

Détection séquentielle d'un changement transitoire inconnu dans un modèle linéaire Gaussien avec les paramètres de nuisance

Igor NIKIFOROV¹

¹Université de Troyes, Computer Science and Digital Society laboratory (LIST3N)
12, rue Marie Curie CS 42060 10004 Troyes Cedex - France

Résumé – La détection séquentielle d'un changement transitoire (DCT) trouve son application dans divers domaines comme la surveillance des systèmes cyber-physiques complexes, la détection des pannes de systèmes de navigation par satellites ou par inertie, l'analyse des signaux acoustiques (sous-marines) et sismiques, la surveillance des réacteurs nucléaires entre autres. Cet article poursuit l'étude de la DCT dans le cas où le profil de changement est inconnu. Les nouveaux tests de la moyenne mobile finie (FMA) à base du rapport de vraisemblance généralisé sont proposés pour un modèle linéaire Gaussien avec les paramètres de nuisance. Les caractéristiques opérationnelles de ces nouveaux tests sont comparées.

Abstract – Sequential transient change detection (TCD) finds its application in various fields such as monitoring of complex cyber-physical systems, fault detection of satellite or inertial navigation systems, analysis of acoustic (underwater) and seismic signals, monitoring of nuclear reactors among others. This paper continues the study of the TCD in the case where the transient change profile is unknown. New finite moving average (FMA) tests based on the generalized likelihood ratio are proposed for a linear Gaussian model with nuisance parameters. The operational characteristics of these new tests are compared.

1 Position du problème

Considérons un modèle linéaire Gaussien avec des changements transitoires et des paramètres de nuisance. De tels modèles sont typiques de nombreux problèmes du monde réel, comme le contrôle de l'intégrité des systèmes de navigation [1], la détection d'un bouchage total instantané d'un assemblage dans un réacteur à neutrons rapides refroidi au sodium [10], la sécurité des systèmes de contrôle et d'acquisition de données (SCADA) contre les attaques cyber-physiques [2]. Il existe deux types de paramètres déterministes inconnus dans ces modèles : le paramètre informatif et le paramètre de nuisance. Le paramètre informatif est le profil de changement transitoire. Le paramètre de nuisance ne représente aucun intérêt pour la DCT, mais il existe dans le modèle et son impact sur la caractéristique opérationnelle (CO) du test n'est pas négligeable. Par exemple, dans le cas du contrôle de l'intégrité du système de navigation, les paramètres informatifs sont représentés par les éventuelles pannes dans le système de navigation et les paramètres de nuisance sont représentés par les positions/vitesses du mobile inconnues.

Considérons le modèle génératif de la DCT suivant :

$$\begin{aligned} Y_n &= HX_n + M\psi_n + \xi_n, \\ \psi_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq n < \nu \\ \theta_{n-\nu+1} & \text{si } \nu \leq n \leq \nu + L - 1 \end{cases}, \end{aligned} \quad (1)$$

où $n \in \mathbb{N}$ est le temps discret, ν est l'instant du changement inconnu et non aléatoire, $X_n \in \mathbb{R}^m$ est un paramètre de nuisance inconnu et non aléatoire, H est une matrice de taille $(\ell \times m)$ avec $\text{rang } H = q \leq m < \ell$, M est une matrice de rang plein colonne de taille $(\ell \times r)$ avec $r < \ell$, $\psi_n \in \mathbb{R}^r$ sont des vecteurs de paramètres informatifs, $\theta_1, \dots, \theta_L \in \mathbb{R}^r$ sont des vecteurs du profil de changement transitoire inconnus, L est le retard maximal de détection prescrit et $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_\ell)$.

Le critère d'optimalité de la DCT a été proposé dans [5, 6].

Soit une suite de variables aléatoires $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ générée par (1). On suppose que \mathcal{P}_ν (resp. \mathcal{P}_∞) est la distribution conjointe des observations $Y_1, \dots, Y_\nu, Y_{\nu+1}, \dots$ lorsque $\nu < \infty$ (resp. $\nu = \infty$). Évidemment, cette distribution est une fonction des paramètres de nuisance $X_1, \dots, X_\nu, X_{\nu+1}, \dots$ et des paramètres informatifs $\psi_1, \dots, \psi_\nu, \psi_{\nu+1}, \dots$. On définit la probabilité \mathbb{P}_ν (resp. \mathbb{P}_∞) par rapport à la distribution \mathcal{P}_ν (resp. \mathcal{P}_∞). Le critère d'optimalité est :

$$\inf_{T \in \mathcal{K}_\alpha} \left\{ \bar{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T) = \sup_{\nu \geq L} \mathbb{P}_\nu(T - \nu + 1 > L \mid T \geq \nu) \right\}, \quad (2)$$

où $\bar{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T)$ est la pire probabilité de détection manquée et $T \in \mathcal{K}_\alpha$ est l'instant d'arrêt du test de la classe

