemble d'entraînement (0.8) et un ensemble de validation (0.2).

4 Présentation de l'Autoencodeur Variationnel Débruiteur

4.1 Architecture

L'architecture proposée est un autoencodeur variationnel de type feed-forward. Elle comporte 59 545 neurones entraîna- bles, dont quatre couches denses pour l'encodeur (29 975 neurones) et trois couches denses pour le décodeur (30 120 neurones). Les couches d'entrée et de sortie utilisent des activations linéaires, tandis que les couches cachées emploient la fonction d'activation ReLU (Rectified Linear Unit).

4.2 Fonction de coût

Le vecteur débruité \mathbf{r}_y suit une distribution empirique (μ_{ref}) et le vecteur bruité \mathbf{r}_x suit la distribution $\mu(\mathbf{r}_x | \mathbf{r}_y)$. L'autoen- codeur variationnel de débruitage (DVAE) apprend à recons- truire un vecteur \mathbf{r}'_x à partir de de son observation bruitée \mathbf{r}_x . La fonction d'encodage (E) est paramétrée par ϵ , tandis que la fonction de décodage (D) est paramétrée par ρ . La procé- dure globale est illustré en figure 1. On note la distribution a posteriori approchée : $\tilde{q}_\epsilon(\mathbf{z} | \mathbf{r}_y) = \int_{\mathbf{r}_x} q_\epsilon(\mathbf{z} | \mathbf{r}_x) p(\mathbf{r}_x | \mathbf{r}_y) d\mathbf{r}_x$. La fonction de coût du DVAE repose sur la borne inférieure variationnelle (ELBO) adaptée au débruitage [4] :

$$\mathcal{L}_{\text{DVAE}}(\epsilon, \rho) = \mathbb{E}_{\mathbf{r}_x \sim \mu(\mathbf{r}_x | \mathbf{r}_y)} [\mathbb{E}_{\mathbf{z} \sim \tilde{q}_\epsilon(\mathbf{z} | \mathbf{r}_x)} [\log(\frac{p_\rho(\mathbf{r}_y, \mathbf{z})}{q_\epsilon(\mathbf{z} | \mathbf{r}_x)})]] \quad (6)$$

où $\mathbf{z}^{(i)}$ est une variable latente définie par :

$$\mathbf{z}^{(i)} = \mu_{\mathbf{x}}^{(i)} + \sigma_{\mathbf{x}}^{(i)} \odot \mathbf{n}^{(i)} \quad (7)$$

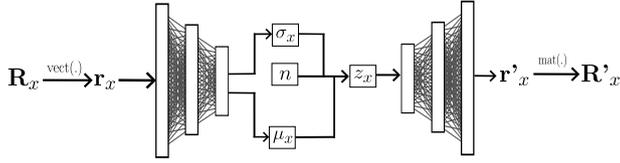


FIGURE 1 : Schéma de reconstruction proposé

$p_\rho(\mathbf{r}_y, \mathbf{z})$ représente la probabilité conjointe entre les échantillons idéaux \mathbf{r}_y et la variable latente \mathbf{z} , paramétrée par ρ , tandis que $p(\mathbf{z})$ désigne la densité de probabilité *a priori* de \mathbf{z} . Il a été observé que le terme de divergence KL tend à croître de manière significative, alors même que la fonction de coût globale (composée de l'erreur de reconstruction et de la divergence KL) diminue [3]. Cette situation peut conduire à un déséquilibre dans l'apprentissage du modèle, favorisant la reconstruction au détriment d'un encodage latent cohérent. Pour remédier à ce problème, une contrainte explicite est introduite sur la divergence KL entre la distribution *a posteriori* $q_\epsilon(\mathbf{z}|\mathbf{r}_x)$ et la distribution *a priori* $p(\mathbf{z})$. L'objectif est de maintenir une proximité suffisante entre les deux distributions :

$$\epsilon^*, \rho^* = \arg \max_{\epsilon, \rho} \mathcal{L}_{\text{DVAE}}(\epsilon, \rho), D_{\text{KL}}(q_\epsilon(\mathbf{z}|\mathbf{r}_x) \| p(\mathbf{z})) < \delta \quad (8)$$

