

Filtre adapté normalisé hors-grille : une reparamétrisation robuste en présence de bruit corrélé

Simon TROTTIER^{1,2} Jonathan BOSSE¹ Olivier RABASTE¹ Philippe FORSTER³ Jean-Philippe OVARLEZ^{1,2}

¹DEMR, ONERA, Université Paris-Saclay, F-91120 Palaiseau, France.

²SONDRA CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, F-91192 Gif-sur-Yvette, France.

³Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, SATIE, F-91190, Gif-sur-Yvette, France.

Résumé – Un problème général en radar consiste à détecter si le signal reçu contient ou non un signal d'intérêt spécifique. Nous nous concentrons sur l'un des détecteurs les plus répandus : le filtre adapté normalisé (NMF). Pour être plus réaliste, nous considérons le cas où la cible peut être hors grille. Il existe actuellement différentes méthodes pour effectuer le test NMF hors grille, mais leurs performances ne sont pas robustes, en particulier lorsque le bruit n'est pas blanc. Dans cet article, une nouvelle méthode basée sur une reparamétrisation est proposée. Tout en ayant un coût de calcul similaire aux techniques de l'état de l'art, ses performances de détection sont toujours meilleures.

Abstract – A general problem in radar is to detect whether the received signal contains a specific signal of interest or not. We focus on one of the most widespread detectors: the NMF. To be more realistic, we consider the case where the target can be off-grid. Currently, different methods exist to perform the off-grid NMF test, but their performances are not robust, especially when the noise is not white. In this paper, a new method based on reparametrization is proposed. While having a computational cost similar to state-of-the-art techniques, its detection performances are always better.

1 Introduction

Un problème courant dans de nombreuses applications, comme en radar, en télécommunications ou encore en sismologie, est celui qui consiste à détecter si le signal reçu contient ou non un signal spécifique. La théorie de la détection propose différentes façons de gérer ce type de problème mais le test du rapport de vraisemblance est le plus commun [4]. Cependant, le rapport de vraisemblance requiert une connaissance de tous les paramètres de la scène, ce qui n'est pas toujours possible. Ainsi, sa version généralisée est plus souvent utilisée en pratique [8].

On s'intéresse principalement dans cet article au filtre adapté normalisé (NMF) monocible qui est un détecteur très populaire dans la littérature radar [1],[5]. Toutefois ce détecteur nécessite la connaissance des paramètres de la cible. Ceux-ci n'étant pas connus, on contourne ce problème en calculant le test NMF sur une grille régulière de l'espace des paramètres. Parfois une étape d'estimation via la technique du monopulse est ajoutée [9]. Cette implémentation est très commune car elle est simple et requiert peu de temps de calcul. Malheureusement, en pratique, les cibles ne sont pas localisées sur la grille, et il est connu que le NMF n'est pas robuste aux cibles hors-grille [7]. De plus, il a récemment été montré que la probabilité de fausse alarme du NMF hors-grille n'est pas répartie uniformément sur l'espace des paramètres quand le bruit n'est plus blanc [3]. Il s'avère alors important de définir convenablement la grille utilisée sur l'espace des paramètres.

Dans ce papier, on propose une stratégie pour approximer le NMF hors-grille en prenant en compte l'impact de la matrice de covariance du bruit. Cette stratégie est basée sur une reparamétrisation de l'espace des paramètres, permettant de régulariser la distribution de la probabilité de fausse alarme. De plus, on montre que ce choix permet également de tenir

compte de la déformation du lobe principal lorsque le bruit n'est pas blanc.

Cet article est organisé de la façon suivante. La section 2 introduit le problème. Dans la section 3, nous proposons une nouvelle façon de choisir la grille puis dans la section 4 nous proposons une méthode générale pour effectuer le test du NMF hors-grille. Finalement, la section 5 est consacrée aux simulations numériques et permet de comparer notre méthode à l'état de l'art.

