

Reconstruction sans-grille de courbes en problèmes inverses

Anéva Doliciane TSAFACK¹ Laure BLANC-FÉRAUD¹ Gilles AUBERT²

¹Université Côte d’Azur, CNRS, I3S, INRIA, Morpheme project, France

²Université Côte d’Azur, CNRS, LJAD, France

Résumé – Des travaux récents en problèmes inverses ont introduit une fonctionnelle d’optimisation définie sur l’espace des mesures de Radon vectorielles à divergence finie, permettant de reconstruire des courbes dans une approche sans grille. La résolution numérique soulève des défis majeurs. Dans ce travail, nous introduisons un espace de mesures de Lebesgue à densité dans un espace de Sobolev adapté, dense dans l’espace précédent pour la topologie faible-* locale. Nous établissons ensuite l’équivalence en termes de solutions entre la fonctionnelle reformulée dans cet espace et la fonctionnelle originale. Cette nouvelle approche permet d’exploiter les algorithmes standards d’optimisation convexe pour l’implémentation numérique. Enfin, nous introduisons un modèle d’acquisition mieux adapté aux données issues de l’imagerie de fluorescence, conduisant à des résultats numériques prometteurs.

Abstract – Recent works in inverse problems have introduced an optimization functional for off-the-grid curve reconstruction, defined on the space of Radon vector measures with finite divergence. Its numerical resolution presents major challenges. In this work, we introduce a space of Lebesgue measures with density in a suitable Sobolev space, which is dense in the previous space for the locally weak-* topology. We then establish the equivalence in terms of solutions between the reformulated functional in this space and the original one. This new approach enables the use of standard convex optimization algorithms for numerical implementation. Finally, we introduce an acquisition model better suited for fluorescence microscopy images, leading to promising numerical results.

1 Introduction

Dans les problèmes inverses mal posés en imagerie, il est crucial de trouver un régulariseur favorisant le type de solutions recherchées. Dans les espaces de mesures, il est bien établi quel régulariseur permet de reconstruire les points (mesures de Dirac) [6, 3] et les ensembles (mesures supportées sur des ensembles 2D) [1]. De plus, de nombreux algorithmes d’optimisation ont été développés pour l’implémentation des fonctionnelles associées à ces régulariseurs [2, 7, 4, 5].

Le travail récent de Laville et al. [8] a introduit un nouveau régulariseur permettant de reconstruire des courbes dans une image 2D, défini par la norme :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{V}(\mathcal{X})} = \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathcal{X})^2} + \|\operatorname{div}(\cdot)\|_{\mathcal{M}(\mathcal{X})}, \quad (1)$$

sur l’espace des mesures de Radon vectorielles à divergence finie :

$$\mathcal{V}(\mathcal{X}) = \{m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})^2 : \operatorname{div}(m) \in \mathcal{M}(\mathcal{X})\}, \quad (2)$$

où $\mathcal{X}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{M}(\mathcal{X})^2$ et $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ désignent les espaces des mesures de Radon signées finies de dimension 2 et 1 sur $\mathcal{X}$, respectivement.

Dans [8], une fonctionnelle d’optimisation appelée CROC (Curves Represented on Charges) est proposée :

$$\arg \min_{m \in \mathcal{V}(\mathcal{X})} T_\lambda(m) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \|y - \Phi(m)\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda \|m\|_{\mathcal{V}(\mathcal{X})}, \quad (3)$$

où y représente les données observées, $\mathcal{H}$ est l’espace de Hilbert des observations, qui peut être $L^2(\mathcal{X})$ ou $\mathbb{R}^N$ (pour des observations discrètes, avec $N \in \mathbb{N}^*$), $\Phi : \mathcal{V}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur linéaire continu pour la topologie faible-* de $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ vers la topologie faible de $\mathcal{H}$ représentant la physique

d’acquisition des données, et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ est le paramètre de régularisation.