Le problème d'optimisation est modifié par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange dans les conditions de Karush-Kuhn-Tucker [3]. On obtient ainsi la fonction de coût régularisée suivante :

$$\mathcal{L}_{\text{tot}}(\epsilon, \rho) = \mathcal{L}_{\text{DVAE}}(\epsilon, \rho) - \beta D_{\text{KL}}(q_\epsilon(\mathbf{z}|\mathbf{r}_x) \| p(\mathbf{z})) \quad (9)$$

Pour l'ensemble de données (\mathcal{D}) et sous les hypothèses suivantes :

- Les données sont corrompues par bruit blanc additif gaussien ;
- La variable latente \mathbf{z} suit une distribution normale standard multivariée.

La fonction de coût empirique correspondante est définie par :

$$\mathcal{L}_{\text{emp}}(\epsilon, \rho) = \frac{1}{B} \sum_{i=0}^{B-1} \|\mathbf{r}_y^{(i)} - D_\rho(E_\epsilon(\mathbf{r}_x^{(i)}))\|_2^2 - \frac{\beta_{KL}}{B} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{B-1} 1 + \log(\sigma_\epsilon(\mathbf{r}_x^{(i)}) - \sigma_\epsilon^2(\mathbf{r}_x^{(i)}) - \mu_\epsilon^2(\mathbf{r}_x^{(i)})) \quad (10)$$

où B est la taille du lot (batch size) et β_{KL} est un hyperparamètre à ajuster. Il a été observé que le DVAE a tendance à générer des vecteurs propres dans des conditions de SNR élevé. Deux termes de régularisation supplémentaires sont alors introduits dans la fonction de coût :

- Le premier terme pénalise les erreurs de reconstruction des matrices de covariance non bruitées, en particulier dans les scénarios à SNR élevé.
- Le deuxième terme favorise l'apprentissage de représentations éparées en appliquant une pénalisation l_1 sur la sortie du décodeur lorsque les données d'entrée sont débruitées ; favorisant la génération de structures éparées, similaires aux exemples non bruités.

TABLE 2 : Paramètres d'entraînement

Paramètres	Valeurs
Batch size	32
Nombre d'époques	100
Optimiseur	Adam
Taux d'apprentissage	0.001
Initialisation	Glorot

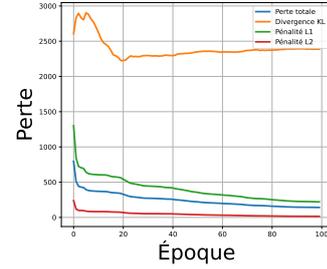


FIGURE 2 : Évolution de la fonction de coût

La fonction de coût totale proposée devient alors :

$$\mathcal{L}_{\text{tot}}(\epsilon, \rho) = \mathcal{L}_{\text{emp}}(\epsilon, \rho) + \frac{\beta_{l_2}}{B} \sum_{i=0}^{B-1} \|\mathbf{r}_y^{(i)} - D_\rho(E_\epsilon(\mathbf{r}_y^{(i)}))\|_2^2 + \frac{\beta_{l_1}}{B} \sum_{i=0}^{B-1} \|D_\rho(E_\epsilon(\mathbf{r}_y^{(i)}))\|_1 \quad (11)$$

où β_{l_1}, β_{l_2} sont des hyperparamètres à ajuster.

4.3 Entraînement

Les paramètres d'entraînement sont résumés dans le tableau 2. Le modèle a été implémenté à l'aide de la bibliothèque TensorFlow. L'optimisation des paramètres du DVAE a été effectuée à l'aide de l'algorithme Adam (Adaptive Moment Estimation)[5]. L'entraînement a été limité à 100 époques et l'évolution de la fonction de perte durant l'entraînement est représentée sur la figure 2. La taille de l'espace latent est noté N_L . Les valeurs retenues pour la discussion des résultats ont été trouvées par réglage des hyperparamètres : $N_L = 55$, $\beta_{KL} = 10^{-2}$, $\beta_{l_2} = 10^{-2}$ et $\beta_{l_1} = 10^{-2}$. Une trop grande valeur de β_{l_1} favorise l'aspect génératif, au détriment d'une bonne capacité de débruitage.

