

Du spot d’Arago à l’optimisation des occulteurs à pétales pour la détection d’exo-Terres

Claude AIME¹ Simon PRUNET¹ Céline THEYS¹

¹Université Côte d’Azur, Observatoire de la Côte d’Azur, CNRS, parc Valrose, 06108 Nice, France

Résumé – Les occulteurs à pétales sont des dispositifs optiques géants conçus pour être utilisés en astronomie spatiale afin de bloquer la lumière d’une étoile et ainsi permettre l’observation directe des exoplanètes. Dans cette étude, nous montrons comment, grâce à une optimisation de la forme de l’occulteur visant à minimiser la diffraction, qui dans le cas d’un occulteur circulaire se manifeste par le spot d’Arago, il est possible de concevoir des occulteurs capables de créer une ombre d’intensité relative inférieure à 10^{-12} , ouvrant ainsi la voie à l’observation d’une exo-Terre.

Abstract – Petal-shaped occulters are giant optical devices designed for use in space astronomy to block the light of a star, thereby enabling the direct observation of exoplanets. In this study, we demonstrate how, through an optimization of the occulter’s shape to minimize diffraction, which in the case of a circular occulter manifests as the Arago spot, it is possible to design occulters capable of creating a shadow of relative intensity lower than 10^{-12} , paving the way for the observation of an Earth-like exoplanet.

1 Introduction

L’efficacité des systèmes à occulteur externe est parfaitement illustrée par les éclipses solaires, lorsque la Lune masque le disque solaire et permet d’observer la couronne, dont la luminosité est plusieurs millions de fois plus faible.

Les coronographes solaires à occulteur externe reproduisent ce phénomène à petite échelle. C’est le cas du coronographe ASPIICS [8], récemment lancé dans l’espace, qui repose sur deux satellites volant en formation à 150 mètres l’un de l’autre : l’un porte un disque occulteur de 1,42 m de diamètre, tandis que l’autre embarque un coronographe de Lyot.

Observer des exoplanètes exige cependant des dispositifs à des échelles bien plus grandes. La luminosité d’une exo-Jupiter ou d’une exo-Terre est entre 10^{-6} et 10^{-10} de celle de son étoile parente, voire moins, et les distances angulaires bien inférieures à la seconde d’arc pour les exoplanètes les plus proches. Une configuration type prévoit un occulteur de 70 m de diamètre placé à plus de 100 000 km d’un télescope de 4m, afin de masquer la lumière de l’étoile et de permettre la détection directe des exoplanètes.

On pourrait croire que l’étude de ces systèmes est simple, mais la diffraction de Fresnel introduit des effets inattendus. Le plus connu est le spot d’Arago, mis en évidence par les calculs de Poisson pour contester la théorie de Fresnel il y a plus de deux siècles. Ce phénomène montre qu’un occulteur circulaire, même de très grand diamètre, est inefficace pour l’observation des exoplanètes. Depuis la proposition de Cash[4], les recherches ont démontré qu’un occulteur en forme de fleur, avec des pétales soigneusement conçus, est nécessaire.

La présente contribution va de l’étude du spot d’Arago à l’optimisation des occulteurs à pétales pour la détection des exo-Terres. En utilisant une décomposition sur une base de fonctions portes, on atteint un taux de réjection de la lumière de l’étoile de 10^{-12} . C’est une performance comparable aux résultats publiés avec SISTER[6], obtenus par une approche totalement différente décrite dans [9], qui impose un taux de réjection de 10^{-10} sur l’ensemble de la pupille du télescope.

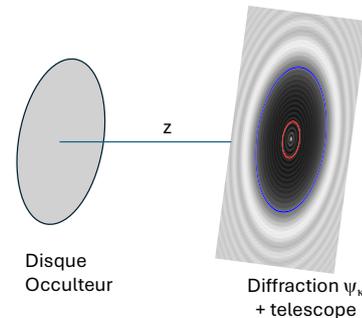


FIGURE 1 : Schéma de principe d’un coronographe à occulteur externe utilisant un simple disque. La figure de diffraction est représentée dans le plan du télescope où le cercle rouge indique sa pupille, perturbée en son centre par le spot d’Arago.

