

Approximation efficace des LLR pour les canaux à bruit additifs symétriques α -stables

Anne SAVARD

IMT Nord Europe, Institut Mines Télécom, Centre for Digital Systems, F-59653 Villeneuve d'Ascq, France

Résumé – Avec le nombre croissant de dispositifs communicants hétérogènes, les interférences constituent désormais un goulot d'étranglement majeur pour les systèmes sans fil. Celles-ci sont de plus de nature impulsive et peuvent être modélisées par une distribution symétrique α -stable. Sous cette distribution, les rapports de log-vraisemblance (LLR) sont non-linéaires et sans expression analytique, nécessitant ainsi des approximations pour un décodage de canal efficace. Nous étudions ici une approximation non-linéaire des LLR basée sur deux paramètres et montrons que l'arrondi de ces paramètres à l'entier le plus proche n'entraîne qu'une dégradation mineure du taux d'erreur binaire (BER) par rapport aux valeurs optimales. De plus, une efficacité computationnelle est obtenue en fixant un paramètre à une valeur constante et en limitant l'autre à un petit intervalle d'entiers.

Abstract – Due to the growing number of heterogeneous transmitting devices, impulsive interference, that is well modeled by a symmetric α -stable distribution, has become a significant bottleneck in communication systems. This distribution makes Log Likelihood Ratios (LLRs) non-linear and without a closed form, requiring hence approximations for efficient channel decoding. This paper focuses on a two-terms parametric non-linear LLR approximation and shows that rounding these aforementioned two terms to the nearest integer results in a minimal Bit Error Rate (BER) degradation compared to optimized parameters. Moreover, computational efficiency is achieved by setting one parameter to a constant value and by limiting the other to a small set of integers.

1 Introduction

La 5G et les futures générations de réseaux sans fil font face à des réseaux de plus en plus denses et hétérogènes, présentant un nombre croissant d'interférants pour une transmission donnée. Il a récemment été montré, aussi bien dans des études théoriques que des mesures pratiques, que cette interférence présente un caractère impulsif [5, 3] qui n'est pas pris en compte par le modèle Gaussien généralement utilisé.

Plusieurs modèles de bruits impulsifs ont été proposés [11, 14, 1], mais il a été montré que le modèle symétrique α -stable (S α S) modélise au mieux les interférences dans les systèmes de communication sans fil [5, 12], tout en englobant le modèle Gaussien comme cas particulier. Malheureusement, la distribution de probabilité d'une variable aléatoire S α S ne dispose pas d'une expression analytique, rendant compliqué un calcul efficace des rapports de log-vraisemblance (LLR) utilisés pour le codage de canal, comme par exemple pour les codes LDPC (Low-Density Parity Check) [13].

Plusieurs approches ont été proposées afin d'obtenir de façon numérique les LLR via, par ex., des tables de hachage ou encore en exploitant la transformation inverse de Fourier. Récemment, nous avons proposé d'approximer les LLR par une fonction paramétrique à deux variables [8, 10, 9], ces dernières étant la solution d'un problème d'optimisation non-convexe qui peut être résolu de façon supervisée avec des symboles pilotes [8, 10, 9] ou de façon non-supervisée [7, 8, 10]. Nous avons en outre montré numériquement que nos LLR approximations atteignent un taux d'erreur binaire (BER) proche de celui obtenu avec les vrais LLR calculés numériquement et ce sans nécessiter de connaissance a priori ni sur la distribution ni sur les paramètres du bruit. Néanmoins, résoudre numériquement un problème d'optimisation non convexe reste gourmand en ressources de calcul.

Ce papier s'intéresse aux deux variables d'approximation de LLR citées précédemment et porte plus particulièrement sur les questions suivantes :

- i) Quelle est la précision requise afin d'atteindre des BER proches de ceux obtenus avec les paramètres optimaux ou encore les vrais LLRs ?
- ii) Pouvons-nous fixer les paramètres d'approximation à une valeur constante pour une plage donnée des paramètres de bruit sans trop dégrader le BER ?