2 Formulation du problème

En détection radar, on doit choisir entre deux hypothèses : le signal reçu, un vecteur complexe de taille N noté \mathbf{y} , contient seulement du bruit \mathbf{n} ou également un signal d'intérêt $\alpha\mathbf{a}(\theta)$:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{y} = \mathbf{n}, & (\text{bruit}) \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{y} = \alpha\mathbf{a}(\theta) + \mathbf{n}, & (\text{signal} + \text{bruit}) \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{R})$. \mathbf{R} est supposée connue et de trace N , mais pas la puissance σ^2 [6], $\alpha \in \mathbb{C}$ est l'amplitude complexe de la cible supposée inconnue et finalement $\mathbf{a}(\theta)$ est défini par :

$$\mathbf{a}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(1, e^{2i\pi\theta}, \dots, e^{2i\pi(N-1)\theta} \right)^T, \quad (2)$$

avec θ un paramètre inconnu appartenant à $\Theta = [0, 1[$.

La distribution de \mathbf{y} sous \mathcal{H}_0 dépend uniquement de $\lambda_0 = \{\sigma^2\}$ alors qu'elle dépend sous \mathcal{H}_1 de $\lambda_1 = \{\alpha, \sigma^2, \theta\}$.

Dans notre cas, le test du rapport de vraisemblance généralisé fournit le test suivant :

$$\Lambda_{NMF-GLRT} = \max_{\theta} \left| \mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{u} \right|^2 \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \omega^2, \quad (3)$$

$$\text{avec } \mathbf{s}(\theta) = \frac{\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{a}(\theta)}{\|\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{a}(\theta)\|} \text{ et } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{y}}{\|\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{y}\|}.$$

La statistique de ce test sous \mathcal{H}_0 est difficile à obtenir de part le maximum sur Θ . Dans [3], les auteurs ont obtenu l'expression de la probabilité de fausse alarme : $P_{fa} = \mathbb{P}(\Lambda_{NMF-GLRT} \geq \omega^2 | \mathcal{H}_0)$ en fonction du seuil ω , en utilisant une approche géométrique [10]. Cette approche permet de mieux comprendre l'impact de \mathbf{R} .

Lorsque l'on teste une seule valeur pour le paramètre θ , on retrouve la version classique du NMF :

$$\Lambda_{NMF}(\theta) = |\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{u}|^2, \quad (4)$$

En passant directement par les notations complexes au lieu de séparer $\mathbf{s}(\theta)$ en partie réelle et imaginaire, on peut montrer que la relation P_{fa} -seuil fournit dans [3], équation (15), s'écrit :

$$P_{fa} \approx \frac{\Gamma(N) \omega (1 - \omega^2)^{(2N-3)/2}}{\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{2N-1}{2}\right)} \int_{\Theta} v(\theta) d\theta, \quad (5)$$

où l'on a omis le terme correspondant aux bords (qui n'a plus de sens lorsque $\Theta = [0, 1]$), où $\Gamma(\cdot)$ correspond à la fonction gamma et où $v(\theta)$:

$$\begin{aligned} v(\theta) &= \left[\|\mathbf{s}'(\theta)\|^2 + (\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{s}'(\theta))^2 \right]^{1/2}, \\ &= \left[\|\mathbf{s}'(\theta)\|^2 - |\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{s}'(\theta)|^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Avec $\mathbf{s}'(\theta)$ la dérivée de $\mathbf{s}(\theta)$ par rapport à θ . Cette dernière égalité vient notamment du fait que $\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{s}(\theta) = 1$, d'où l'on déduit $(\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{s}(\theta))' = 0$ puis $\text{Re}(\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{s}'(\theta)) = 0$. Dans (5), la contribution de $v(\theta) d\theta$ est proportionnelle à la probabilité de fausse alarme dans l'intervalle $[\theta, \theta + d\theta]$. Lorsque $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, on peut facilement montrer que v est constante et donc que la distribution des fausses alarmes est uniforme sur $[0, 1]$. Mais ce n'est plus le cas en bruit non blanc. En ce sens, on peut dire que \mathbf{R} induit une distorsion de la variété $\mathbf{s}(\Theta) \triangleq \{\mathbf{s}(\theta), \theta \in \Theta\}$. Cette distorsion implique qu'une grille régulière dans l'espace des paramètres Θ ne correspond pas à des vecteurs $\mathbf{s}(\theta)$ régulièrement espacés le long de la variété $\mathbf{s}(\Theta)$. Dans la section suivante, on propose alors de choisir une nouvelle grille sur Θ qui prend en compte l'impact de la matrice de covariance du bruit.

