

Décomposition conjointe de plusieurs tenseurs fondée sur une extension des équations de Sylvester

Fatima Z. M'RANI^{1,2} Matthieu PUIGT¹ Cédric JAMET² Gilles DELMAIRE¹ Claire GUILLOTEAU¹ Gilles ROUSSEL¹
Vincent VANTREPOTTE²

¹ Univ. Littoral Côte d'Opale, LISIC – UR 4491, F-62219 Longuenesse

² Univ. Littoral Côte d'Opale, CNRS, Univ. Lille, IRD, LOG – UMR 8187, F-62930 Wimereux

Résumé – Dans cet article, nous étudions le problème de la fusion de plusieurs images multispectrales et d'une image hyperspectrale, étendant ainsi le problème classique de multi-sharpening visant à fusionner une image multispectrale et une image hyperspectrale. La méthode proposée repose sur la décomposition tensorielle conjointe. En nous appuyant sur le cadre de la méthode STEREO, nous proposons une approche, nommée G-STEREO-1, qui exploite une extension des équations de Sylvester au sein d'une décomposition polyadique canonique tensorielle conjointe. Des expériences sur données synthétiques et réelles montrent que la méthode proposée surpasse les méthodes de fusion tensorielle de la littérature.

Abstract – In this paper, we consider the problem of combining several multispectral and one hyperspectral image, extending the classical multi-sharpening problem which aims to fuse one multispectral and one hyperspectral image. The proposed method is based on joint tensor decomposition. In particular, building upon the STEREO framework, we introduce our proposed method named G-STEREO-1, which leverages an extension of Sylvester equations within a joint tensor canonical polyadic decomposition. Experiments on synthetic and real data show the proposed method to outperform state-of-the-art tensor fusion methods.

1 Introduction

Notre planète est observée en continu par des satellites équipés d'imageurs multispectraux ou hyperspectraux (MS ou HS). Ces deux types d'imageurs fournissent des cubes de données à deux dimensions spatiales et une dimension spectrale, mais leur différence réside dans le nombre de bandes spectrales, beaucoup plus élevé dans la seconde que dans la première. Cependant, l'augmentation du nombre de bandes spectrales se fait au prix d'une résolution spatiale réduite des images HS, pourtant cruciale dans de nombreuses applications. Par conséquent, le multi-sharpening (ou fusion ou super-résolution d'images MS et/ou HS) est un domaine de recherche très actif pour lequel de nombreuses méthodes ont été proposées [5, 9]. Dans cet article, nous cherchons à étudier la décomposition tensorielle conjointe pour le multi-sharpening [8]. Parmi les méthodes proposées, les techniques proposées dans [3, 6] résolvent les équations de Sylvester pour mettre à jour les matrices dérivées des données tensorielles. Cependant, elles ne peuvent traiter que des images à résolution spatiale fixe.

Dans cet article, nous cherchons à les étendre pour traiter plus de deux images ou deux images dont les résolutions spatiales varient selon les longueurs d'onde. En effet, nous nous intéressons à la fusion des données – fournies respectivement par Sentinel-2 (S2) optical Multi-Spectral Instrument (MSI) et Sentinel-3 (S3) Ocean and Land Color Instrument (OLCI) – qui sont largement appliquées à la couleur de l'eau. Cependant, l'étude des zones côtières ou estuariennes nécessite à la fois une échelle spatiale suffisamment fine et une résolution spectrale fine, ce qui n'est pas possible avec S2 ou S3 seuls. Une spécificité de S2 réside dans le fait que sa résolution spatiale n'est pas constante sur les bandes spectrales.

Bien que nous ayons étudié les performances de certaines méthodes d'affinage de pointe pour des données S2 et S3 simu-

lées et réelles dans [1], nous n'avons inclus dans notre expérience aucune méthode basée sur la décomposition tensorielle, ce que nous souhaitons faire dans cet article. Nous étudions notamment l'amélioration apportée par STEREO [3] et notre extension généralisée proposée, nommée G-STEREO-1.

La suite de l'article est structurée comme suit. Nous introduisons dans la section 2 le problème de sharpening considéré. Nous introduisons dans la section 3 la méthode STEREO et l'extension que nous proposons. Nous étudions leurs performances dans la section 4 avant de conclure dans la section 5.