Nos contributions principales sont que :

- i) Arrondir les paramètres d'approximation optimaux soit à 0.5 le plus proche, soit à l'entier le plus proche n'entraîne qu'une très petite perte d'optimalité en termes de BER.
- ii) Nos simulations numériques suggèrent qu'un des paramètres d'approximation peut être fixé à 3 pour tous les paramètres de bruit S α S considérés, tout en maintenant un BER proche de celui obtenu avec les paramètres d'approximation optimaux. Le second paramètre peut également être choisi comme un nombre entier sans diminution importante du BER. Ainsi, au lieu de résoudre un problème d'optimisation non convexe à chaque transmission, tester un nombre modéré d'approximations de LLR sur des symboles pilote n'entraîne pas de perte importante de BER, tout en étant moins gourmand par rapport aux approches de la littérature.

2 Approximation de LLR en bruit S α S

Dans la suite, nous considérons une transmission binaire sur un canal à bruit additif S α S. Le signal reçu est donné par $Y^n = X^n + Z^n$, où $X^n \in \{-1, +1\}^n$ est la séquence d'entrée encodée par un code LDPC et où la séquence de bruit $Z^n \in \mathbb{R}^n$, supposée indépendante de X^n , suit une distribution S α S caractérisée par deux paramètres : $0 < \alpha \leq 2$ et $\gamma > 0$. Plus précisément, α définit le degré d'impulsivité, i.e. plus α est faible plus le bruit est impulsif ; et γ représente la dispersion du

bruit, i.e. un rôle similaire à la variance dans le cas Gaussien.

Côté récepteur, la séquence reçue Y^n est décodée via l'algorithme de propagation des croyances (BP) qui est alimenté par les LLR définis comme

$$L(Y_i) = \log \frac{p_{Y|X}(Y_i|X_i = +1)}{p_{Y|X}(Y_i|X_i = -1)} = \log \frac{f_{\alpha,\gamma}(Y_i - 1)}{f_{\alpha,\gamma}(Y_i + 1)},$$

où $f_{\alpha,\gamma}(\cdot)$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire S α S. Comme $f_{\alpha,\gamma}(\cdot)$ n'a pas d'expression analytique, un calcul efficace du LLR fait défaut, poussant ainsi vers des approximations de LLR. La Figure 1 représente le LLR obtenu avec un bruit S α S de paramètres $\alpha = 1.4, \gamma = 0.47$ (label 'True LLR'). On peut noter que le LLR est non linéaire et présente deux parties spécifiques : pour des valeurs reçues y proches de zéro, le LLR est linéaire en y , alors que pour des valeurs plus grandes, le LLR suit une fonction inverse. A noter, ce comportement général se retrouve pour toutes autres valeurs des paramètres α et γ , la seule exception étant lorsque $\alpha = 2$, i.e. pour un bruit Gaussien, où le LLR est uniquement linéaire.

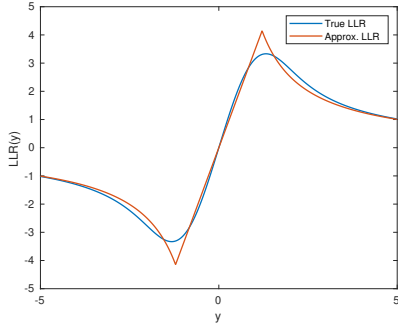


FIGURE 1 : Vrai LLR et approximation paramétrique non-linéaire pour un bruit S α S de paramètres $\alpha = 1.4, \gamma = 0.47$.

Afin de gérer le comportement non-linéaire du LLR tout en préservant une implémentation efficace, comme par ex. celle du LLR linéaire pour le cas Gaussien, plusieurs approximations de LLR ont été proposées, allant d'approximations linéaires paramétriques par morceaux [2, 6] à des approximations non-linéaires non paramétriques [4].