2 Diffraction de Fresnel d’un occulteur

La Fig.1 donne un schéma de principe d’un coronographe à occulteur externe utilisant un disque. La structure brillante au centre de l’ombre est le spot d’Arago, qui est le point de départ de notre étude dans cette communication.

L’étoile est modélisée comme une source ponctuelle à l’infini produisant une onde plane au niveau de l’occulteur. L’amplitude complexe diffractée par un occulteur de transmission $t(x, y)$ à la distance z et à la longueur d’onde λ s’écrit, dans le cadre de l’approximation de Fresnel, par la convolution spatiale de l’occulteur par un terme de phase quadratique normé par $i\lambda z$:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= t(x, y) * \frac{1}{i\lambda z} \exp(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}) \\ &= 1 - f(x, y) * \frac{1}{i\lambda z} \exp(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}), \end{aligned} \quad (1)$$

où $f(x, y) = 1 - t(x, y)$ est l’écran complémentaire. Cette propriété vient du théorème de Babinet qui se démontre facile-

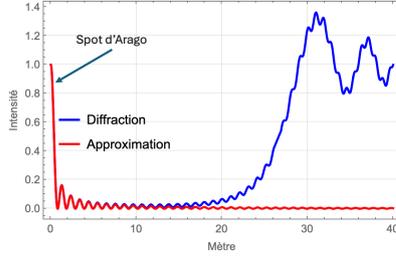


FIGURE 2 : Coupe de l'intensité produite par un disque occulteur, $R = 25\text{m}$, $z = 80000\text{ km}$, $\lambda = 650\text{ nm}$, calculée par l'Eq. 2 et son approximation, Eq. 3.

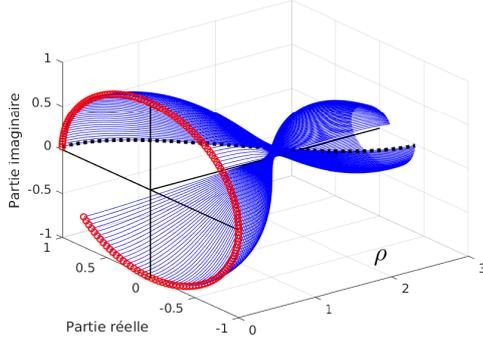


FIGURE 3 : Amplitude complexe $\psi_k(\rho, \lambda)$ dans le plan d'Argand (partie réelle et imaginaire) le long d'un rayon au centre de l'ombre du spot d'Arago pour ρ de 0 à 3m (Eq.3 et Fig.1). Les points rouges sur le cercle unité donnent la phase du point central $\pi R_k^2/(\lambda z)$. Les courbes sont calculées pour $z = 80000\text{km}$, $\lambda = 650\text{nm}$ et pour 150 disques de valeurs R_k de 10.22m à 14m par pas de 2.5cm. La courbe pour $R = R_1$ est surlignée par un pointillé noir.

ment. L'avantage de cette approche est que $f(x, y)$ est limitée à la dimension de l'occulteur. A ce jour, toutes les transmissions considérées sont réelles entre 0 et 1 (pas d'occulteur de phase).

Pour un occulteur présentant une symétrie de révolution et une transmission $f(r)$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, l'amplitude complexe de la diffraction s'écrit :

$$\psi(\rho) = 1 - \frac{\tau_z(\rho)}{i\lambda z} \int_0^R 2\pi r f(r) \tau_z(r) J_0(2\pi \frac{r\rho}{\lambda z}) dr, \quad (2)$$

où $\tau_z(r) = \exp(i\pi r^2/\lambda z)$ est le terme de phase quadratique et $J_0(r)$ la fonction de Bessel de première espèce. La position spatiale est notée r dans le plan de l'occulteur et ρ dans le plan de la pupille du télescope.