On s’intéresse dans ce travail à la déconvolution/supér-résolution d’images de microscopie optique, de résolution limitée par la diffraction, et à la reconstruction de structures courbes, comme les microtubules.

La fonctionnelle CROC possède une solution qui est une combinaison linéaire de mesures supportées par des courbes. Plus précisément, pour une observation discrète y de dimension $N \in \mathbb{N}^*$, une solution est : $\sum_{i=1}^M a_i \mu_{\gamma_i}$, où $a_i \in \mathbb{R}$ et μ_{γ_i} est une mesure vectorielle supportée par une courbe paramétrée γ_i . La mesure μ_{γ_i} est définie au sens fonctionnel par : $\forall g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}^2)$,

$$\langle \mu_{\gamma_i}, g \rangle_{\mathcal{M}(\mathcal{X})^2 \times \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}^2)} = \int_0^1 g(\gamma_i(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t) dt. \quad (4)$$

Bien que ce cadre théorique soit bien établi, le défi réside dans le développement d’un algorithme pour reconstruire efficacement ces courbes solutions. Dans [9], les auteurs ont introduit l’algorithme de Curve Sliding Frank-Wolfe, qui est une extension de l’algorithme Sliding Frank-Wolfe (un algorithme basé sur le gradient conditionnel) développé dans [7], pour résoudre la fonctionnelle CROC. Toutefois, sa mise en œuvre repose sur une étape clé d’estimation du support du certificat, une optimisation non convexe dans l’espace des courbes, formulée comme suit :

$$\arg \max_{\gamma} \left(\frac{|\langle \mu_{\gamma}, \eta \rangle|}{\|\mu_{\gamma}\|_{\mathcal{V}(\mathcal{X})}} \right), \quad (5)$$

où η , appelé certificat, est défini par : $\eta = \frac{1}{\lambda} \Phi^*(\Phi m - y)$, avec $\Phi^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}^2)$ l’opérateur adjoint de Φ , et $m \in \mathcal{V}(\mathcal{X})$, une solution de CROC. Dans les cas simples où l’on cherche

à reconstruire quelques courbes isolées les unes des autres et sans croisement, avec des amplitudes différentes, des approches heuristiques comme le seuillage, l'extraction du squelette et la détection de supports peuvent donner des résultats satisfaisants. Cependant, lorsque les courbes se rapprochent ou se croisent — ce qui est fréquent dans des applications telles que la reconstruction de filaments entrelacés ou de plusieurs courbes dans une tâche de diffraction — ces méthodes deviennent rapidement inefficaces, ce qui motive la recherche de nouvelles approches d'optimisation plus accessibles pour traiter la fonctionnelle CROC.

Ce travail propose une relaxation de la fonctionnelle CROC dans un espace de mesures de Lebesgue à densité, noté $\mathcal{W}(\mathcal{X})$, que nous définirons par la suite. Cette relaxation permet d'exploiter les algorithmes d'optimisation convexe standards pour sa mise en œuvre numérique.

Dans la section 2, nous posons le cadre théorique de la nouvelle approche d'optimisation proposée : nous introduisons l'espace $\mathcal{W}(\mathcal{X})$, puis reformulons la fonctionnelle CROC dans cet espace pour définir une version relaxée, notée CROC_R . Nous prouvons ensuite que toute suite minimisante de cette fonctionnelle relaxée converge vers une solution de la fonctionnelle CROC originale. Dans la section 3, nous présentons des simulations numériques afin d'illustrer cette nouvelle approche, avec des expériences portant sur la reconstruction de courbes à partir d'images floutées et bruitées, simulées suivant le principe de microscopie de fluorescence.

2 Nouvelle approche d'optimisation

Dans ce travail, $\mathcal{X}$ désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.

Soit $n \in \{1, 2\}$. On note $\mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions continues évanescentes de $\mathcal{X}$ vers $\mathbb{R}^n$.