Récemment, nous avons proposé une approximation paramétrique non-linéaire à deux termes [8, 10]. Celle-ci atteint un BER proche de celui obtenu avec les vrais LLR, sans la complexité de calcul associée. De même, nous avons montré qu'un LLR linéaire ne permet pas d'atteindre de bons BER en présence de bruits impulsifs. Exploitant les deux parties observées sur la Figure 1, notre approximation paramétrique non linéaire est donnée par

$$\hat{L}(y) = \begin{cases} ay & \text{si } |y| < \sqrt{b/a} \\ b/y & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

Comme notre approximation repose sur deux paramètres (a, b) , nous avons proposé deux façons d'obtenir leurs valeurs afin de garantir de bonnes performances en termes de BER [8]. Celles-ci sont obtenues comme la solution du problème d'optimisation non-convexe donné en (2) :

$$(a^*, b^*) = \arg \min_{(a,b)} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \log_2 \left(1 + e^{-x_k \hat{L}(y_k)} \right), \quad (2)$$

où $\{x_k, y_k\}_{k \in \{1, K\}}$ représente des couples d'entrées et sortie du canal additif considéré. Ce problème d'optimisation peut être résolu soit de façon supervisée via des symboles pilotes ; soit de façon non-supervisée en émulant habilement une transmission côté récepteur [10]. La Figure 1 représente également cette approximation obtenue comme la solution du problème (2) où $(a^* = 3.42, b^* = 5.03)$. Comme nous pouvons le constater, les LLR approximatés sont proches des vrais, et le faible écart entre les deux n'a qu'un impact très limité en termes de BER [10].

Dans la suite de cet article, nous étudions la précision requise sur les paramètres d'approximation afin de ne pas trop diminuer les performances de BER par rapport à celles obtenues avec les paramètres d'approximation LLR optimaux. De plus, nous étudions si un petit ensemble fixe de paramètres d'approximation permet de donner de bonnes performances en termes de BER pour une plage de bruit S α S, de sorte à ne tester qu'un nombre fini et limité d'approximations sur une séquence pilote au lieu de résoudre un problème d'optimisation non-convexe à chaque transmission.

3 Résultats numériques

Afin de déterminer si des valeurs similaires de paramètres d'approximation (a, b) peuvent couvrir une certaine plage de paramètres α et γ du bruit S α S, nous calculons dans un premier temps les paramètres d'approximation optimaux, i.e. la solution de (2), qui sont donnés dans la Table 1 et la Table 2, et sont moyennés sur 10^4 réalisations de (X^n, Y^n) , où la séquence d'entrée X^n est encodée avec un code LDPC (3, 6) régulier de longueur 20000.

Nous pouvons tout d'abord constater que, pour une dispersion de bruit γ fixée, le paramètre b , qui contrôle la fonction inverse, augmente avec α . En effet, plus α augmente, plus le bruit devient Gaussien, cas pour lequel la valeur optimale de b tend vers $b = \infty$, correspondant à un LLR linéaire. Ensuite, pour un niveau d'impulsivité α fixé, le paramètre a , qui contrôle la partie linéaire, diminue lorsque la dispersion γ du bruit augmente : en effet, lorsque γ augmente, les échantillons reçus sont impactés par une grande amplitude de bruit, et donc leur LLR diminue.

3.1 Impact de l'arrondi en termes de BER

La Table 3 présente le BER en fonction du paramètre de dispersion γ pour $\alpha \in \{1.2, 1.4, 1.6, 1.8\}$ en considérant soit

- i) les paramètres d'approximation optimaux (a^*, b^*) (label 'Opt param');
- ii) les paramètres d'approximation optimaux arrondis au 0.5 ou à l'entier le plus proche (label ' $(\hat{a}, \hat{b})$ ');
- iii) le vrai LLR calculé numériquement (label 'True LLR').