Dans le cas général, le calcul de Eq.(2) n'est pas analytique. Dans le cas particulier d'un disque occulteur de rayon R , $f(r) = 1$ pour $0 \leq r \leq R$ et 0 ailleurs, Eq.2 prend la forme d'une série de Lommel[1] :

$$\psi(\rho, \lambda) = \tau_z(R) \tau_z(\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{iR}\right)^n J_n\left(\frac{2\pi\rho R}{z\lambda}\right) \quad (3)$$

Les premiers termes de cette série donnent une très bonne approximation de l'amplitude complexe de l'onde au centre de l'ombre dans la zone du spot d'Arago. Dans l'étude présentée

ici on montre ce que l'on peut obtenir en se limitant au premier terme, en lieu et place du calcul numérique de Eq.2.

La Fig. 2 présente une comparaison entre formule exacte (Eq. 2) et approchée (Eq. 3, un terme). La comparaison est faite pour les intensités diffractées, module au carré de l'amplitude complexe. La partie centrale est le spot d'Arago, dont le premier passage par zéro est déterminé par la fonction de Bessel qui se produit à $\rho \sim 0.38\lambda z/R$, soit à environ 80 cm du centre pour les paramètres z, λ et R , indiqués dans le commentaire de la figure. La différence en intensité entre les courbes exactes et l'approximation est inférieure à 10^{-4} sur un diamètre central de 1m. Le centre du spot d'Arago conserve la même intensité que l'onde incidente, rendant un occulteur disque inadapté à l'observation d'une exoplanète.

Le spot d'Arago présente en fait une amplitude complexe qui varie rapidement en fonction du rayon de l'occulteur, et nous allons utiliser cette propriété. Dans la Fig. 3, nous montrons l'évolution de cette amplitude complexe pour différentes valeurs R_k du rayon du disque occulteur, et ceci pour ρ variant de 0 à 3 m. La phase du point central à $\rho = 0$ vaut $\pi R_k^2/\lambda z$, ce que l'on obtient avec Eq. 3. Nous montrons dans la section suivante comment utiliser cette propriété. Une rotation de la phase de $2k\pi$ s'effectue chaque fois que le rayon du disque croit de R à $\sqrt{R^2 + 2k\lambda z}$, un résultat qui a des implications sur les dimensions des pétales des occulteurs. Les $\{R_k\}$ peuvent être equispacés, ou suivre un échantillonnage particulier entre les rayons minimaux R_m et R_M .

3 Occulteur apodisé

Nous reprenons en partie la présentation décrite dans [5], où la fonction $f(r)$ est décomposée sur une base de fonctions trapèze. Les calculs de l'Eq. 2 avaient été effectués en utilisant *Mathematica*. Cependant, cela impliquait un coût élevé en temps de calcul.

Dans le calcul présenté ici nous utilisons une décomposition sur une base de fonctions portes dont la diffraction de Fresnel est définie par la série de Lommel Eq. 3. Nous nous limitons ici au premier terme, ce qui permet d'effectuer des calculs très rapides qui vont permettre l'analyse de paramètres tels que les dimensions et distances des occulteurs, et la taille des pétales. La décomposition de $f(r)$ devient :

$$f(r) = \sum_{k=1}^K \alpha_k f_k(r) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \Pi\left(\frac{r}{R_k}\right) \quad (4)$$

où les R_k sont un ensemble de K valeurs de rayons R , comme illustré pour le principe dans la Fig.4.

Avec cette décomposition sur une base de fonctions portes, l'amplitude complexe au point ρ s'écrit comme la somme pondérée de fonctions $\psi_k(\rho, \lambda)$, Eq.3 :

$$\psi(\rho, \lambda) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \psi_k(\rho, \lambda) \quad (5)$$

soit

$$\psi(\rho, \lambda) = \exp(i\pi \frac{\rho^2}{\lambda z}) \sum_{k=1}^K \alpha_k \exp(i\pi \frac{R_k^2}{\lambda z}) J_0(2\pi \frac{\rho R_k}{\lambda z}), \quad (6)$$