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ T : \bar{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T; m_\alpha) = \sup_{n \geq L} \mathbb{P}_\infty(n \leq T < n + m_\alpha) \leq \alpha \right\}, \quad (3)$$

où $\bar{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T; m_\alpha)$ est la pire probabilité de fausse alarme pendant une période de référence m_α .

2 Réjection de nuisance

Parce que la DCT est réalisée en utilisant une suite de L observations, réécrivons le modèle linéaire Gaussien pour L observations successives Y_1, \dots, Y_L

$$\mathcal{Y}_1^L = \mathcal{H}\mathcal{X}_1^L + \mathcal{M}\psi_1^L + \xi_1^L \quad (4)$$

où $\mathcal{Y}_1^L = (Y_1^T, \dots, Y_L^T)^T \in \mathbb{R}^{\ell L}$, $\mathcal{X}_1^L = (X_1^T, \dots, X_L^T)^T \in \mathbb{R}^{mL}$, $\psi_1^L = (\psi_1^T, \dots, \psi_L^T)^T \in \mathbb{R}^{rL}$, $\xi_1^L = (\xi_1^T, \dots, \xi_L^T)^T \in \mathbb{R}^{\ell L}$, la matrice par blocs \mathcal{H} de taille $(\ell L \times mL)$ est composée de blocs « diagonaux » H et la matrice par blocs \mathcal{M} de taille $(\ell L \times rL)$ est composée de blocs « diagonaux » M . Les blocs « non diagonaux » sont nuls. Les méthodes détaillées de réjection de nuisance sont disponibles dans [3, 4, 9]. Par souci de

simplicité de présentation, nous considérons dans ce qui suit le pire des cas d'impact de nuisance lorsque $q = m$.

Lemme 1 Soit $\mathcal{P}_{\mathcal{H}} = I_{\ell L} - \mathcal{H}(\mathcal{H}^T \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}^T$ la matrice de projection, alors $\mathcal{P}_{\mathcal{H}} = \text{diag}\{P_H, \dots, P_H\}$ est une matrice diagonale par blocs, où $P_H = I_{\ell} - H(H^T H)^{-1} H^T$ sont des blocs carrés situés le long de la diagonale. Par conséquent,

$$\mathcal{Z}_1^L = (Z_1^T, \dots, Z_L^T)^T, \quad Z_i = WY_i, \quad (5)$$

où la matrice de projection W est définie comme suit $WH = 0$, $W^T W = P_H$, $WW^T = I_{\ell-m}$.

Soit la matrice WM de rang plein colonne de taille $(\ell-m) \times r$ et $r \leq \ell - m$. Le modèle génératif dans l'espace complémentaire orthogonal $R(H)^\perp$ pour les vecteurs $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ exemptés de l'impact des paramètres de nuisance $\{X_n\}_{n \geq 1}$:

$$\begin{aligned} Z_n &= WM\psi_n + \zeta_n, \quad \zeta_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_{\ell-m}), \\ \psi_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq n < \nu \\ \theta_{n-\nu+1} & \text{si } \nu \leq n \leq \nu + L - 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

3 Profil transitoire putatif

Nous adaptons brièvement le test linéaire FMA (LFMA), précédemment étudié dans [5, 6, 8, 9], au modèle linéaire Gaussien (1). Le rapport de vraisemblance (RV) pour tester entre

$$\mathcal{H}_0 = \{\theta_1 = \dots = \theta_L = 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 = \{\theta_1 = \tilde{\theta}_1, \dots, \theta_L = \tilde{\theta}_L\},$$

où $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_L \in \mathbb{R}^r$ sont les vecteurs du profil de changement transitoire putatif, à base d'observations Z_1, \dots, Z_L est donné comme suit

$$\sum_{i=1}^L \log \frac{f(Z_i, \tilde{\theta}_i)}{f(Z_i, 0)} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^L (WM\tilde{\theta}_i)^T Z_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^L \|WM\tilde{\theta}_i\|_2^2, \quad (7)$$