2 Position du problème

Dans cet article, nous considérons trois images multispectrales, notées respectivement $\mathcal{M}_1 \in \mathbb{R}^{I_1 \times J_1 \times K_1}$, $\mathcal{M}_2 \in \mathbb{R}^{I_2 \times J_2 \times K_2}$ et $\mathcal{M}_3 \in \mathbb{R}^{I_3 \times J_3 \times K_3}$, ainsi qu'une image hyperspectrale $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{I_h \times J_h \times K_h}$ toutes acquises approximativement au même moment et sur la même zone géographique. Nous supposons également que $I_1 \geq I_2 \geq I_3 \geq I_h$, que $J_1 \geq J_2 \geq J_3 \geq J_h$ et que $\max\{K_1, K_2, K_3\} \leq K_h$. En pratique, ce scénario correspond aux données acquises par les satellites¹ Sentinel-2 (S2) et Sentinel-3 (S3) (voir Fig. 1). En effet, S2 fournit des images avec trois résolutions spatiales différentes, à savoir 10, 20 et 60 m, tandis que les images S3 ont une résolution spatiale de 300 m. Cela implique que

$$I_h = \frac{I_3}{5} = \frac{I_2}{15} = \frac{I_1}{30}, \quad J_h = \frac{J_3}{5} = \frac{J_2}{15} = \frac{J_1}{30}, \quad (1)$$

tandis que $K_1 = 4$, $K_2 = 6$, $K_3 = 3$, et $K_h = 21$.

¹Il est à noter que les données S2 et S3 sont multispectrales. Cependant, en pratique, S3 fournit des données à plus haute résolution spectrale et plus faible résolution spatiale que S2. Dans le reste de cet article, on utilisera de manière abusive le terme hyperspectral pour parler des données S3.

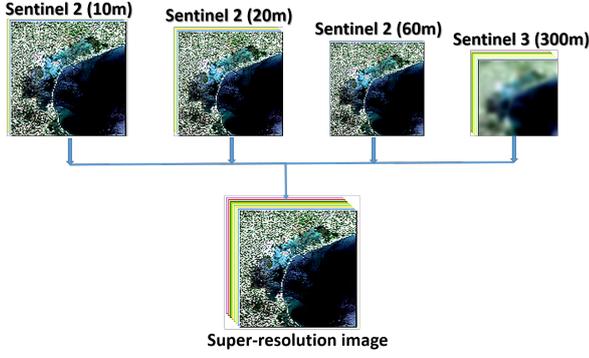


FIGURE 1 – Cadre de la fusion d’images S2 et S3.

L’objectif de cet article est d’intégrer ces données disparates afin de générer une image super-résolue $S \in \mathbb{R}^{I_1 \times J_1 \times K_h}$, combinant à la fois une haute résolution spatiale et une haute résolution spectrale. Contrairement aux méthodes traditionnelles de super-résolution qui utilisent une seule image multispectrale à une résolution fixe, cette approche exploite simultanément toutes les résolutions disponibles, permettant ainsi une fusion optimale des informations spatiales et spectrales.

$$S = \llbracket X, Y, Z \rrbracket, \quad (2)$$

où $X \in \mathbb{R}^{I_1 \times F}$, $Y \in \mathbb{R}^{J_1 \times F}$, et $Z \in \mathbb{R}^{K_h \times F}$ sont des matrices obtenues par une décomposition canonique polyadique (CPD) de rang F de S . Les tenseurs définis précédemment s’expriment alors comme suit :

$$\mathcal{M}_1 = \llbracket X, Y, P_3^{(1)} Z \rrbracket \quad (3)$$

$$\mathcal{M}_2 = \llbracket P_1^{(2)} X, P_2^{(2)} Y, P_3^{(2)} Z \rrbracket \quad (4)$$

$$\mathcal{M}_3 = \llbracket P_1^{(3)} X, P_2^{(3)} Y, P_3^{(3)} Z \rrbracket \quad (5)$$

$$\mathcal{H} = \llbracket P_1^h X, P_2^h Y, Z \rrbracket \quad (6)$$

où $P_1^{(k)}$ et $P_2^{(k)}$ sont des opérateurs de dégradation spatiale utilisant un filtrage gaussien suivi d’un sous-échantillonnage, et $P_3^{(k)}$ est un opérateur de dégradation spectrale par agrégation des bandes [3]. Ces opérateurs sont supposés connus. Dans cet article, le problème d’optimisation s’exprime par :

$$\min_{X, Y, Z} L(X, Y, Z), \quad (7)$$

où la fonction coût est définie comme suit :

$$L = \|\mathcal{H} - \llbracket P_1^h X, P_2^h Y, Z \rrbracket\|_F^2 + \sum_{k=1}^3 \lambda_k \|\mathcal{M}_k - \llbracket P_1^{(k)} X, P_2^{(k)} Y, P_3^{(k)} Z \rrbracket\|_F^2 \quad (8)$$

où $P_1^{(1)} = I, P_2^{(1)} = I$ représentent la matrice identité pour \mathcal{M}_1 et $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius et λ_i ($i = 1 \dots 3$) sont les poids de pondération.