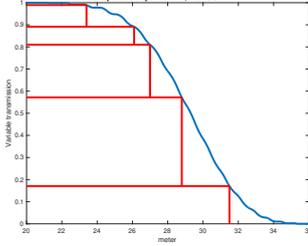


FIGURE 4 : Exemple de fonction $f(r)$ (en bleu) approximée par $K = 5$ fonctions portes $\Pi(\frac{r}{R_k})$ (en rouge), Eq. (4)

et son intensité :

$$I(\rho, \lambda) = |\psi(\rho, \lambda)|^2 = \left| \sum_{k=1}^K \alpha_k \exp(i\pi \frac{R_k^2}{\lambda z}) J_0(2\pi \frac{\rho R_k}{\lambda z}) \right|^2 \quad (7)$$

soit

$$I(\rho, \lambda) = \sum_{k,l=1}^{K,K} \alpha_k \alpha_l \cos(\pi \frac{R_k^2 - R_l^2}{\lambda z}) J_0(2\pi \frac{\rho R_k}{\lambda z}) J_0(2\pi \frac{\rho R_l}{\lambda z}) \quad (8)$$

Eq.8 est une forme quadratique en α que l'on peut mettre classiquement sous la forme matricielle :

$$I(\rho, \lambda) = \alpha^T \mathbf{K}(\rho, \lambda) \alpha \quad (9)$$

avec $\mathbf{K}_{k,l}(\rho, \lambda) = \left[\cos(\pi \frac{R_k^2 - R_l^2}{\lambda z}) J_0(2\pi \frac{\rho R_k}{\lambda z}) J_0(2\pi \frac{\rho R_l}{\lambda z}) \right]$ et $\alpha^T = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_K]$.

Le flux parasite résiduel Γ du à l'étoile contenu dans une zone centrale circulaire de rayon ρ_M (avec ρ_M supérieur au rayon du télescope) et pour une bande passante $\Delta\lambda = \lambda_M - \lambda_m$ s'écrit :

$$\Gamma = \alpha^T \cdot \frac{2\pi}{\Delta\lambda} \int_{\lambda_m}^{\lambda_M} \int_0^{\rho_M} \rho \mathbf{K}(\rho, \lambda) d\rho d\lambda \alpha = \alpha^T \cdot \mathbf{K}_\Gamma \cdot \alpha \quad (10)$$

Où $\mathbf{K}(\rho, \lambda)$ et \mathbf{K}_Γ sont des matrices $K \times K$.

Optimisation des paramètres α

Cette partie reprend la démarche de [5]. Le problème à résoudre est alors de trouver les coefficients α qui minimisent le flux résiduel Γ , Eq. (10) :

$$\min_{\alpha} \alpha^T \cdot (\mathbf{K}_\Gamma + \mu I) \cdot \alpha \quad (11)$$

La matrice \mathbf{K}_Γ étant mal conditionnée, l'ajout de μ sur sa diagonale améliore sa stabilité numérique. Cela équivaut à introduire un terme de régularisation $\mu \|\alpha\|^2$ imposant ainsi une contrainte de douceur sur α .

Des conditions sur α s'ajoutent, illustrées par la Fig.4. Étant donné que les K fonctions portes sont toutes égales à 1 pour $\rho \leq R_1$, il en résulte la condition $\sum_k \alpha_k = 1$. Ensuite, pour $R_1 \leq \rho \leq R_2$, la condition devient $0 \leq \sum_{k=2}^K \alpha_k \leq 1$ et ainsi de suite jusqu'à $0 \leq \alpha_K \leq 1$ pour $R_{K-1} \leq \rho \leq R_K$.

Ces conditions peuvent être mises sous la forme matricielle : $\mathbf{A}\alpha \geq \mathbf{b}$ avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Le problème de Eq.11 devient alors :

$$\min_{\alpha} \alpha^T \cdot (\mathbf{K}_\Gamma + \mu I) \cdot \alpha \quad (13)$$

$$s.c. \mathbf{A}\alpha \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{1}^T \alpha = 1 \quad (14)$$

Pour ce problème d'optimisation d'un critère quadratique avec contraintes d'égalité et d'inégalité, plusieurs méthodes existent dans la littérature [3]. La contrainte d'inégalité exclut toute solution analytique du type de celle proposée dans [10].

Nous avons utilisé `quadprog` de MATLAB, qui implémente un algorithme de point intérieur. Afin d'assurer la précision requise pour atteindre le flux résiduel le plus faible possible, le nombre d'itérations et la précision ont été significativement augmentés. Un exemple de flux résiduel obtenu après optimisation des α avec $K = 601$ fonctions porte, ainsi que la transmission $f(r)$ correspondant sont donnés dans la Fig. 5. La valeur $K = 601$ a été choisie car au-delà, le flux résiduel ne diminue plus significativement.