où $f(Z_i, \theta_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell-m} \sigma^{\ell-m}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \|Z_i - WM\theta_i\|_2^2 \right\}$ est la densité de probabilité de la distribution normale $\mathcal{N}(WM\theta_i, \sigma^2 I_{\ell-m})$ et $\|X\|_2$ est la norme euclidienne du vecteur X . Le deuxième terme du RV (7) est constant et il est omis dans ce qui suit pour simplifier la présentation. En prenant en compte que $Z_i = WY_i$ (5), on obtient l'instant d'arrêt du test LFMA invariant :

$$\begin{aligned} T_{\text{LFMA}} &= \inf \{n \geq L : S_{n-L+1}^n \geq h\} \\ S_{n-L+1}^n &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=n-L+1}^n \tilde{\theta}_{L-n+i}^T M^T P_H Y_i, \end{aligned} \quad (8)$$

où le seuil h est choisi pour respecter $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T; m_\alpha)$.

Définissons deux matrices des profils de changement transitoire : *i*) la matrice $\tilde{\Theta}$ de taille $L \times r$ du profil putatif composée des vecteurs lignes $\tilde{\theta}_1^T, \dots, \tilde{\theta}_L^T$; *ii*) la matrice Θ de taille $L \times r$ du vrai profil composée des vecteurs lignes $\theta_1^T, \dots, \theta_L^T$. La matrice $\tilde{\Theta}$ définit la connaissance *a priori* du problème de la DCT et la matrice Θ définit la réalité de terrain. Donc l'angle $\beta = \angle(WM\tilde{\Theta}^T, WM\Theta^T)$ entre la matrice putative $WM\tilde{\Theta}^T$ et la vraie matrice $WM\Theta^T$ (au sens du produit scalaire de Frobenius) définit l'incertitude *a priori* sur le modèle statistique de la DCT.

La CO, c'est-à-dire la borne supérieure $\overline{\alpha}_1$ de la pire probabilité de détection manquée $\overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T)$ (2) en fonction de la borne supérieure $\overline{\alpha}_0$ de la pire probabilité de fausse alarme $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T; m_\alpha)$ (3) et l'angle β du test LFMA est donnée par (voir les éléments de preuve dans [8, 9]).

Théorème 1 Soit T_{LFMA} l'instant d'arrêt du test LFMA (8). Définissons

$$\cos(\beta) = \frac{\langle WM\tilde{\Theta}^T, WM\Theta^T \rangle_F}{\|WM\tilde{\Theta}^T\|_F \cdot \|WM\Theta^T\|_F},$$

où $\langle A \cdot B \rangle_F$ est le produit scalaire de Frobenius et $\|A\|_F$ est la norme de Frobenius de A . Alors la borne supérieure $\overline{\alpha}_1$ en fonction de la borne supérieure $\overline{\alpha}_0$ et de l'angle β est donnée comme suit

$$\overline{\alpha}_1(T_{\text{LFMA}}) = \Phi(\Phi^{-1}(A) - s \cos(\beta)), \quad (9)$$

où $x \mapsto \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt$, $x \mapsto \Phi^{-1}(x)$ est le quantile de la loi normale, $A = (1 - \overline{\alpha}_0)^{\frac{1}{m_\alpha}}$ si $L = 1$ et

$$A = \begin{cases} (1 - \overline{\alpha}_0)^{\frac{1}{m_\alpha}} & \text{si les éléments de } WM\tilde{\Theta}^T \text{ sont positifs} \\ 1 - \frac{\overline{\alpha}_0}{m_\alpha} & \text{si la matrice } WM\tilde{\Theta}^T \text{ est arbitraire} \end{cases}$$

si $L > 1$, $s = \frac{1}{\sigma} \|WM\Theta^T\|_F$ est le rapport signal sur bruit.