5 Évaluation des performances

5.1 Les métriques

L'évaluation est effectuée sur une grille angulaire équidistante de 241 points, avec un pas de 0.5° , sur laquelle plusieurs cibles sont placées aléatoirement afin de simuler différents scénarios. Les performances sont mesurées à partir des pseudo-spectres MUSIC obtenus avant et après la reconstruction de la matrice de covariance, ainsi que par l'analyse des valeurs propres associées aux matrices de covariance. Le SENER (Signal Eigenvalues to Noise Eigenvalues Ratio) et le Maximum-to-Minimum Eigenvalue(MME) sont définis à partir des valeurs propres λ_i de la matrice de covariance \mathbf{R} triées par ordre décroissant de magnitude, de la manière suivante :

$$\text{SENER} = \frac{\sum_{i=1}^L \lambda_i}{\sum_{i=L+1}^N \lambda_i}, \text{MME} = \frac{\max_{i=1, \dots, N} \lambda_i}{\min_{i=1, \dots, N} \lambda_i} \quad (12)$$

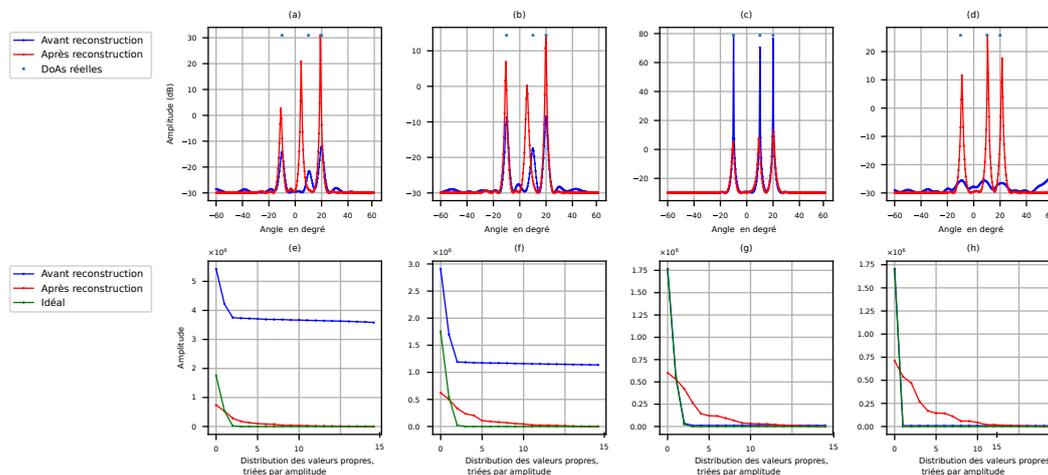


FIGURE 3 : Cibles non corrélées : (a) Pseudo-spectre MUSIC avec SNR = -15 dB, (b) pseudo-spectre MUSIC avec SNR = 0 dB, (c) pseudo-spectre MUSIC avec SNR = 10 dB, (e) Distribution des valeurs propres avec SNR = -15 dB, (f) Distribution des valeurs propres avec SNR = 0 dB, (g) Distribution des valeurs propres avec SNR = 10 dB. Cibles corrélées : (d) Pseudo-spectre MUSIC avec SNR = 10 dB, (h) Distribution des valeurs propres avec SNR = 10 dB

La métrique SENER vise à estimer grossièrement le rapport de puissance entre le signal et le bruit, tandis que la métrique MME est liée à la détection de cibles et à la probabilité de fausse alarme [10]. Cette dernière permet une estimation du ratio entre la plus grande valeur singulière correspondant au signal et une valeur semblable à la variance du bruit en sortie.