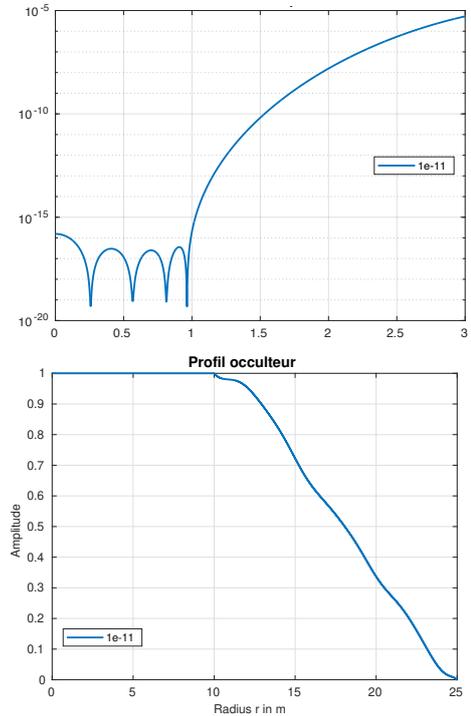


FIGURE 5 : Calculs utilisant le premier terme de Eq.3 avec $\lambda = 650\text{nm}$, $\mu = 10^{-11} \max_{k,l}(\mathbf{K}_\Gamma)$ et $\rho_M = 1\text{m}$. Les 601 R_K varient linéairement de 15m à 25m. Haut : intensité $I(\rho, \lambda)$ pour ρ de 0 à 3m. Bas : transmission de l'occulteur $f(r)$ correspondant.

4 Occulteur à pétales

En pratique, un occulteur à transmission variable de plusieurs dizaines de mètres de diamètre ne peut être réalisé. Les occulteurs à pétales ont été proposés [4] pour reproduire, en moyenne azimutale, la transmission des occulteurs apodisés. La Fig. 6 (haut) donne la transmission en tout ou rien $t(x, y)$ de l'occulteur à 24 pétales calculée à partir de la transmission variable $f(r)$ de la Fig. 5.

Pour un nombre de pétales suffisamment grand [9], la partie centrale de la figure de diffraction dans le plan de la pupille du télescope se rapproche fortement de celle de l'occulteur apodisé, là où se trouve le télescope. C'est ce que nous avons vérifié en calculant directement la figure de diffraction bidimensionnelle de l'occulteur apodisé, selon l'Eq. 1, sans les approximations ayant conduit à la forme $f(r)$.

La convolution est généralement réalisée via une transformée de Fourier discrète, mais le caractère binaire du masque impose de choisir un échantillonnage extrêmement élevé. Nous avons ici opté pour une méthode de calcul différente que nous avons décrite récemment [2] et qui repose sur une approximation polygonale du contour de l'occulteur à pétales.

La transformée de Fourier spatiale de la fonction indicatrice d'un polygone peut être exprimée comme une somme discrète impliquant les points médians des arêtes du polygone [11, 7]. Pour un polygone à symétrie centrale, la transformée de

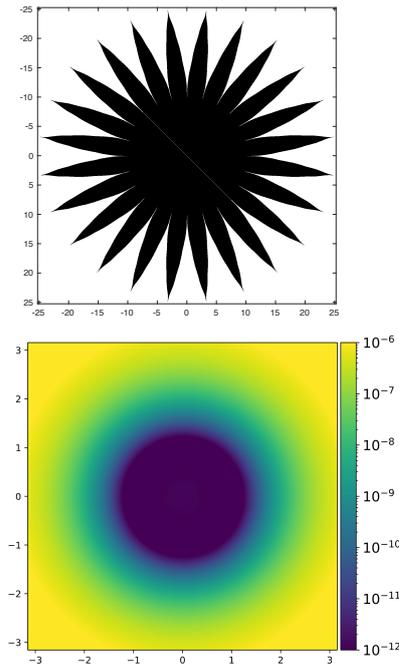


FIGURE 6 : Haut : occulteur binaire à pétales $t(x, y)$, dont l'intégrale circulaire donne la transmission radiale $1 - f(r)$. Bas : intensité $I(\rho, \lambda)$ calculée pour cet occulteur à pétales approché par des polygones à 96000 sommets. L'intensité relative est inférieure à 10^{-12} dans un disque de rayon 1m et inférieure à 10^{-8} dans un disque de rayon 2m.

