

Modélisation sur groupes de Lie d’une distribution de Von Mises : application à la phase du signal GNSS

Esteban MORALES-AGUIRRE^{1,4} Samy LABSIR^{1,2} Benoît PRIOT⁴ Clément GAZZINO³ Gaël PAGES⁴

¹TéSA, 7 Bd de la Gare, 31500 Toulouse, France

²IPSA, 81 Av. de Grande Bretagne, 31300 Toulouse, France

³CNES, 18 Av. Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

⁴ISAE-SUPAERO, 10 Av. Edouard Belin BP 54032, 31055 Toulouse, France

Résumé – Les observations de phase de la porteuse dans les récepteurs GNSS permettent un positionnement au centimètre près mais sont affectées par un bruit de phase supposé qui suit une distribution de von Mises, dégradant la performance des estimateurs. Nous proposons une approche novatrice contraignant les paramètres de von Mises—localisation angulaire et dispersion—dans l’espace du groupe de Lie $SO(2) \times \mathbb{R}^+$. Un estimateur du maximum de vraisemblance sur groupes de Lie, résolu via un algorithme de Newton, améliore la rigueur mathématique et la précision, notamment avec peu d’observations, par rapport aux méthodes euclidiennes.

Abstract – Phase observations of the carrier signal in GNSS receivers enable centimeter-level positioning but are affected by phase noise, which is assumed to follow a von Mises distribution, thereby degrading the performance of estimators. We propose an innovative approach that constrains the von Mises parameters—angular location and dispersion—within the space of the Lie group $SO(2) \times \mathbb{R}^+$. A maximum likelihood estimator on Lie groups, solved via a Newton algorithm, enhances mathematical rigor and accuracy, particularly in scenarios with few observations, compared to Euclidean methods.

1 Introduction

Les systèmes de transport intelligents et les applications critiques pour la sécurité nécessitent un positionnement précis et fiable, notamment en environnements complexes tels que les zones urbaines où différentes interférences peuvent se trouver dans la ligne de mire du signal. Le GNSS (Géolocalisation et Navigation par un Système de Satellites) est la référence en matière de navigation, exploitant les mesures de phase de la porteuse du signal pour obtenir des précisions de positionnement centimétriques [1]. Cependant, la résolution des ambiguïtés de phase est sensible à un faible rapport Signal/Bruit (SNR), ce qui affecte la précision du positionnement [2]. Bien que contraignante, cette étape est essentielle pour les techniques de Cinématique Temps Réel (RTK) et de Positionnement Ponctuel Précis (PPP), cette dernière étant particulièrement avantageuse, car elle ne dépend pas d’un réseau de stations de référence [3].

Dans cette étude, nous analysons la modélisation de la phase porteuse dans une boucle de poursuite d’un récepteur GNSS. Les boucles de poursuite conventionnelles utilisent une boucle à verrouillage de phase (PLL) pour estimer la phase et la fréquence Doppler. Ce processus peut être modélisée comme un problème d’estimation récursive, reformulé à l’aide d’un filtre de Kalman [4]. Cependant, les hypothèses gaussiennes classiques ne prennent pas en compte la périodicité des données circulaires, introduisant un biais dans l’estimation, [5]. Il a été démontré que le bruit de phase suit une distribution de von Mises (VMD) [3], caractérisée par deux paramètres inconnus : la phase ϕ et le paramètre de concentration κ , lié au bruit de phase et à la qualité du signal [6], [7].

Pour surmonter ces limitations, nous proposons de modéliser la VMD avec ses paramètres contraints à évoluer dans

leur espace naturel $]-\pi, \pi]$ et $\mathbb{R}^+$, exploitant la structure des groupes de Lie, où ϕ est associé à une matrice de rotation dans $SO(2)$ et κ appartient à $\mathbb{R}^+$. Nous développons un estimateur du maximum de vraisemblance (ML) sur $SO(2) \times \mathbb{R}^+$, résolu par un algorithme de Newton sur groupes de Lie. Il est montré par simulation que cette approche garantit une estimation précise et stable de ϕ et κ , et ce pour un faible nombre de mesures, ce qui est typiquement rencontré en GNSS.

Cet article est structuré comme suit : la section 2 décrit l’approche conventionnelle d’estimation des paramètres de la VMD. La section 3 notre modélisation de la VMD sur groupe de Lie. Enfin, les résultats des simulations sont exposés en section 4, suivis de la conclusion en section 5.