3 Méthode proposée

3.1 Principes de l’approche STEREO

Le problème traité par STEREO [3] consiste à minimiser l’Éq. (8) en fixant $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Cette approche considère

conjointement deux tenseurs, c.-à-d. \mathcal{H} et \mathcal{M}_1 , comme des versions dégradées de S . La fonction d’optimisation associée est formulée comme suit

$$L(X, Y, Z) = \|\mathcal{H} - \llbracket P_1^h X, P_2^h Y, Z \rrbracket\|_F^2 + \lambda_1 \|\mathcal{M}_1 - \llbracket X, Y, P_3^{(1)} Z \rrbracket\|_F^2. \quad (9)$$

En pratique, cette fonction est minimisée en utilisant une approche de moindres carrés alternés, où chaque facteur est mis à jour de manière itérative, en gardant les autres fixés. Lors de l’optimisation du facteur X , le gradient de la fonction coût s’exprime comme suit :

$$\nabla_X L = 2(P_1^h)^\top P_1^h X U_h^\top U_h - 2(P_1^h)^\top \mathbf{H}^{(1)} U_h + 2\lambda_1 X U_1^\top U_1 - 2\lambda_1 \mathbf{M}_1^{(1)\top} U_1, \quad (10)$$

où $U_h \triangleq \mathbf{Z} \odot P_2^h \mathbf{Y}$, $U_1 \triangleq P_3^{(1)} \mathbf{Z} \odot \mathbf{Y}$, \odot désigne le produit de Khatri-Rao et $\mathbf{H}^{(1)}$ et $\mathbf{M}^{(1)}$ sont respectivement les premiers modes de \mathcal{H} et \mathcal{M} . L’éq. (10) peut être reformulée comme une équation de Sylvester classique, c.-à-d.

$$A_s X + X B_s = C_s, \quad (11)$$

avec

$$A_s \triangleq (P_1^h)^\top P_1^h, \quad (12)$$

$$B_s \triangleq \lambda_1 U_1^\top U_1 \cdot (U_h^\top U_h)^{-1}, \quad (13)$$

$$C_s \triangleq (P_1^h)^\top \mathbf{H}^{(1)} U_h + \lambda_1 \mathbf{M}_1^{(1)\top} U_1 \cdot (U_h^\top U_h)^{-1}. \quad (14)$$

La solution exacte de cette équation est bien connue, ce qui facilite la mise à jour efficace de X . Ce processus est ensuite appliqué de manière similaire pour estimer de manière itérative les facteurs Y et Z jusqu’à convergence.

3.2 Généralisation de STEREO à plus de deux tenseurs

L’approche proposée dans cet article s’appuie sur la stratégie de la méthode STEREO [3] en optimisant l’Éq. (8). Cependant, contrairement aux auteurs de [3] qui considèrent uniquement deux tenseurs, notre approche traite conjointement quatre tenseurs, à savoir trois tenseurs multispectraux $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$, et un tenseur hyperspectral \mathcal{H} . La stratégie globale est la même que celle décrite dans [3], où nous visons à mettre à jour alternativement X, Y et Z . Cependant, la méthode basée sur les équations de Sylvester classiques n’est pas applicable ici.

Considérons la mise à jour de la matrice X . L’expression du gradient de l’Éq. (8) par rapport à X s’écrit

$$\nabla_X L = \sum_{i=1}^4 A_i X B_i - C, \quad (15)$$

où

$$A_1 \triangleq P_1^h{}^\top P_1^h, \quad B_1 \triangleq U_h^\top U_h, \quad (16)$$

$$A_2 \triangleq \lambda_1 I, \quad B_2 \triangleq U_1^\top U_1, \quad (17)$$

$$A_3 \triangleq \lambda_2 P_1^{(2)\top} P_1^{(2)}, \quad B_3 \triangleq U_2^\top U_2, \quad (18)$$

$$A_4 \triangleq \lambda_3 P_1^{(3)\top} P_1^{(3)}, \quad B_4 \triangleq U_3^\top U_3, \quad (19)$$