4 Profil transitoire constant inconnu

Soit $L > 1$. Dans le cas où $L = 1$, le test étudié dans cette section coïncide avec le test discuté dans la Section 5. Considérons les hypothèses suivantes

$$\mathcal{H}_0 = \{\theta_1 = \dots = \theta_L = 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 = \{\theta_1 = \dots = \theta_L = \tilde{\theta} \neq 0\},$$

où $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^r$ est un vecteur inconnu du profil de changement transitoire constant. Ici, le profil constant $\theta_1 = \dots = \theta_L = \tilde{\theta} \neq 0$ est considéré comme putatif contrairement au vrai profil dynamique $\theta_1, \dots, \theta_L$ définissant le modèle génératif du changement transitoire (1). Le rapport de vraisemblance généralisé (RVG) pour les observations Z_1, \dots, Z_k ($1 \leq k \leq L$) est donné comme suit

$$\hat{S}_1^k = 2 \log \frac{\max_{\tilde{\theta}} \prod_{i=1}^k \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \|Z_i - WM\tilde{\theta}\|_2^2 \right\}}{\prod_{i=1}^k \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \|Z_i\|_2^2 \right\}}.$$

L'estimation du maximum de vraisemblance (MV) du vecteur $\tilde{\theta}$ est $\hat{\tilde{\theta}} = [k(WM)^T WM]^{-1} \sum_{i=1}^k (WM)^T (WM)^T Z_i$. On obtient l'équation suivante pour le RVG

$$\hat{S}_1^k = \frac{1}{k\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^k Z_i^T \right) Q \left(\sum_{i=1}^k Z_i \right),$$

où la matrice $Q = (WM)[(WM)^T(WM)]^{-1}(WM)^T$ est idempotente et symétrique de rang r . En tenant compte du fait que $Z_i = WY_i$, nous obtenons le test RVG invariant à fenêtre limitée et le seuil variable applicable au modèle linéaire Gaussien avec un vecteur du profil inconnu constant $\tilde{\theta}$

$$T_{\text{RVG}}(h) = \inf \left\{ n \geq L : \max_{1 \leq k \leq L} [\hat{S}_{n-k+1}^n - h_k] \geq 0 \right\}, \quad (10)$$

$$\hat{S}_{n-k+1}^n = \frac{1}{k\sigma^2} \left(\sum_{i=n-k+1}^n Y_i^T \right) \tilde{Q} \left(\sum_{i=n-k+1}^n Y_i \right),$$

où la matrice $\tilde{Q} = P_H M [M^T P_H M]^{-1} M^T P_H$ est idempotente et symétrique de rang r et les seuils h_1, \dots, h_L sont choisis de telle sorte que $\mathbb{P}_{\text{fa}}(T; m_\alpha)$ soit respectée.

Définissons deux matrices des profils de changement transitoire : *i*) la matrice Ψ de taille $L \times r$ du profil putatif composée des vecteurs lignes constants $\tilde{\theta}^1, \dots, \tilde{\theta}^L$, où $\tilde{\theta} = \sum_{i=1}^L \theta_i$; *ii*) la matrice Θ de taille $L \times r$ du vrai profil, définie dans la Section 3. La matrice Ψ définit l'information *a priori* (que le profil est constant) sur la DCT et la matrice Θ définit la réalité de terrain. Donc l'angle $\beta = \angle(WM\Psi^T, WM\Theta^T)$ entre la matrice putative $WM\Psi^T$ et la vraie matrice $WM\Theta^T$ définit l'incertitude *a priori* sur le modèle statistique de la DCT. L'optimisation du test RVG (10) et sa CO sont données par

Théorème 2 *Considérons le modèle génératif (1) et le test RVG invariant à fenêtre limitée et le seuil variable (10).*

1. L'instant d'arrêt $T_{\text{RVG}}(h)$ du test RVG invariant à fenêtre limitée et le seuil variable (10) optimisé est réduit à l'instant d'arrêt T_{QFMA_C} du test FMA quadratique au profil constant inconnu (QFMA_C)

$$T_{\text{QFMA}_C}(h_L^*) = \inf \left\{ n \geq L : \hat{S}_{n-L+1}^n \geq h_L^* \right\} \quad (11)$$

où le seuil $h_L^* = F_{\chi^2}^{-1} \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_0}{m_\alpha}; r \right)$, $x \mapsto F_{\chi^2}^{-1}(x; r)$ est le quantile de la loi χ^2 avec r degrés de liberté et $\bar{\alpha}_0$ est la borne supérieure de $\mathbb{P}_{\text{fa}}(T_{\text{QFMA}_C}; m_\alpha)$.