3 Une nouvelle grille dépendante de \mathbf{R}

Pour calculer le test $\Lambda_{NMF-GLRT}$, équivalent au maximum du NMF sur un espace de paramètre continu, le test NMF doit d'abord être évalué pour des valeurs θ_i correspondant à une grille sur Θ . Cette grille est généralement régulière sur Θ et comprend N points. Cependant, tester des valeurs θ_i régulièrement espacées n'est pas équivalent à tester des points régulièrement espacés sur $\mathbf{s}(\Theta)$ lorsque $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$.

3.1 Une grille irrégulière

Commençons par définir la fonction $\ell(\cdot)$:

$$\ell : \theta \in \Theta \rightarrow \int_0^\theta v(u) du. \quad (7)$$

ℓ est à valeur dans $\mathcal{L} = [0, L_{tot}]$, où

$$L_{tot} = \ell(1) = \int_0^1 v(u) du. \quad (8)$$

Connaissant la valeur prise par L_{tot} , on peut diviser l'espace en N portions de telle sorte que $(\ell(\theta_{i+1}) - \ell(\theta_i)) = \frac{L_{tot}}{N}$. Cette procédure fournit un ensemble de valeurs $\{\theta_i\}$ qui ne sont pas nécessairement régulièrement espacées sur Θ , mais les vecteurs correspondant $\{\mathbf{s}(\theta_i)\}_i$ sont régulièrement espacés sur $\mathbf{s}(\Theta)$. Cela nous permet de traiter la distorsion de la variété.

3.2 Impact sur la P_{fa}

Par construction de cette grille et de par l'équation (5), il est direct de démontrer que la P_{fa} est constante sur chaque intervalle $[\theta_i, \theta_{i+1}]$.

3.3 Impact sur la forme du lobe principal

Dans cette sous-section, on prouve que la reparamétrisation proposée crée des lobes principaux qui sont localement identiques. Rappelons que la forme du lobe principal est décrite par ce qu'on appelle communément la fonction d'ambiguïté et qui correspond à la réponse du NMF en θ pour une cible ayant pour paramètre θ_0 soit :

$$A_{\theta_0}(\theta) = |\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{s}(\theta_0)|^2 = \text{Tr}(\mathbf{S}(\theta) \mathbf{S}(\theta_0)),$$

où $\mathbf{S}(\theta) = \mathbf{s}(\theta) \mathbf{s}^H(\theta)$.

Lemme 1. La dérivée seconde de $A_{\theta_0} \circ \ell^{-1}$ en $x = x_0$, tel que $\ell^{-1}(x_0) = \theta_0$, est indépendante de θ_0 .

Démonstration. Puisque le vecteur $\mathbf{s}(\theta)$ est normalisé, on a :

$$\text{Tr}(\mathbf{S}(\theta) \mathbf{S}(\theta)) = 1. \quad (9)$$

En dérivant deux fois (9), on obtient :

$$\begin{cases} \text{Tr}(\mathbf{S}'(\theta) \mathbf{S}(\theta)) = 0, \\ \text{Tr}(\mathbf{S}''(\theta) \mathbf{S}(\theta)) + \text{Tr}(\mathbf{S}'(\theta) \mathbf{S}'(\theta)) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Ensuite, puisque $A''_{\theta_0}(\theta) = \text{Tr}(\mathbf{S}''(\theta) \mathbf{S}(\theta_0))$, on peut en déduire :

$$A''_{\theta_0}(\theta_0) = -\text{Tr}(\mathbf{S}'(\theta_0) \mathbf{S}'(\theta_0)). \quad (11)$$

Or, comme :

$$\mathbf{S}'(\theta) = \mathbf{s}'(\theta) \mathbf{s}^H(\theta) + \mathbf{s}(\theta) \mathbf{s}'^H(\theta), \quad (12)$$

on peut utiliser la linéarité de la trace ainsi que son invariance par permutation circulaire, ajouté au fait que $\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{s}'(\theta) \in j\mathbb{R}$ (voir fin de la section 2) impliquant $(\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{s}'(\theta))^2 \in \mathbb{R}$, ce qui permet de déduire :

$$\text{Tr}(\mathbf{S}'(\theta) \mathbf{S}'(\theta)) = 2(\mathbf{s}'^H(\theta) \mathbf{s}'(\theta) + (\mathbf{s}^H(\theta) \mathbf{s}'(\theta))^2). \quad (13)$$