L'espace des mesures de Radon bornées de dimension n , noté $\mathcal{M}(\mathcal{X})^n$ est le dual topologique de $\mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}^n)$, soit l'ensemble des formes linéaires continues sur cet espace. Le crochet de dualité sur $\mathcal{M}(\mathcal{X})^n$ est donné par :

$$\langle m, f \rangle = \int_{\mathcal{X}} f \, dm, \quad \forall m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})^n, f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}^n). \quad (6)$$

La norme de variation totale, qui correspond à la topologie forte sur $\mathcal{M}(\mathcal{X})^n$, est définie par :

$$\|m\|_{\text{TV}^n} = \sup \{ \langle m, f \rangle, f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}^n), \|f\|_{\infty} \leq 1 \}. \quad (7)$$

On dit qu'une suite $(\mu_h)_h \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})^n$ converge faiblement* vers $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{X})^n$ si, pour tout $u \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} u \, d\mu_h = \int_{\mathcal{X}} u \, d\mu. \quad (8)$$

Si la convergence vaut pour tout $u \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}^n)$, on parle alors de convergence faible-* locale.

Rappelons également que $m \mapsto \|m\|_{\text{TV}^n}$ est semi-continue inférieurement sous la topologie faible-* et faible-* locale.

Dans le but d'optimiser la fonctionnelle CROC définie en (3), nous introduisons l'espace $\mathcal{W}(\mathcal{X})$:

$$\mathcal{W}(\mathcal{X}) = \{ f \, dx \mid f \in L^1(\mathcal{X}, \mathbb{R}^2), \text{div}(f) \in L^1(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \}. \quad (9)$$

Ici, $f \, dx$ désigne une mesure dont la densité f est prise par rapport à la mesure de Lebesgue notée dx , avec $x \in \mathbb{R}^2$.

Theorem 2.1. *L'espace $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ est un sous-espace dense de $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ pour la topologie faible-* locale.*

La démonstration est donnée dans [10, Section 3].

Dans cet espace $\mathcal{W}(\mathcal{X})$, l'équivalent de la fonctionnelle CROC notée CROC_R est donné par :

$$\arg \min_{f \, dx \in \mathcal{W}(\mathcal{X})} D_{\lambda}(f), \quad \text{où} \quad (10)$$

$$D_{\lambda}(f \, dx) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \|y - \Phi(f \, dx)\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda(\|f\|_{L^1(\mathcal{X}, \mathbb{R}^2)} + \|\text{div}(f)\|_{L^1(\mathcal{X}, \mathbb{R})}). \quad (11)$$

L'intérêt d'optimiser CROC_R sur $\mathcal{W}$ (10) plutôt que CROC sur $\mathcal{V}$ (3), réside dans le fait que l'inconnue est une fonction vectorielle f et non plus une mesure portée par des courbes. Cette formulation permet d'utiliser des algorithmes d'optimisation convexe standard et évite l'optimisation non convexe (5) sur un espace de courbes.

Le théorème suivant établit que l'infimum de la fonctionnelle CROC coïncide avec celui de la fonctionnelle CROC_R .

Theorem 2.2.

$$\inf_{m \in \mathcal{V}(\mathcal{X})} T_{\lambda}(m) = \inf_{m \in \mathcal{W}(\mathcal{X})} D_{\lambda}(m). \quad (12)$$

La preuve de ce théorème est donnée dans [10, Theorem 4.3].

Proposition 2.3. *Toute suite minimisante de CROC_R dans $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ admet une sous-suite qui converge pour la topologie faible-* vers un minimiseur de CROC dans $\mathcal{V}(\mathcal{X})$.*

Démonstration. Soit (m_n) une suite minimisante pour D_{λ} dans $\mathcal{W}(\mathcal{X})$, c'est-à-dire

$$D_{\lambda}(m_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathcal{W}(\mathcal{X})} D_{\lambda}(m). \quad (13)$$