$$C = P_1^h \mathbf{H}^{(1)} U_h + \sum_{i=1}^3 \lambda_i P_1^{(i)\top} \mathbf{M}_i^{(1)\top} U_i, \quad (20)$$

avec

$$U_h \triangleq \mathbf{Z} \odot P_2^h \mathbf{Y}, \quad U_1 \triangleq P_3^{(1)} \mathbf{Z} \odot \mathbf{Y}, \quad (21)$$

$$U_2 \triangleq P_3^{(2)} \mathbf{Z} \odot P_2^{(2)} \mathbf{Y}, \quad U_3 \triangleq P_3^{(3)} \mathbf{Z} \odot P_2^{(3)} \mathbf{Y}. \quad (22)$$

Annuler l'éq. (15) fournit une équation de Sylvester généralisée

$$\sum_{i=1}^4 A_i X B_i = C, \quad (23)$$

significativement plus complexe que l'éq. (11). Pour la résoudre, nous utilisons une stratégie similaire à celle de [2], basée sur la vectorisation de chaque terme $A_i X B_i$, c.-à-d. [7] :

$$\text{vec}(A_i X B_i) = (B_i^\top \otimes A_i) \text{vec}(X), \quad (24)$$

où \otimes désigne le produit du Kronecker. Il en résulte qu'une fois vectorisée, l'éq. (23) peut être réécrite comme un problème classique des moindres carrés et résolue par une simple inversion du terme matriciel, c.-à-d.

$$\text{vec}(X) = \left(\sum_i (B_i^\top \otimes A_i) \right)^{-1} \cdot \text{vec}(C). \quad (25)$$

Cependant, au lieu d'une solution des moindres carrés, nous utilisons une approche de descente de gradient. De manière similaire, nous pouvons mettre à jour Y et Z en déroulant les tenseurs \mathcal{M}_j ($j = 1, \dots, 3$) et \mathcal{H} selon les autres modes. En pratique, chacun de ces facteurs matriciels est mis à jour de manière alternée. La structure globale de notre extension généralisée de STEREO utilisant des données unidimensionnelles (G-STEREO-1) est présentée dans l'Algorithme 1.

Algorithme 1 G-STEREO-1

Entrées : Valeurs initiales de X , Y et Z

Poids λ_i ($i = 1, \dots, 3$)

Sortie : Tenseur $\mathcal{H} = \llbracket X, Y, Z \rrbracket$

- 1: **Répéter**
 - 2: **Mettre à jour** X en résolvant l'éq. (23)
 - 3: **Mettre à jour** Y de manière similaire
 - 4: **Mettre à jour** Z de manière similaire
 - 5: **Jusqu'à** Convergence
-

4 Validation expérimentale

Dans cette étude, nous utilisons d'abord des données simulées dérivées de l'image hyperspectrale de Pavia². Nous extrayons des bandes spectrales correspondant aux capteurs S2 et S3 en identifiant les bandes correspondantes dans l'image hyperspectrale. Pour simuler les observations des capteurs S2 et S3, nous effectuons un rééchantillonnage spectral et spatial, générant des images à résolution plus faible qui répliquent les caractéristiques spectrales et spatiales de ces capteurs satellites, en particulier les rapports des dimensions spatiales fournis dans

²L'image peut être consultée sur https://www.ehu.es/ccwintco/index.php/Hyperspectral_Remote_Sensing_Scenes.

l'Éq. (1). Ce cadre expérimental nous permet d'évaluer l'efficacité des méthodes dans des conditions proches des applications réelles.

Nous évaluons les performances de G-STEREO-1 en comparaison avec des méthodes de la littérature, c.-à-d., STEREO [3], SCOTT, B-SCOTT [6] et SCUBA [4], pour différentes valeurs du rang F . Notons que B-SCOTT et SCUBA ne nécessitent pas de fournir les opérateurs de dégradation spatiale et spectrale. Les méthodes SCOTT et B-SCOTT ont été testées sur des zones identifiables où elles sont connues pour fonctionner correctement, conformément aux recommandations de [6]. Les paramètres λ_i dans les éq. (8) et (9) ont été fixés à 1. Pour STEREO, nous avons effectué 10 itérations, tandis que G-STEREO-1 a été évaluée avec 5 itérations externes. L'évaluation repose sur des métriques standard de qualité d'image hyperspectrale [9], à savoir le PSNR (le rapport entre la plus grande valeur possible de puissance du signal et la puissance du bruit), le SAM moyen (le SAM mesure l'angle entre le spectre de référence et celui estimé, pour chaque pixel), l'ERGAS (une erreur moyenne normalisée pour chaque bande de l'image traitée) et le Q2n (une généralisation de l'indice universel de qualité d'image UIQI).