En utilisant alors la dérivation de fonctions composées et le fait que $A'_{\theta_0}(\theta_0) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} A''_{\theta_0}(\ell^{-1}(x_0)) &= -2 \left[(\ell^{-1})'(x_0) \right]^2 \left[\|\mathbf{s}'(\theta_0)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{s}^H(\theta_0) \mathbf{s}'(\theta_0))^2 \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$= -2 \left[(\ell^{-1})'(x_0) \right]^2 v^2(\theta_0). \quad (15)$$

Il faut alors remarquer que par définition de ℓ^{-1} , on a :

$$(\ell^{-1})'(x_0) = \frac{1}{v \circ \ell^{-1}(x_0)} = \frac{1}{v(\theta_0)}, \quad (16)$$

où $v(\theta_0)$ est défini par l'équation (6). Finalement :

$$A''_{\theta_0}(\ell^{-1}(x_0)) = -2, \quad \forall \theta_0. \quad (17)$$

□

Ce Lemme nous permet d'affirmer que dans l'espace reparamétrisé, les lobes principaux ont tous la même forme localement, ce qu'on peut constater notamment sur la figure 1. Ainsi, le critère initialement basé sur la P_{fa} est également intéressant du point de vue de la détection.

Dans la prochaine section on va présenter différentes ap-

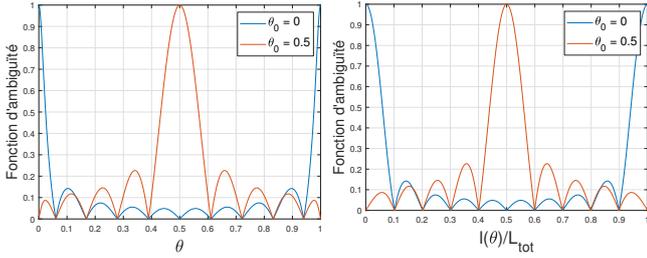


FIGURE 1 : Forme des lobes principaux avant (gauche) et après (droite) reparamétrisation.

proches pour évaluer le test $\Lambda_{NMF-GLRT}$. Les deux premières constituent l'état de l'art et la dernière est la méthode proposée.

4 Calcul du NMF hors-grille

4.1 La méthode classique du monopulse

Une approche populaire en radar est la méthode du monopulse [9]. C'est une approximation efficace du maximum de vraisemblance du paramètre de la cible. Le principe est le suivant :

1) La grille considérée est régulière : $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$, avec un pas $\delta_\theta = \frac{1}{N}$ correspondant à la résolution dans le cas blanc.

2) Les estimations du paramètre $\{\hat{\theta}_i\}$ entre deux points de grille sont calculées de la façon suivante :

$$\hat{\theta}_i = \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} + \frac{\delta_\theta \Lambda_{NMF}(\theta_{i+1})^{\frac{1}{2}} - \Lambda_{NMF}(\theta_i)^{\frac{1}{2}}}{2 \Lambda_{NMF}(\theta_{i+1})^{\frac{1}{2}} + \Lambda_{NMF}(\theta_i)^{\frac{1}{2}}}. \quad (18)$$

3) Puisque pour estimer $\{\hat{\theta}_i\}$, on utilise le NMF sur la grille $\{\theta_i\}$, l'approximation du NMF hors-grille $\Lambda_{NMF-GLRT}$ est alors :

$$\hat{\Lambda}_{NMF-GLRT} = \max_{\theta \in \{\theta_i\} \cup \{\hat{\theta}_i\}} \Lambda_{NMF}(\theta). \quad (19)$$

4.2 Estimer avant la distortion, une première façon d'améliorer les performances

Pour contrer l'erreur d'estimation dans le cas $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$, la méthode proposée dans [2] est la suivante :

1) La grille est la même que pour la méthode précédente.

2) L'estimation du paramètre $\{\hat{\theta}_i\}$ entre deux points de la grille est calculée toujours selon le principe du monopulse mais en considérant le bruit comme blanc et en utilisant une fonction g appropriée :

$$\hat{\theta}_i = \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} + g^{-1} \left(\frac{|\mathbf{a}^H(\theta_{i+1}) \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{y}|^2}{|\mathbf{a}^H(\theta_{i+1}) \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{y}|^2} \right), \quad (20)$$

où g est définie dans [2], équation (9).