Comme déjà montré dans nos études précédentes [8, 10], notre approximation LLR non linéaire à deux paramètres, couplée à la résolution de (2) (courbe 'Opt param'), atteint des BER très proches de ceux obtenus avec les vrais LLR. Par ailleurs, arrondir les paramètres d'approximation LLR au 0.5 ou à l'entier le plus proche n'introduit qu'une perte de performance minime en termes de BER. De plus, choisir $a = 3$ permet d'obtenir de bonnes performances quelque soient les paramètres du bruit S α S. Même si le second paramètre d'approximation b varie avec α , le choisir comme un entier n'impacte que très peu les performances comparées à celles obtenues avec b^* . Ainsi, de bonnes performances peuvent être

$\alpha \backslash \gamma$	0.35	0.40	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60
1.2	3.99	3.67	3.37	3.31	3.26	3.19	3.14	3.09	3.03	2.98	2.93	2.88	2.82	2.78	2.73	2.68	2.64	2.59
1.4	4.41	3.98	3.57	3.49	3.42	3.34	3.27	3.20	3.12	3.05	2.99	2.92	2.86	2.80	2.73	2.67	2.61	2.56
1.6	5.02	4.41	3.85	3.75	3.64	3.55	3.45	3.36	3.27	3.18	3.09	3.01	2.93	2.85	2.77	2.70	2.63	2.56
1.8	6.00	5.06	4.25	4.11	3.97	3.84	3.71	3.59	3.47	3.36	3.25	3.15	3.05	2.96	2.87	2.78	2.70	2.62

TABLE 1 : Terme d'approximation optimal a^* pour un bruit S α S en fonction des paramètres α et γ .

$\alpha \backslash \gamma$	0.35	0.40	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60
1.2	4.67	4.52	4.40	4.38	4.36	4.33	4.31	4.29	4.27	4.25	4.23	4.22	4.20	4.18	4.17	4.15	4.13	4.12
1.4	5.33	5.19	5.07	5.05	5.03	5.00	4.99	4.96	4.94	4.94	4.91	4.91	4.90	4.88	4.86	4.85	4.84	4.83
1.6	6.19	6.08	5.99	5.97	5.97	5.95	5.93	5.93	5.93	5.91	5.90	5.89	5.89	5.88	5.87	5.86	5.86	5.86
1.8	7.53	7.52	7.54	7.55	7.56	7.57	7.57	7.57	7.59	7.59	7.60	7.61	7.62	7.60	7.61	7.64	7.63	7.65

TABLE 2 : Terme d'approximation optimal b^* pour un bruit S α S en fonction des paramètres α et γ .

atteintes en testant un nombre très limité d'approximations de LLR (3, b), $b \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ sur des pilotes, ne nécessitant donc pas une résolution numérique d'un problème d'optimisation non-convexe à chaque transmission.

3.2 Complexité computationnelle

Tous les algorithmes sont implémentés à l'aide de Matlab R2023b et exécutés sur un ordinateur Intel® Core™ i7-1185G7@3,00 GHz×8 de 11e génération avec 32 Go de RAM. Nous comparons dans la Table 3 le temps nécessaire en seconde pour obtenir les paramètres d'approximation optimaux (a^* , b^*); pour calculer l'approximation d'un LLR approché connaissant les paramètres (a , b); et pour calculer le vrai LLR. Ces valeurs sont obtenues pour un code LDPC de taille 20000 et sont moyennées sur 10^4 séquences pour les LLR approximés (paramètres d'approximation optimaux et calcul de l'approximation du LLR approché associée), et sur 10 séquences pour le calcul du vrai LLR.

Comme attendu, l'intégration numérique de la transformée de Fourier inverse est très gourmande : obtenir les paramètres (a^* , b^*) est en moyenne 23 fois plus rapide. Néanmoins, il est également évident qu'obtenir ces valeurs optimales a un coût computationnel bien plus important que de calculer les LLR approximés pour un couple de paramètres (a , b) donné.

4 Conclusion

Comme l'interférence impulsive conduit à des LLR non-linéaires, nous avons étudié une approximation paramétrique non-linéaire à deux paramètres de ces rapports de vraisemblance. Plus particulièrement, nous avons montré qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser les paramètres d'approximation obtenus comme la solution numérique d'un problème d'optimisation non-convexe, mais que de les arrondir à l'entier le plus proche n'induit qu'une très faible perte en termes de BER. De plus, l'un des paramètres d'approximation pouvant être choisi comme un entier constant, et le second comme un entier dans un petit intervalle, notre nouvelle approximation est particulièrement efficace du point de vue computationnelle.