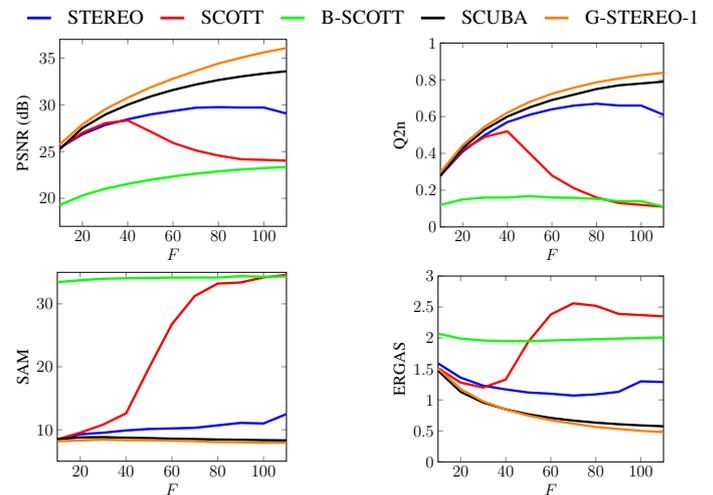


FIGURE 2 – Performances obtenues en fonction du rang.

La Figure 2 présente les performances obtenues par chaque méthode pour les quatre métriques d'évaluation, en fonction des différents rangs. Les résultats montrent que G-STEREO-1 surpasse l'ensemble des autres méthodes selon tous les critères de performance, suivi de près par SCUBA. Il convient de noter qu'en pratique, nous avons constaté que les méthodes de la littérature offrent une bonne performance de fusion pour certaines bandes spectrales et échouent pour d'autres.

Nous illustrons ce comportement dans deux cas distincts, comme le montre la figure 3, en utilisant les meilleurs rangs déterminés selon la figure 2, c.-à-d. $F = 110$ pour G-STEREO-1, SCUBA et B-SCOTT, $F = 90$ pour STEREO et $F = 40$ pour SCOTT. Le premier scénario, illustré sur les graphiques à gauche de cette figure, concerne des longueurs d'onde où les données S2 sont proches de la longueur d'onde S3 considérée. Dans ce cas, toutes les méthodes de fusion testées parviennent à produire des résultats de haute qualité, sans distorsions notables. En revanche, le second scénario, montré sur les graphiques à droite, concerne des longueurs d'onde plus éloignées, entraînant l'apparition de distorsions dans les images

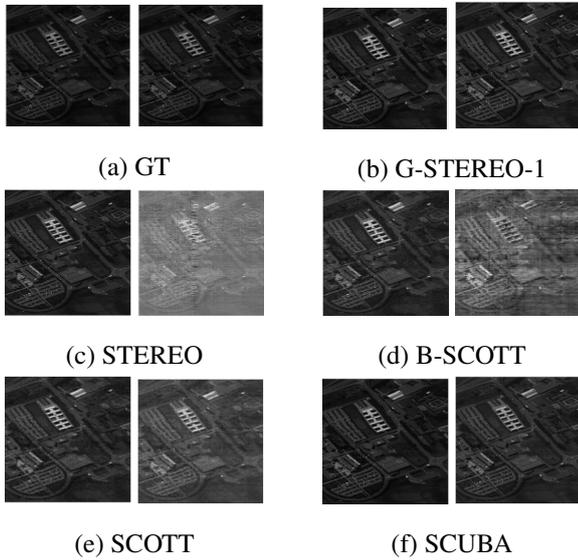


FIGURE 3 – Images à 491 nm (à gauche) et 779 nm (à droite) théoriques (GT) et obtenues après fusion par les méthodes testées.

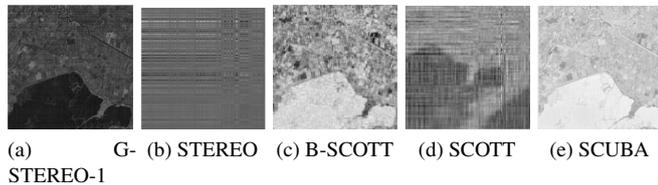


FIGURE 4 – Image à 761 nm obtenue après fusion de données réelles S2 et S3 par les diverses méthodes testées.

fusionnées. Dans ce contexte, G-STEREO-1 se distingue en produisant une image de meilleure qualité par rapport aux autres méthodes testées.