Comme D_{λ} est coercive, la suite $(m_n)_n$ est bornée dans $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ et donc dans $\mathcal{V}(\mathcal{X})$. Par conséquent, il existe une sous-suite (m_{n_k}) qui converge pour la topologie faible-* vers un point limite $\bar{m}$ dans $\mathcal{V}(\mathcal{X})$. Grâce à la semi-continuité inférieure de T_{λ} par rapport à la topologie faible-*, on obtient

$$T_{\lambda}(\bar{m}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} T_{\lambda}(m_{n_k}) \quad (14)$$

Puisque $m_{n_k} \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$, on a $T_{\lambda}(m_{n_k}) = D_{\lambda}(m_{n_k})$ et par conséquent

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} D_{\lambda}(m_{n_k}) = \inf_{m \in \mathcal{W}(\mathcal{X})} D_{\lambda}(m) = \inf_{m \in \mathcal{V}(\mathcal{X})} T_{\lambda}(m). \quad (15)$$

Ainsi

$$T_{\lambda}(\bar{m}) = \inf_{m \in \mathcal{V}(\mathcal{X})} T_{\lambda}(m), \quad (16)$$

entraînant que $\bar{m}$ est un minimiseur de CROC. $\square$

La construction de ce nouveau cadre théorique d'optimisation nous permet de proposer de nouvelles approches algorithmiques pour le calcul des solutions de CROC, comme nous le verrons dans la section suivante.

3 Exploration numérique

Pour une implémentation numérique efficace, il est essentiel de modéliser correctement la physique du problème d'acquisition, représentée par l'opérateur Φ défini précédemment.

3.1 Super-résolution des champs de vecteurs

Considérons un problème de reconstruction de courbes à partir de champs de vecteurs vitesse floutés et bruités associés. La physique d'acquisition peut être modélisée par un opérateur linéaire vectoriel, qui associe un champ de vecteurs de l'espace $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2$, selon la relation suivante :

$$\Phi : \mathcal{W}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}^2, f = (f_1, f_2) \mapsto \Phi(fdx) = (f_1 * h, f_2 * h),$$

où $*$ désigne l'opération de convolution et h est un noyau de flou. Si on note $y = (y_1, y_2)$, y_1 et y_2 représentant les composantes du champ de vecteurs observé, le problème se formalise comme suit :

$$\text{Trouver } f \text{ tel que } y = \Phi(fdx) + \eta, \quad (17)$$

où η représente un bruit additif. La fonctionnelle d'optimisation associée s'écrit alors :

$$\arg \min_{f \in \mathcal{W}(\mathcal{X})} \frac{1}{2} \|y_1 - f_1 * h\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2} \|y_2 - f_2 * h\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda \|f\|_{L^1(\mathcal{X}, \mathbb{R}^2)} + \lambda \|\text{div}(f)\|_{L^1(\mathcal{X}, \mathbb{R})}. \quad (18)$$

Pour implémenter cette fonctionnelle, l'espace des positions $\mathcal{X}$ est discrétisé en une grille de $N = N_1 \times N_2$ pixels, notée $(P_i)_{1 \leq i \leq N}$, où N_1 et N_2 représentent respectivement le nombre de pixels dans les directions x et y . En supposant que la fonction f est constante par pixel, on l'écrit sous la

forme : $f(x) = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{1}_{P_i}(x)$, où $\mathbb{1}_{P_i}(x)$ est la fonction in-

dicatrice du domaine du pixel P_i . La divergence au sens des distributions du champ de vecteurs f est ensuite discrétisée à l'aide de différences finies. Afin de rendre la fonctionnelle différentiable, on relaxe la fonction valeur absolue à l'aide de l'approximation lisse : $x \mapsto \sqrt{x^2 + \epsilon} - \sqrt{\epsilon}$, où ϵ est une constante strictement positive. La fonctionnelle ainsi obtenue est convexe et différentiable.