2 Approche euclidienne classique

Dans cette section, nous fournissons les fondements nécessaires pour caractériser la VMD. Tout d’abord, nous introduisons sa définition et expliquons sa relation avec l’application GNSS. Ensuite, nous détaillons l’approche conventionnelle permettant d’estimer le paramètre de localisation, $\phi \in [-\pi, +\pi]$, et le paramètre de concentration, $\kappa \in \mathbb{R}^+$.

Dans le contexte GNSS, le signal reçu à l’instant i est modélisé par $z_i = \alpha e^{j\phi_i} + n_i$, où α est l’amplitude, $n_i \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$ un bruit gaussien complexe blanc, et ϕ_i la phase réelle. La mesure de phase est alors définie par $\psi_i = \arctan(\text{Im}\{z_i\}, \text{Re}\{z_i\}) \in]-\pi, \pi]$. Il en résulte que ψ_i suit une distribution de von Mises de paramètre de localisation ϕ et de concentration $\kappa = 2\alpha/\sigma_n^2$ [7]. La VMD est classiquement rencontrée en traitement du signal pour caractériser les mesures d’angle ou de phase, et elle présente l’avantage d’être

définie sur $]-\pi, \pi]$ [5]. Ainsi, en considérant la mesure de phase comme une variable aléatoire suivant une VMD tel que $\psi \sim \mathcal{VM}(\phi, \kappa)$, sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(\psi|\phi, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp\{\kappa \cos(\psi - \phi)\}, \quad (1)$$

où $I_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0.

2.1 Estimation conventionnelle des paramètres de la VMD

Une approche conventionnelle de ce problème consiste à identifier la paire de paramètres, tels que $\mathbf{x} = [\phi, \kappa]^\top$, qui maximisent la vraisemblance, définissant ainsi le problème d'estimation comme un problème d'optimisation de la fonction de coût suivante :

$$h(\phi, \kappa) = \sum_{i=1}^N [\log(2\pi I_0(\kappa)) - \kappa \cos(\psi_i - \phi)]. \quad (2)$$

L'absence de solution analytique, due aux minima locaux cycliques, impose une approche numérique. L'algorithme de Newton, réputé pour sa rapidité de convergence [8], est classiquement employé :

$$\mathbf{x}_{l+1} = \mathbf{x}_l - \mathbf{H}_{EU}^{-1}(\mathbf{x}_l) \nabla_{EU} h(\mathbf{x}_l). \quad (3)$$

où $\mathbf{H}_{EU}(\phi, \kappa) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $\nabla_{EU} h(\phi, \kappa) \in \mathbb{R}^2$ sont respectivement la matrice Hessienne et le gradient de (2) dans l'espace euclidien défini par :

$$\nabla_{EU} h(\phi, \kappa) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^N \kappa \sin(\psi_i - \phi) \\ N \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} - \sum_{i=1}^N \kappa \cos(\psi_i - \phi) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_{EU}(\phi, \kappa) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \kappa \cos(\psi_i - \phi) & -\sum_{i=1}^N \sin(\psi_i - \phi) \\ -\sum_{i=1}^N \sin(\psi_i - \phi) & H_{EU(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

où :

$$H_{EU(2,2)} = N \left[\frac{1}{I_0(\kappa)} \left(\frac{I_0(\kappa) + I_2(\kappa)}{2} \right) - \kappa^2 \frac{I_1(\kappa)^2}{I_0(\kappa)^2} \right].$$

2.2 Limitations de l'approche conventionnelle et stratégie proposée sur les groupes de Lie

L'équation (2) montre que l'algorithme de Newton peut estimer des valeurs sortant de leurs ensembles naturels de définition. Pour s'affranchir de cette limitation, contraindre κ à $\mathbb{R}^+$ via une valeur absolue et ϕ à $]-\pi, \pi]$ via une opération de modulo est une solution empirique, mais non rigoureusement mathématique car ne correspondant pas à la solution du maximum de vraisemblance. Afin d'obtenir un formalisme plus rigoureux, nous exploitons la structure des groupes de Lie. En représentant ϕ par une matrice de rotation sur $SO(2)$, nous supprimons la contrainte de modulo. De plus, la modélisation de κ sur le groupe de Lie $\mathbb{R}^+$ permet de reformuler le problème d'estimation résolu via un algorithme de Newton sur l'espace $SO(2) \times \mathbb{R}^+$.

3 Stratégie d'estimation sur groupe de Lie

3.1 Groupe de Lie : Définition

Un groupe de Lie matriciel ($G \subset \mathbb{R}^{n \times n}, \otimes$) est un espace matriciel $n \times n$ formant une variété différentiable et un groupe muni de la loi $\otimes$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, espace tangent en l'identité, fournit une approximation locale de G , reliée via les applications exponentielle et logarithme $\text{Exp}_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$ et $\text{Log}_G : G \rightarrow \mathfrak{g}$. Une bijection $[\cdot]^\wedge : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}$ et sa réciproque $[\cdot]^\vee : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}^m$ permettent de travailler avec des vecteurs plutôt que des matrices, optimisant ainsi les calculs numériques [9], [8], [10].