3) Finalement, l'approximation du test $\Lambda_{NMF-GLRT}$ associée à cette méthode est :

$$\hat{\Lambda}_{NMF-GLRT} = \max_{\theta \in \{\hat{\theta}_i\}} \Lambda_{NMF}(\theta). \quad (21)$$

À fort rapport signal à bruit, cette méthode fournit de bonnes performances car l'impact du bruit est alors limité, rendant l'estimation plus pertinente que dans le cas du monopulse classique. Ce n'est plus le cas à faible rapport signal à bruit.

4.3 Reparamétrisation et monopulse (proposée)

Dans cette article, on propose de résoudre le problème lié à la distortion en reparamétrisant l'espace du paramètre. Au lieu d'utiliser une grille régulière dans Θ , on propose de définir une grille régularisée dans l'espace $\mathcal{L} = \ell(\Theta)$; la grille associée dans Θ , obtenue en appliquant ℓ^{-1} , n'est alors plus nécessairement régulière. La méthode proposée est alors la suivante :

1) On définit une grille $\{x_i\}$ sur \mathcal{L} qui correspond à des valeurs irrégulièrement espacées $\{\theta_1, \dots, \theta_N\} = \{\ell^{-1}(x_1), \dots, \ell^{-1}(x_N)\}$ sur Θ , comme proposé dans la sous partie 3.1. Le pas entre deux valeurs successives : $x_{i+1} - x_i$ est $\delta_x = \frac{L_{tot}}{N}$.

2) Les estimations $\{\hat{x}_i\}$, entre deux points de grille sont calculées de la façon suivante :

$$\hat{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{\delta_x \Lambda_{NMF}(\ell^{-1}(x_{i+1}))^{\frac{1}{2}} - \Lambda_{NMF}(\ell^{-1}(x_i))^{\frac{1}{2}}}{2 \Lambda_{NMF}(\ell^{-1}(x_{i+1}))^{\frac{1}{2}} + \Lambda_{NMF}(\ell^{-1}(x_i))^{\frac{1}{2}}}. \quad (22)$$

3) Puisque pour estimer $\{\hat{x}_i\}$ on a besoin d'évaluer le NMF sur la grille $\{\ell^{-1}(x_i)\}$, l'approximation de NMF hors-grille $\Lambda_{NMF-GLRT}$ est donc :

$$\hat{\Lambda}_{NMF-GLRT} = \max_{x \in \{x_i\} \cup \{\hat{x}_i\}} \Lambda_{NMF}(\ell^{-1}(x)). \quad (23)$$

Il faut également noter que l'évaluation de la fonction ℓ^{-1} est négligeable en terme de coût de calcul puisque celle-ci peut être tabulée. À noter que le nombre d'évaluations du NMF est identique pour les 3 méthodes.

5 Simulations

Dans cette partie, on compare les performances des différentes méthodes précédentes. Pour cela, on présente en Figure 2 la probabilité de détection de chacune en fonction du paramètre de la cible θ et également en fonction du rapport signal à bruit,

noté SNR et défini par $SNR(\alpha, \theta) = \frac{|\alpha|^2}{\|\mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{a}(\theta)\|^2}$. La matrice de covariance du bruit est définie comme $\mathbf{R}(0.95)$ en utilisant le modèle classique de bruit de fond :

$$\mathbf{R}(\rho) = \mathcal{T}([1, \rho, \dots, \rho^{N-1}]), \quad (24)$$

où $\mathcal{T}(\cdot)$ est l'opérateur de Toeplitz.

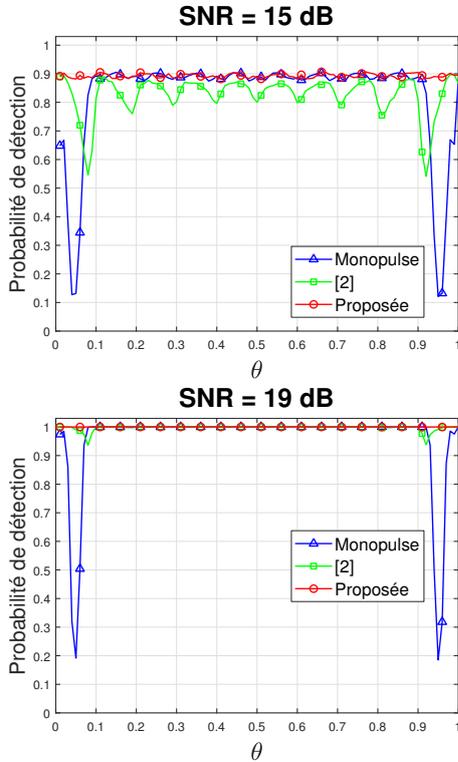


FIGURE 2 : Comparaison des performances de détection avec $\mathbf{R} = \mathbf{R}(0.95)$, en utilisant le même seuil ω pour toutes les méthodes de sorte que la P_{fa} théorique globale sur Θ définie dans l'équation (5) soit égale à 10^{-3} .