2. La plus petite valeur de $\bar{\alpha}_1 = \mathbb{P}_\nu \left(\hat{S}_\nu^{L+\nu-1} < h_L^* \right)$, à condition que la borne supérieure de $\mathbb{P}_{\text{fa}}(T_{\text{QFMA}_C}; m_\alpha)$ soit égale à $\bar{\alpha}_0$, est donnée par

$$\bar{\alpha}_1 = F_{\chi^2} \left[F_{\chi^2}^{-1} \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_0}{m_\alpha}; r \right); r, \lambda \right], \quad (12)$$

où $x \mapsto F_{\chi^2}(x; r, \lambda)$ est la fonction de distribution χ^2 non centrée avec r degrés de liberté et le paramètre de noncentralité

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2} \|WM\Theta^T\|_F^2 \cos^2(\beta) = s^2 \cos^2(\beta).$$

La démonstration du Théorème est analogue à celle de la Proposition 3.1 [9].

5 Profil transitoire dynamique inconnu

Aucun profil putatif ne sera pas défini maintenant car les vecteurs $\theta_1, \dots, \theta_L$ du profil de changement transitoire dynamique sont considérés inconnus. Considérons les hypothèses suivantes

$$\mathcal{H}_0 = \{\theta_1 = \dots = \theta_L = 0\} \text{ et } \mathcal{H}_1 = \left\{ \bigcup_{i=1}^L \{\theta_i \neq 0\} \right\}.$$

Le test RVG invariant à fenêtre limitée et le seuil variable applicable au modèle linéaire Gaussien avec un profil dynamique inconnu est [9] :

$$T_{\text{RVG}}(h) = \inf \left\{ n \geq L : \max_{1 \leq k \leq L} \left[\tilde{S}_{n-k+1}^n - h_k \right] \geq 0 \right\}, \quad (13)$$

$$\tilde{S}_{n-k+1}^n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=n-k+1}^n Y_i^T \tilde{Q} Y_i,$$

où $\tilde{Q} = P_H M [M^T P_H M]^{-1} M^T P_H$ et les seuils h_1, \dots, h_L sont choisis de telle sorte que $\mathbb{P}_{\text{fa}}(T; m_\alpha)$ soit respectée. L'optimisation du test RVG (13) et sa CO sont données par le Théorème suivant (voir la démonstration dans [9, Corollaire 4.1]).

Théorème 3 *Considérons le modèle génératif (1) et le test RVG invariant à fenêtre limitée et le seuil variable (13).*

1. L'instant d'arrêt $T_{\text{RVG}}(h)$ du test RVG invariant à fenêtre limitée et le seuil variable (13) optimisé est réduit à l'instant d'arrêt T_{QFMA_D} du test FMA quadratique au profil dynamique inconnu (QFMA_D)

$$T_{\text{QFMA}_D}(h_L^*) = \inf \left\{ n \geq L : \tilde{S}_{n-L+1}^n \geq h_L^* \right\} \quad (14)$$

avec le seuil $h_L^* = F_{\chi^2}^{-1} \left((1 - \bar{\alpha}_0)^{\frac{1}{m_\alpha}}; Lr \right)$, où $x \mapsto F_{\chi^2}^{-1}(x; Lr)$ est le quantile de la loi χ^2 avec Lr degrés de liberté et $\bar{\alpha}_0$ est la borne supérieure de $\mathbb{P}_{\text{fa}}(T_{\text{QFMA}_D}; m_\alpha)$.

2. La plus petite valeur de $\bar{\alpha}_1 = \mathbb{P}_\nu \left(\tilde{S}_\nu^{L+\nu-1} < h_L^* \right)$, à condition que la borne supérieure de $\mathbb{P}_{\text{fa}}(T_{\text{QFMA}_D}; m_\alpha)$ soit égale à $\bar{\alpha}_0$, est donnée par

$$\bar{\alpha}_1 = F_{\chi^2} \left[F_{\chi^2}^{-1} \left((1 - \bar{\alpha}_0)^{\frac{1}{m_\alpha}}; Lr \right); Lr, \lambda \right], \quad (15)$$

où $x \mapsto F_{\chi^2}(x; Lr, \lambda)$ est la fonction de distribution χ^2 non centrée avec Lr degrés de liberté et le paramètre de noncentralité

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^L \|WM\theta_i\|_2^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|WM\Theta^T\|_F^2 = s^2,$$

où Θ est la matrice de taille $L \times r$ du vrai profil, définie dans la Section 3.