3.1.1 Cas de $SO(n)$

Le groupe $SO(n)$ est défini comme l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1. Pour $n = 2$, toute matrice de rotation s'écrit sous la forme $\mathbf{R}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$, avec une algèbre de Lie associée aux matrices anti-symétriques $\mathbf{T}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{bmatrix}$.

L'application exponentielle de $SO(2)$ est donnée par $\text{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\phi) = \exp(\mathbf{T})$, tandis que l'application logarithmique est définie par

$$\text{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R}) = [1, 0] \log(\mathbf{R}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

3.1.2 Cas de $\mathbb{R}^+$

L'espace $\mathbb{R}^+$ forme un groupe de Lie commutatif sous l'opération de multiplication classique, l'élément neutre étant 1. Les applications logarithmique et exponentielle pour ce groupe sont données par le logarithme naturel $\log(\cdot)$ et la fonction exponentielle $\exp(\cdot)$, respectivement, toutes deux définies sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$.

3.2 Problème d'estimation VMD sur groupe de Lie

Dans cette sous-section, nous proposons une nouvelle modélisation de la VMD. Comme évoqué précédemment, un angle ϕ peut être paramétré par une matrice de rotation sur $SO(2)$. Ainsi, le paramètre angulaire ϕ de la VMD défini par l'équation (1) peut être écrit comme $\phi = \text{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R})$ avec $\mathbf{R} \in SO(2)$, et nous obtenons :

$$f(\psi_i|\mathbf{R}, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp\{\kappa \cos[\psi_i - \text{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R})]\}. \quad (7)$$

De plus, il convient de noter que, κ étant positif, il appartient au groupe de Lie (GdL) des nombres positifs. Par conséquent, l'ensemble des paramètres inconnus appartient au produit de groupes de Lie $SO(2) \times \mathbb{R}^+$ et est écrit ci-dessous dans l'équation (8). Pour les estimer, nous proposons de déterminer l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance (ML) sur GdL :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \kappa \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{R}, \kappa}{\operatorname{argmax}} \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp \left\{ \kappa \cos(\psi_i - \operatorname{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R})) \right\}. \quad (9)$$

En prenant le logarithme opposé du critère à maximiser dans (9), nous obtenons :

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{R}, \kappa}{\operatorname{argmin}} h(\mathbf{R}, \kappa), \quad (10)$$

où :

$$h(\mathbf{R}, \kappa) = \sum_{i=1}^N \left[\log(2\pi I_0(\kappa)) - \kappa \cos(\psi_i - \operatorname{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R})) \right]. \quad (11)$$

3.3 Résolution du problème d'estimation

De manière similaire au cas euclidien, le problème d'estimation dans l'équation (11) n'est pas résoluble analytiquement, mais plutôt par une approche numérique basée sur un algorithme de Newton souvent utilisé dans la littérature [8], [10], sur le groupe de Lie. Plus précisément, $\hat{\mathbf{X}}$ peut être approché en générant un ensemble de $\{\mathbf{X}^l\}_{l=1}^L$ convergeant vers $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}^{l+1} = \mathbf{X}^l \operatorname{Exp}_{SO(2) \times \mathbb{R}^+}^\wedge[\delta^l], \quad \forall l \in \llbracket 1 : L \rrbracket, \quad (12)$$

avec $\operatorname{Exp}_{SO(2) \times \mathbb{R}^+}^\wedge[\delta^l] = \begin{bmatrix} \operatorname{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\delta_{\mathbf{R}}^l) & 0 \\ 0 & \exp(\delta_{\kappa}^l) \end{bmatrix}$,

et $\delta^l = [\delta_{\mathbf{R}}^l, \delta_{\kappa}^l]^\top$ (avec $\delta_{\mathbf{R}}^l$ et $\delta_{\kappa}^l \in \mathbb{R}$) est :

$$\begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{R}}^l \\ \delta_{\kappa}^l \end{bmatrix} = -\mathbf{H}_{LG}(\mathbf{R}^l, \kappa^l)^{-1} \nabla_{LG} h(\mathbf{R}^l, \kappa^l), \quad (13)$$

où $\mathbf{H}_{LG}(\mathbf{R}, \kappa) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $\nabla_{LG} h(\mathbf{R}, \kappa) \in \mathbb{R}^2$ sont respectivement la matrice Hessienne et le gradient de $h(\mathbf{R}, \kappa)$. Puisque ces deux opérations sont définies dans l'espace $SO(2) \times \mathbb{R}^+$, la matrice Hessienne et le gradient sur le groupe de Lie sont définis comme suit [11] :