3.2 Application en imagerie de fluorescence

La microscopie de fluorescence, et plus généralement la microscopie optique, est limitée par le phénomène de diffraction et le bruit. La diffraction est modélisée par la convolution avec la fonction d'étalement du point du microscope (PSF), que l'on assimile ici à un noyau gaussien h , et on considère le bruit additif gaussien η .

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ une courbe paramétrée, de support Γ . Nous définissons la courbe floue dans l'image observée par $\delta_\Gamma * h$:

$$(\delta_\Gamma * h)(x) = \int_0^1 h(\gamma(t) - x) \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (19)$$

où δ_Γ est une mesure de Dirac supportée par Γ , définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}), \delta_\Gamma(\varphi) = \int_\Gamma \varphi(z) dz = \int_0^1 \varphi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

En pratique, on discrétise γ par une courbe polygonale définie par ses sommets $(\gamma(t_j))_{j=0}^n$, avec $t_0 = 0$ et $t_n = 1$ et $\gamma(t_j)$ prend des valeurs continues dans $\mathcal{X}$. Pour une image O , contenant la structure courbe γ , l'intensité à chaque pixel P_i est donnée par :

$$O_i = \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| h \left(\frac{\gamma(t_{j+1}) + \gamma(t_j)}{2} - c_i \right) + \eta_i, \quad (20)$$

où c_i est le centre du pixel P_i et η_i représente un échantillon de la variable aléatoire η . Pour une image contenant plusieurs courbes floues $(\gamma_k)_{k=1}^K$ avec des amplitudes $(a_k)_{k=1}^K$, l'intensité de chaque pixel est calculée comme : $O_i = \sum_{k=1}^K a_k O_i^k$, avec O_i^k donnée par l'équation (20) pour la courbe γ_k .

Nous souhaitons reconstruire les courbes super-résolues via la fonctionnelle CROC_R. L'optimisation étant effectuée dans l'espace $\mathcal{W}(\mathcal{X})$, associé au champ de vecteurs, cela soulève deux questions : Comment construire le champ de vecteurs à partir de l'image observée ? Comment reconstruire la courbe une fois le champ de vecteurs optimisé ?

La construction du champ de vecteurs à partir de l'image d'intensité observée s'appuie sur l'idée d'obtenir les vitesses des courbes d'intérêt après optimisation. Étant donné qu'un champ de vitesse implique un opérateur de dérivation, on propose un terme d'attache aux données basé sur le gradient de l'image observée O . Puisque le gradient est orthogonal aux courbes de niveau d'une fonction, on considère le champ de vecteurs comme étant orthogonal au gradient, afin de suivre la direction des courbes. On obtient ainsi la fonctionnelle définie à l'équation (18), avec $(y_1, y_2) = \nabla^\perp O$.

À partir du champ de vecteurs super-résolu f , obtenu après optimisation, les courbes sont reconstruites en résolvant l'équation différentielle :

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = f(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x_0, \quad (21)$$

où $x_0 \in \mathcal{X}$ est un point initial soigneusement choisi. Dans le cas de plusieurs courbes, cette équation est résolue pour différentes conditions initiales. Concrètement, ces points d'initialisation sont déterminés de manière heuristique en identifiant les extrémités du squelette de l'image de magnitude de f . Bien que f soit discret, il est interpolé sur le domaine $\mathcal{X}$ et l'équation différentielle est ensuite résolue à l'aide du schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Une discrétisation plus fine de f lors de l'optimisation améliore la qualité de l'interpolation.