6 Domaines de préférence des tests

Soit un problème de la DCT, dont les paramètres $L, m_\alpha, \bar{\alpha}_0$ et $s = \frac{1}{\sigma} \|WM\Theta^T\|_F$. Pour éviter une irrégularité pour les petites valeurs de s (voir les détails dans [9]) et en tenant compte du fait que $(1 - \bar{\alpha}_0)^{\frac{1}{m_\alpha}} \leq 1 - \frac{\bar{\alpha}_0}{m_\alpha}$, la constante $1 - \frac{\bar{\alpha}_0}{m_\alpha}$ est utilisée par la suite. Nous avons trois tests : *i*) LFMA (linéaire avec le profil putatif); *ii*) QFMA_C (quadratique avec le profil constant inconnu); *iii*) QFMA_D (quadratique avec le profil dynamique inconnu). Comment choisir un test en fonction de l'angle β entre la matrice du profil putatif de changement transitoire et la matrice du vrai profil ?

QFMA_D contre LFMA. Ici, $\beta = \angle(WM\tilde{\Theta}^T, WM\Theta^T)$ est l'angle entre la matrice putative $WM\tilde{\Theta}^T$ et la vraie matrice $WM\Theta^T$. Si $\beta = 0$ alors la structure de l'équation (9) correspond à la relation entre les probabilités de détection manquée et de fausse alarme pour le test le plus puissant (PP) dans le cas moyen Gaussien [7, Chapitre 3]. Ainsi, le test QFMA_D (14) ne peut pas être meilleur que le test LFMA (8) lorsque $\beta = 0$. Soit β_0 la frontière subdivisant l'intervalle $[0, \pi/2]$ en deux sous-intervalles d'avantage des tests. On s'attend à ce que pour les angles $0 \leq \beta < \beta_0$ le test LFMA surpasse le test QFMA_D, mais pour les angles $\beta > \beta_0$ l'avantage appartient au test QFMA_D.

Définissons la valeur β_0 à partir de l'égalité des bornes $\bar{\alpha}_1$ (9) et (15) pour les deux tests à condition que $\bar{\alpha}_0$, L , m_α et s soient fixés de la même manière pour les deux tests

$$\bar{\alpha}_1(T_{\text{LFMA}}; s, \beta) = \bar{\alpha}_1(T_{\text{QFMA}_D}; s).$$

Théorème 4 *Considérons le modèle génératif (1) avec un profil de changement transitoire inconnu et deux concurrents : le test LFMA et le test QFMA_D. La valeur β_0 séparant deux sous-intervalles d'avantage est donnée comme suit*

$$\beta_0 = \arccos \left\{ \frac{1}{s} \left\{ \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_0}{m_\alpha} \right) - \Phi^{-1} (D(s)) \right\} \right\}, \quad (16)$$

$$D(s) = F_{\chi^2} \left(F_{\chi^2}^{-1} \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_0}{m_\alpha}; Lr \right); Lr, s^2 \right).$$

La démonstration du Théorème est analogue à celle de la Proposition 5.1 [9].

QFMA_D contre QFMA_C. Soit $L > 1$. Cette fois-ci, $\beta = \angle(WM\Psi^T, WM\Theta^T)$ est l'angle entre la matrice putative $WM\Psi^T$ et la vraie matrice $WM\Theta^T$. Si $\beta = 0$ alors la structure de l'équation (12) correspond à la relation entre les probabilités de détection manquée et de fausse alarme pour le test uniformément le PP avec la fonction de puissance constante sur une famille des ellipsoïdes concentriques [3]. Par le même raisonnement que dans le paragraphe précédent, on s'attend à ce que pour les angles $0 \leq \beta < \beta_0$ le test QFMA_C (11) surpasse le test QFMA_D (14), mais pour les angles $\beta > \beta_0$ l'avantage appartient au test QFMA_D.

La frontière β_0 entre deux sous-intervalles d'avantage des tests QFMA_C et QFMA_D est fixée à partir de l'égalité des bornes $\bar{\alpha}_1$ (12) et (15) pour les deux tests à condition que $\bar{\alpha}_0$, $L > 1$, m_α et s soient fixés de la même manière

$$\bar{\alpha}_1(T_{\text{QFMA}_C}; s, \beta) = \bar{\alpha}_1(T_{\text{QFMA}_D}; s).$$

Donc, on cherche la valeur β_0 comme solution de l'équation

$$F_{\chi^2} \left[F_{\chi^2}^{-1} \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_0}{m_\alpha}; r \right); r, \cos^2(\beta)s^2 \right]$$

$$= F_{\chi^2} \left[F_{\chi^2}^{-1} \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_0}{m_\alpha}; Lr \right); Lr, s^2 \right]$$

par une méthode numérique.