6 Résultats

Des simulations sont effectuées pour plusieurs niveaux de bruit afin d'analyser la robustesse et les performances de l'architecture proposée dans divers scénarios de rapport signal sur bruit. Trois cibles sont placées aux angles $\theta = [-10^\circ; 10^\circ; 20^\circ]$. On observe une nette séparation entre les L premières valeurs propres, correspondant au signal et les $N - L$ valeurs propres restantes, associées au bruit, comme l'illustrent les figures 3a-c et 3e-g. Le DVAE reste performant et reconstruit avec précision la matrice de covariance, malgré un SNR simulé variant de -5 dB (le plus faible) à 9 dB (le plus élevé) durant l'entraînement. Une amélioration des métriques MME et SENER est constaté après la reconstruction, comme l'indique le tableau 3, confirmant que les valeurs propres associées aux signaux sont plus élevées que celles liées au sous-espace de bruit. Le DVAE se révèle cependant moins efficace pour un SNR de 10 dB, car la matrice de covariance d'entrée est quasiment idéale. Néanmoins, il reconstruit correctement l'entrée, démontrant sa capacité à apprendre l'opération d'identité pour des matrices de covariance idéales, tout en maintenant de bonnes performances sur des données bruitées. Cette capacité est permise par le biais de l'introduction des termes de régularisation l_1 et l_2 . Enfin, dans le cas où les cibles ont été placées à la même distance, le DVAE a correctement reconstruit la matrice de covariance malgré de fortes corrélations, comme le montrent les figures 3d et 3h et comme le résume le tableau 3. Il a cependant été observé expérimentalement que le caractère génératif favorise la distorsion de certains vecteurs propres de la matrice générée, se traduisant par des décalages des pics du pseudo-spectre MUSIC (après reconstruction), affectant alors l'erreur quadratique moyenne de l'estimation de la DoA. Des travaux plus poussés sont en cours afin de rendre l'architecture plus

robuste.

TABLE 3 : Métriques vs. SNR

Métrique	SNR (dB)	Distance (m)	Avec Reconstruction	Sans Reconstruction
SENER	-15	[10;15;20]	1.53	0.22
	-10	[10;15;20]	1.47	0.30
	10	[10;15;20]	1.59	11.9
	10	[15;15;15]	1.59	11.9
MME	-15	[10;15;20]	1.72e3	1.602
	-10	[10;15;20]	5.44e2	2.856
	10	[10;15;20]	7.52e2	1.83e2
	10	[15;15;15]	1.19e3	1.83e2

7 Conclusion

Dans cet article, une architecture basée sur un autoencodeur beta-variationnel est proposée pour la reconstruction des matrices de covariance dans un contexte d'estimation des DoAs. L'architecture, la génération des données et les procédures d'entraînement ont été décrites en détail. Les résultats montrent que cette approche offre de bonnes performances par rapport à l'algorithme MUSIC traditionnel et permet de reconstruire les matrices de covariance sur une large gamme de SNR.

Références

- [1] A.H. EL ZOOGHBY, C.G. CHRISTODOULOU et M. GEORGIPOULOS : Performance of radial-basis function networks for direction of arrival estimation with antenna arrays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(11):1611–1617, 1997.
- [2] Lovedeep GONDARA : Medical image denoising using convolutional denoising autoencoders. août 2016.
- [3] Irina HIGGINS, Loïc MATTHEY, Arka PAL, Christopher P BURGESS, Xavier GLOTOT, Matthew M BOTVINICK, Shakir MOHAMED et Alexander LERCHNER : beta-vae : Learning basic visual concepts with a constrained variational framework. *ICLR (Poster)*, 3, 2017.
- [4] Daniel IM IM, Sungjin AHN, Roland MEMISEVIC et Yoshua BENGIO : Denoising criterion for variational auto-encoding framework. In *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, volume 31, 2017.
- [5] Diederik P. KINGMA et Jimmy BA : Adam : A method for stochastic optimization for stochastic optimization, 2017.
- [6] Georgios K PAPAGEORGIOU et Mathini SELLATHURAI : Fast direction-of-arrival estimation of multiple targets using deep learning and sparse arrays. In *ICASSP 2020-2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 4632–4636. IEEE, 2020.
- [7] Matteo PASTORINO et Andrea RANDAZZO : A smart antenna system for direction of arrival estimation based on a support vector regression. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 53(7):2161–2168, 2005.
- [8] A. PAULRAJ, R. ROY et T. KAILATH : Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques- esprit. In *Nineteenth Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers, 1985.*, pages 83–89, 1985.
- [9] Ralph SCHMIDT : Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 34(3):276–280, 1986.
- [10] Y. ZENG et Y.-C. LIANG : Eigenvalue-based spectrum sensing algorithms for cognitive radio. *IEEE Transactions on Communications*, 57(6):1784–1793, 2009.