Dans toutes les simulations effectuées, la méthode proposée a fournit des meilleures performances que les deux autres indépendamment de la matrice de covariance du bruit. De plus, on peut voir Figure 2 que ses performances semblent très peu dépendre du paramètre de la cible, ce qui est une caractéristique recherchée. Son coût de calcul est équivalent à celui des deux autres méthodes de l'état de l'art et correspond à seulement deux fois le coût du test sur grille.

De plus, la P_{fa} (approximée en utilisant le principe de Monte Carlo) de la stratégie proposée, en rouge dans la figure 3, est la plus proche de la P_{fa} théorique de l'équation 5. Ceci est un autre indicateur de l'efficacité de notre méthode à approximer le NMF hors-grille $\Lambda_{NMF-GLRT}$.

6 Conclusion

Dans cet article nous proposons une solution au problème des cibles hors-grille pour le NMF. En particulier, nous introduisons une grille irrégulière ainsi qu'une méthode d'estimation inspirée du monopulse appliquée sur un espace reparamétrisé. Les simulations montrent que cette méthode est la meilleure approximation du test $\Lambda_{NMF-GLRT}$ tout en ayant un coût de

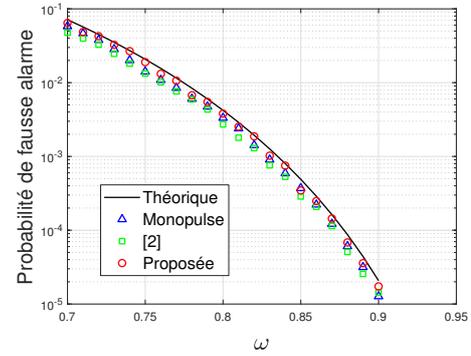


FIGURE 3 : Comparaison des relations P_{fa} -seuil avec $\mathbf{R} = \mathbf{R}(0.95)$

calcul similaire. Finalement, cette procédure peut être directement étendue au filtre adapté hors-grille en utilisant exactement la même reparamétrisation.

Références

- [1] E. CONTE, M. LOPS et G. RICCI : Adaptive matched filter detection in spherically invariant noise. *IEEE Signal Processing Letters*, 3(8):248–250, 1996.
- [2] P. DEVELTER, J. BOSSE, O. RABASTE, P. FORSTER et J.-P. OVARLEZ : Off-grid radar target detection with the normalized matched filter : A monopulse-based detection scheme. In *2021 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, pages 226–230. IEEE, 2021.
- [3] P. DEVELTER, J. BOSSE, O. RABASTE, P. FORSTER et J.-P. OVARLEZ : On the false alarm probability of the normalized matched filter for off-grid targets : A geometrical approach and its validity conditions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 72:982–996, 2024.
- [4] S. M. KAY : *Fundamentals of statistical signal processing : estimation theory*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [5] S. KRAUT, L. L. SCHARF et L. T. MCWHORTER : Adaptive subspace detectors. *IEEE Transactions on signal processing*, 49(1):1–16, 2001.
- [6] E. OLLILA, D. E. TYLER, V. KOIVUNEN et H. V. POOR : Complex elliptically symmetric distributions : Survey, new results and applications. *IEEE Transactions on signal processing*, 60(11):5597–5625, 2012.
- [7] O. RABASTE, J. BOSSE et J.-P. OVARLEZ : Off-grid target detection with normalized matched subspace filter. In *2016 24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 1926–1930. IEEE, 2016.
- [8] L. L. SCHARF et C. DEMEURE : *Statistical signal processing : detection, estimation, and time series analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [9] S. SHERMAN et D. BARTON : *Monopulse principles and techniques*. Artech House, 2011.
- [10] H. WEYL : On the volume of tubes. *American Journal of Mathematics*, 61(2):461–472, 1939.