Simulation numérique. Supposons que $\bar{\alpha}_0 = 10^{-2}$, $L = 10$, $m_\alpha = 20$, $r = 10$, $0 \leq s \leq 12$ et la matrice $WM\Theta^T$ est arbitraire. La comparaison des tests LFMA vs. QFMA_D est présentée sur la Figure 1 à l'aide des courbes de niveau de la fonction $\bar{\alpha}_1 = \min \{ \bar{\alpha}_1(T_{\text{LFMA}}; s, \beta), \bar{\alpha}_1(T_{\text{QFMA}_D}; s) \}$ qui caractérise la meilleure CO des deux tests. La courbe $\beta_0 = \beta_0(s)$ (16) en rouge représente la frontière entre les domaines de préférence des tests LFMA et QFMA_D dans le plan (β, s) . La comparaison des tests QFMA_C vs. QFMA_D donne des résultats semblables.

Références

[1] B. BAKHACHE et I. NIKIFOROV : Reliable detection of faults in measurement systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 14(7):683–700, Nov. 2000.

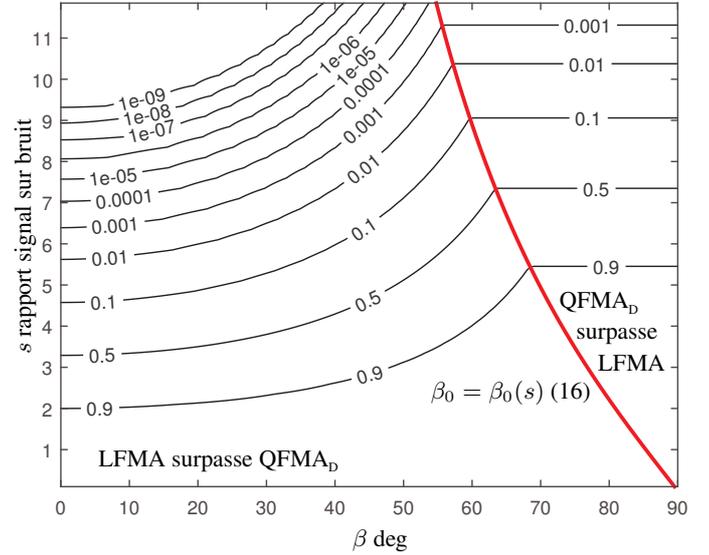


FIGURE 1 : Les domaines de préférence : LFMA vs. QFMA_D.

[2] V. L. DO, L. FILLATRE, I. NIKIFOROV et P. WILLETT : Security of SCADA systems against cyber-physical attacks. *IEEE Aerospace & Electronics Systems Magazine*, 32(5):28–45, May 2017.

[3] M. FOULADIRAD et I. NIKIFOROV : Optimal statistical fault detection with nuisance parameters. *Automatica*, 41(7):1157–1171, juillet 2005.

[4] M. FOULADIRAD et I. NIKIFOROV : On line change detection with nuisance parameters. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(13):258–263, 2006.

[5] B. K. GUÉPIÉ, L. FILLATRE et I. NIKIFOROV : Sequential detection of transient changes. *Sequential Analysis*, 31(4):528–547, 2012.

[6] B. K. GUÉPIÉ, L. FILLATRE et I. NIKIFOROV : Detecting a suddenly arriving dynamic profile of finite duration. *IEEE Transactions on Information Theory*, 63(5):3039–3052, 2017.

[7] E.L. LEHMANN et J.P. ROMANO : *Testing Statistical Hypotheses*. Springer Texts in Statistics. Springer, 2005.

[8] F. E. MANA, B. K. GUÉPIÉ et I. NIKIFOROV : Sequential detection of an arbitrary transient change profile by the FMA test. *Sequential Analysis*, 42(2):91–111, 2023.

[9] I. NIKIFOROV : Sequential detection of an unknown transient change profile by the finite moving average test. *Sequential Analysis*, 44:1–33, 2025.

[10] I. NIKIFOROV, F. HARROU, R. COGRANNE, P. BEAU-SEROY, E. GRALL, B. K. GUÉPIÉ, L. FILLATRE et J.-Ph. JEANNOT : Sequential detection of a total instantaneous blockage occurred in a single subassembly of a sodium-cooled fast reactor. *Nuclear Engineering and Design*, 366:110733, 2020.