Ce même comportement est observé avec les images réelles de S2 et S3, comme montré dans la Fig. 4. Dans ce cas, toutes les méthodes de la littérature testées – à l’exception de B-SCOTT – fournissent une image visuellement très dégradée. En revanche, G-STEREO-1 maintient une qualité d’image bien meilleure, ce qui montre la pertinence de la méthode proposée.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une extension généralisée de la méthode STEREO, basée sur un cadre tensoriel conjoint. Notre approche exploite et résout des équations de Sylvester généralisées pour aborder efficacement le problème de la super-résolution hyperspectrale, en particulier dans les scénarios impliquant strictement plus de deux tenseurs de dimensions variables. L’objectif est de générer une image super-résolue riche à la fois spatialement et spectralement. Nous souhaitons prochainement étendre d’autres méthodes telles que celles proposées dans [6], pour les adapter au problème de fusion S2 et S3. De plus, l’amélioration de l’efficacité computationnelle de la méthode est une direction clé pour les futurs développements, notamment pour permettre son application au traitement de séries temporelles. Cela ouvrirait la voie à des applications plus complexes, telles que la télédétection

multi-temporelle, où l’analyse dynamique des séquences de données est essentielle. Enfin, nous souhaitons pouvoir comparer les images super-résolues issues de la fusion des données S2 et S3 avec des mesures *in situ*. La correction atmosphérique alors nécessaire pour cette comparaison génère des données manquantes dont il faudra tenir compte dans nos prochains travaux.

Références

- [1] A. ALBOODY, M. PUIGT, G. ROUSSEL, V. VANTREPOTTE, C. JAMET et T. K. TRAN : Experimental comparison of multi-sharpening methods applied to Sentinel-2 MSI and Sentinel-3 OLCI images. *In Proc. IEEE WHISPERS’21*, 2021.
- [2] F. DING et T. CHEN : Gradient based iterative algorithms for solving a class of matrix equations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50(8):1216–1221, 2005.
- [3] C. I. KANATSOU LIS, X. FU, N. D. SIDIROPOULOS et W.-K. MA : Hyperspectral super-resolution : A coupled tensor factorization approach. *IEEE Trans. Signal Process.*, 66(24):6503–6517, 2018.
- [4] C. I. KANATSOU LIS, X. FU, N. D. SIDIROPOULOS et W.-K. MA : Hyperspectral super-resolution : Combining low rank tensor and matrix structure. *In Proc. IEEE ICIP’18*, pages 3318–3322. IEEE, 2018.
- [5] L. LONCAN, L. B. DE ALMEIDA, J. M. BIOCAS-DIAS, X. BRIOTTET, J. CHANUSSOT, N. DOBIGEON, S. FABRE, W. LIAO, G. A. LICCIARDI, M. SIMOES *et al.* : Hyperspectral pansharpening : A review. *IEEE Geosci. Remote Sens. Mag.*, 3(3):27–46, 2015.
- [6] C. PRÉVOST, K. USEVICH, P. COMON et D. BRIE : Hyperspectral super-resolution with coupled tucker approximation : Recoverability and svd-based algorithms. *IEEE Trans. Signal Process.*, 68:931–946, 2020.
- [7] N. D. SIDIROPOULOS, L. DE LATHAUWER, X. FU, K. HUANG, E. E. PAPALEXAKIS et C. FALOUTSOS : Tensor decomposition for signal processing and machine learning. *IEEE Trans. Signal Process.*, 65(13):3551–3582, 2017.
- [8] M. WANG, D. HONG, Z. HAN, J. LI, J. YAO, L. GAO, B. ZHANG et J. CHANUSSOT : Tensor decompositions for hyperspectral data processing in remote sensing : A comprehensive review. *IEEE Geosci. Remote Sens. Mag.*, 11(1):26–72, 2023.
- [9] N. YOKOYA, C. GROHN FELDT et J. CHANUSSOT : Hyperspectral and multispectral data fusion : A comparative review of the recent literature. *IEEE Geosci. Remote Sens. Mag.*, 5(2):29–56, 2017.

Remerciements

Les travaux F. Z. M’Rani sont financés en partie par la région Hauts-de-France. Les expériences présentées dans cet article ont été réalisées sur la plate-forme de calcul scientifique Calculco, gérée par la DSI de l’ULCO.