Cette résolution permet de retrouver un contexte sans grille, car les points de paramétrisation des courbes ne sont pas limités à une grille régulière mais peuvent se trouver n'importe où dans $\mathcal{X}$. Pour illustrer les résultats numériques de ce travail, on considère deux courbes qui, initialement confondues dans la tâche de diffraction, se séparent ensuite, comme le montre l'image à gauche de la figure 1. L'écart-type du flou est fixé à 3×10^{-2} en longueur normalisée sur $\mathcal{X} = [0, 1] \times [0, 1]$, et celui du bruit à 1×10^{-2} , en intensité relative par pixel. Lors de l'implémentation¹, nous avons utilisé l'algorithme L-BFGS (Limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) pour l'optimisation. En utilisant l'orthogonal du gradient de l'image observée comme champ de vecteurs observés y , nous obtenons le résultat présenté dans la figure 2. Au lieu de reconstruire les vecteurs vitesses des courbes d'intérêt, le champ obtenu correspond à celui des contours fermés délimitant les zones floues de l'image. Cela s'explique par le fait que l'orthogonal du gradient ne correspond pas au champ de vecteurs vitesses floutées et bruitées des courbes. Toutefois, cela ne remet pas en cause la pertinence de notre fonctionnelle, adaptée à la super-résolution des champs, comme le montre la figure 3, mais souligne la nécessité d'extraire correctement le champ de vecteurs à optimiser à partir de l'image d'intensité observée.

¹Voir <https://gitlab.inria.fr/atsafack/implementation-of-croc-relaxed-functional-on-w>

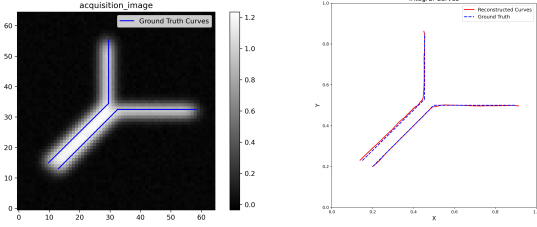


FIGURE 1 : (Gauche) Donnée scalaire : image observée. (Droite) Reconstruction : courbes intégrales du champ de vecteurs reconstruit avec la fonctionnelle scalaire.

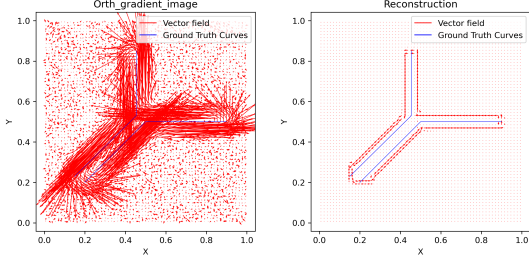


FIGURE 2 : (Gauche) Donnée vectorielle : orthogonal du gradient de l'image à gauche dans figure 1. (Droite) Reconstruction : champ reconstruit avec CROC_R .

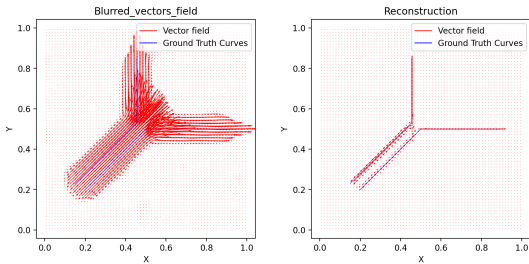


FIGURE 3 : (Gauche) Donnée vectorielle : vecteurs vitesses floutés et bruités associés aux courbes en bleu. (Droite) Reconstruction : champ reconstruit avec CROC_R , l'algorithme réussit à isoler les deux champs de vitesses initialement confondus.

L'extraction d'informations vectorielles appropriées à partir d'une image observée étant un défi, nous proposons un nouveau modèle de terme de données basé directement sur l'image. La nouvelle fonctionnelle est donnée par :

$$\arg \min_{m \in \mathcal{V}(\mathcal{X})} T_\lambda(m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \|O - \Lambda(m)\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda \|m\|_{\mathcal{V}(\mathcal{X})}, \quad (22)$$

où $\Lambda(m)$ est défini par $|m| * h$ et h le noyau de flou. La fonctionnelle correspondante dans $\mathcal{W}$ est :

$$\arg \min_{f \in \mathcal{W}(\mathcal{X})} D_\lambda(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \|O - \Lambda(f dx)\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda \|f\|_{L^1(\mathcal{X}, \mathbb{R}^2)} + \lambda \|\text{div}(f)\|_{L^1(\mathcal{X}, \mathbb{R})} \quad (23)$$

Bien que cette fonctionnelle ne soit plus linéaire ni convexe, contrairement à la précédente, les résultats de simulation présentés à droite dans la figure 1 montrent son potentiel et ses performances prometteuses pour la super-résolution des structures courbes dans les images de microscopie de fluorescence.