Références

- [1] Omar ALHUSSEIN, Imtiaz AHMED, Jie LIANG et Sami MUHAIDAT : Unified analysis of diversity reception in the presence of impulsive noise. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 66(2):1408–1417, 2016.
- [2] Sachin AMBIKE, Jacek ILOW et Dimitrios HATZINAKOS : Detection for binary transmission in a mixture of Gaussian noise

and impulsive noise modeled as an alpha-stable process. *IEEE Signal Process. Lett.*, 1(3):55–57, 1994.

- [3] Laurent CLAVIER, Troels PEDERSEN, Ignacio Rodriguez LARRAD et Malcolm EGAN : Alpha-Stable model for Interference in IoT networks. *In IEEE CAMA*, pages 575–578, 2021.
- [4] Vincent DIMANCHE, Alban GOUPIL, Laurent CLAVIER et Guillaume GELLÉ : Estimation of an approximated likelihood ratio for iterative decoding in impulsive environment. *In IEEE WCNC*, pages 1–6, 2016.
- [5] Malcolm EGAN, Laurent CLAVIER, Mauro de FREITAS, Louis DORVILLE, Jean-Marie GORCE et Anne SAVARD : Wireless communication in dynamic interference. *In IEEE GLOBECOM*, pages 1–6, 2017.
- [6] Hassen Ben MÂAD, Alban GOUPIL, Laurent CLAVIER et Guillaume GELLE : Clipping demapper for LDPC decoding in impulsive channel. *IEEE Commun. Lett.*, 17(5):968–971, 2013.
- [7] Yasser MESTRAH, Dadjia ANADE, Anne SAVARD, Alban GOUPIL, Malcolm EGAN, Philippe MARY, Jean-Marie GORCE et Laurent CLAVIER : Unsupervised log-likelihood ratio estimation for short packets in impulsive noise. *In IEEE WCNC*, pages 944–949, 2022.
- [8] Yasser MESTRAH, Anne SAVARD, Alban GOUPIL, Laurent CLAVIER et Guillaume GELLÉ : Blind estimation of an approximated likelihood ratio in impulsive environment. *In IEEE PIMRC*, pages 1–5, 2018.
- [9] Yasser MESTRAH, Anne SAVARD, Alban GOUPIL, Guillaume GELLE et Laurent CLAVIER : Robust and simple log-likelihood approximation for receiver design. *In IEEE WCNC*, pages 1–6, 2019.
- [10] Yasser MESTRAH, Anne SAVARD, Alban GOUPIL, Guillaume GELLÉ et Laurent CLAVIER : An unsupervised LLR estimation with unknown noise distribution. *EURASIP Journal on Wireless Commun. and Netw.*, 2020:1–11, 2020.
- [11] David MIDDLETON : Non-Gaussian noise models in signal processing for telecommunications : new methods and results for class A and class B noise models. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 45(4):1129–1149, 1999.
- [12] Pedro C PINTO et Moe Z WIN : Communication in a Poisson field of interferers-Part II : Channel capacity and interference spectrum. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 9(7):2187–2195, 2010.
- [13] Tom RICHARDSON et Ruediger URBANKE : *Modern coding theory*. Cambridge university press, 2008.
- [14] K VASTOLA : Threshold detection in narrow-band non-Gaussian noise. *IEEE Trans. Commun.*, 32(2):134–139, 1984.