Fourier continue de la fonction indicatrice s'écrit ainsi :

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{2}{i\pi k^2} \sum_{j=1}^{N/2} [\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}, \mathbf{e}_j] \text{sinc}(2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_j) \text{sinc}(2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j) \quad (15)$$

avec $\mathbf{e}_j = (\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j)/2$ et $\mathbf{r}_j = (\mathbf{v}_{j+1} + \mathbf{v}_j)/2$, \mathbf{v}_j les sommets du polygone, et \mathbf{k} le vecteur d'onde spatial.

Ce terme $\hat{f}(\mathbf{k})$ est utilisé comme transformée de Fourier continue de $f(x, y)$, Eq.1 que l'on multiplie ensuite par la transformée de Fourier de la phase quadratique. L'intensité $I(\rho, \lambda)$ est alors obtenue par transformée de Fourier inverse de ce produit, Fig. 6 Bas.

5 Conclusion

Les résultats obtenus confirment l'efficacité de l'approximation analytique dans l'optimisation des occulteurs externes.

Nous avons construit une approximation polygonale de l'occulteur à 24 pétales (Fig. 6), permettant d'obtenir une intensité lumineuse inférieure à 10^{-12} fois l'intensité incidente, sur un disque de rayon égal à 1m, au niveau de la pupille du télescope, comme illustré dans la Fig. 6, Bas.

L'ombre obtenue avec l'occulteur à pétales est toutefois moins sombre que celle produite par l'occulteur apodisé (Fig.5), mais elle correspond à un calcul numérique exact pour un occulteur binaire.

Des calculs utilisant plus de termes de la série de Lommel sont en cours. Ils seront également appliqués à une analyse en bande spectrale large.

Une étude des effets des divers défauts instrumentaux reste à entreprendre.

Références

- [1] C. AIME : Theoretical performance of solar coronagraphs using sharp-edged or apodized circular external occulters. *A&A*, 558:A138, octobre 2013.
- [2] C. AIME, S. PRUNET, C. THEYS, A. FERRARI et H. LANTÉRI : A new approach for the numerical calculation of diffraction patterns using starshades. *A&A*, 686:A240, juin 2024.
- [3] Stephen BOYD et Lieven VANDENBERGHE : *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [4] Webster CASH : Detection of earth-like planets around nearby stars using a petal-shaped occulter. *Nature*, 442(7098):51, 2006.
- [5] R. FLAMARY et C. AIME : Optimization of starshades : focal plane versus pupil plane. *A&A*, 569:A28, septembre 2014.
- [6] Sergi R HILDEBRANDT, Stuart B SHAKLAN, Eric J CADY et Margaret C TURNBULL : Starshade imaging simulation toolkit for exoplanet reconnaissance. *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 7(2):021217, 2021.
- [7] Shung-Wu LEE et R. MITTRA : Fourier transform of a polygonal shape function and its application in electromagnetics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 31(1):99–103, 1983.
- [8] R. ROUGEOT, R. FLAMARY, D. GALANO et C. AIME : Performance of the hybrid externally occulted Lyot solar coronagraph. Application to ASPIICS. *A&A*, 599:A2, mars 2017.
- [9] R. J. VANDERBEI, E. CADY et N. J. KASDIN : Optimal Occulter Design for Finding Extrasolar Planets. *Astrophysical Journal*, 665:794–798, août 2007.
- [10] Wasył WASYLKIWSKYJ et Shahram SHIRI : Limits on achievable intensity reduction with an optical occulter. *J. Opt. Soc. Am. A*, 28(8):1668–1676, Aug 2011.
- [11] Joachim WUTTKE : Numerically stable form factor of any polygon and polyhedron. *Journal of Applied Crystallography*, 54(2):580–587, Apr 2021.