4 Conclusion

Ce travail propose une nouvelle approche d'optimisation de la fonctionnelle CROC, permettant d'exploiter des algorithmes d'optimisation classiques pour une mise en œuvre numérique. Nous avons introduit l'espace $\mathcal{W}(\mathcal{X})$, dense dans $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ pour la topologie faible-* locale. La fonctionnelle associée, CROC_R , est bien adaptée à la déconvolution/super-résolution des champs de vecteurs, et elle est convexe, contrairement au problème d'optimisation en (5). Cependant, en imagerie, la difficulté de définir une quantité vectorielle observée représentant fidèlement la courbe recherchée nous a conduit à proposer une nouvelle fonctionnelle basée directement sur l'image scalaire. Cette fonctionnelle montre un potentiel significatif et fera l'objet d'investigations théoriques et numériques futures.

5 Remerciements

Les travaux de TAD ont été financés par le gouvernement français, dans le cadre du plan d'investissement France 2030 géré par l'Agence Nationale de la Recherche, dans le cadre du projet "UCA DS4H", référence ANR-17-EURE-0004. Les travaux de LBF ont bénéficié du soutien du gouvernement français, dans le cadre des investissements 3IA Côte d'Azur, gérés par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR), sous la référence ANR-23-IACL-0001.

Références

- [1] L. AMBROSIO, J.-M. MOREL, S. MASNOU et V. CASELLES : Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing. *J. Eur. Math. Soc.*, 3(1):39–92, 2001.
- [2] J. M. AZAIS, Y. DE CASTRO et F. GAMBOA : Spike detection from inaccurate samplings. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 38(2):177–195, 2015.
- [3] K. BREDIES et H. K. PIKKARAINEN : Inverse problems in spaces of measures. *ESAIM : Control Optim. Calc. Var.*, 19(1): 190–218, 2013.
- [4] L. CHIZAT : Sparse Optimization on Measures with Over-parameterized Gradient Descent. *Math. Program.*, 194(1):487–532, 2022.
- [5] Y. DE CASTRO, V. DUVAL et R. PETIT : Towards Off-the-grid Algorithms for Total Variation Regularized Inverse Problems. *J. Math. Imaging Vis.*, 65(1):53–81, 2023.
- [6] Y. DE CASTRO et F. GAMBOA : Exact Reconstruction using Beurling Minimal Extrapolation. *J. Math. Anal. Appl.*, 395(1): 336–354, 2012.
- [7] Q. DENOYELLE, V. DUVAL, G. PEYRÉ et E. SOUBIES : The Sliding Frank-Wolfe Algorithm and its Application to Super-Resolution Microscopy. *Inverse Probl.*, 36(1):014001, dec 2019.
- [8] B. LAVILLE, L. BLANC-FÉRAUD et G. AUBERT : Off-the-Grid Curve Reconstruction through Divergence Regularization : An Extreme Point Result. *SIAM J. Imaging Sci.*, 16(2):867–885, 2023.
- [9] B. LAVILLE, L. BLANC-FÉRAUD et G. AUBERT : A Γ -Convergence Result and An Off-the-Grid Charge Algorithm for Curve Reconstruction in Inverse Problems. *J. Math. Imaging Vis.*, 66(4):572–583, 2024.
- [10] A. D. TSAFACK, L. BLANC-FÉRAUD et G. AUBERT : Curve Reconstruction in Inverse Problems : From Divergence-Measure Vector Fields to Density Lebesgue Measures. *HAL*, 2025. HAL Id : hal-04922387.