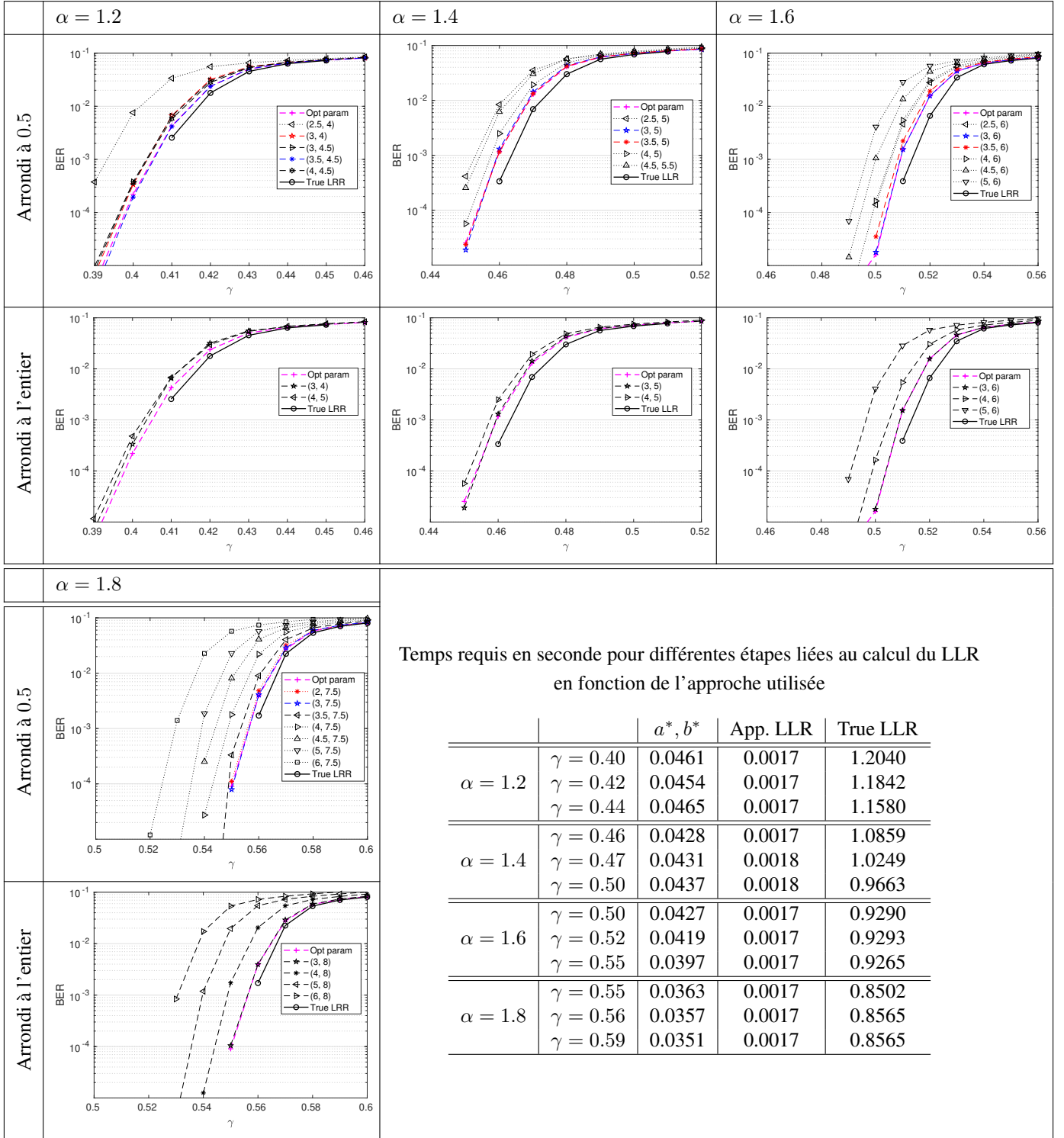


TABLE 3 : Evolution du BER en fonction de la dispersion γ d'un bruit SaS pour différentes valeurs de α et différents LLR et approximations : les vrais LLR obtenus de façon numérique via la transformé de Fourier inverse, les LLR approximés avec les paramètres optimaux obtenus comme la solution de (2), et les LLR approximés obtenus après arrondi soit à l'entier ou le 0.5 plus proche de la solution de (2). Nous présentons également une étude computationnelle donnée en temps de calcul nécessaire pour différentes étapes de notre décodeur, en fonction de l'approche utilisée.