$$\begin{aligned} \nabla_{LG} h(\mathbf{R}, \kappa) &= \left[\frac{\partial h(\mathbf{R} \operatorname{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_{\mathbf{R}}), \kappa)}{\partial \epsilon_{\mathbf{R}}} \right]_{\epsilon_{\mathbf{H}}=0}, \quad (14) \\ H_{LG(11)} &= \frac{\partial h(\mathbf{R} \operatorname{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon'_{\mathbf{R}}) \operatorname{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon''_{\mathbf{R}}), \kappa)}{\partial \epsilon'_{\mathbf{R}} \partial \epsilon''_{\mathbf{R}}} \Big|_{\epsilon_{\mathbf{H}}=0}, \\ H_{LG(12)} &= \frac{\partial h(\mathbf{R} \operatorname{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_{\mathbf{R}}), \kappa \exp(\epsilon_{\kappa}))}{\partial \epsilon_{\mathbf{R}} \partial \epsilon_{\kappa}} \Big|_{\epsilon_{\mathbf{H}}=0}, \\ H_{LG(21)} &= \frac{\partial h(\mathbf{R} \operatorname{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon_{\mathbf{R}}), \kappa \exp(\epsilon_{\kappa}))}{\partial \epsilon_{\kappa} \partial \epsilon_{\mathbf{R}}} \Big|_{\epsilon_{\mathbf{H}}=0}, \\ H_{LG(22)} &= \frac{\partial h(\mathbf{R}, \kappa \exp(\epsilon'_{\kappa}) \exp(\epsilon''_{\kappa}))}{\partial \epsilon'_{\kappa} \partial \epsilon''_{\kappa}} \Big|_{\epsilon_{\mathbf{H}}=0}, \end{aligned}$$

où $\epsilon_{\mathbf{H}} = [\epsilon_{\kappa}, \epsilon'_{\kappa}, \epsilon''_{\kappa}, \epsilon_{\mathbf{R}}, \epsilon'_{\mathbf{R}}, \epsilon''_{\mathbf{R}}]^\top$ et $\epsilon_{\mathbf{H}} = [\epsilon_{\mathbf{R}}, \epsilon_{\kappa}]^\top$.

En utilisant (11), et sachant que

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \operatorname{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R} \operatorname{Exp}_{SO(2)}^\wedge(\epsilon)) \Big|_{\epsilon=0} = 1,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_{\kappa}} \kappa \exp(\epsilon_{\kappa}) \Big|_{\epsilon_{\kappa}=0} = \kappa,$$

on peut démontrer que

$$\nabla_{LG} h(\mathbf{R}, \kappa) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^N \kappa \sin(\psi_i - \operatorname{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R})) \\ N \left(\kappa \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right) - \sum_{i=1}^N \kappa \cos(\psi_i - \operatorname{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R})) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$H_{LG(11)} = \sum_{i=1}^N \kappa \cos(\psi_i - \operatorname{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R})), \quad (16)$$

$$H_{LG(21)} = -\sum_{i=1}^N \kappa \sin(\psi_i - \operatorname{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R})), \quad (17)$$

$$H_{LG(12)} = H_{LG(21)} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} H_{22} &= -\sum_{i=1}^N \kappa \cos(\psi_i - \operatorname{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R})) \\ &+ N \left[\frac{\kappa^2}{I_0(\kappa)} \left[\frac{I_0(\kappa) + I_2(\kappa)}{2} \right] - \kappa^2 \frac{I_1(\kappa)^2}{I_0(\kappa)^2} + \kappa \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

où $I_0(\kappa)$, $I_1(\kappa)$ et $I_2(\kappa)$ sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre zéro, un et deux, respectivement, calculées en κ .

4 Simulations numériques

4.1 Protocole de simulation

Dans cette section, nous évaluons numériquement la modélisation proposée en implémentant l'algorithme de Newton sur groupe de Lie afin d'estimer $\mathbf{R}$ et κ . Il est comparé à un algorithme de Newton conventionnel estimant de manière euclidienne, comme décrit dans l'équation (2). Des mesures synthétiques de phase $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ ont été générés selon l'équation (1) avec comme paramètres $\kappa = 1$ et $\phi = 10^\circ \frac{\pi}{180^\circ}$ rad pour différentes valeurs de N . Il est important de noter qu'il existe un intérêt pour les valeurs κ faibles (autour de $\kappa = 1$) car celles-ci représentent des scénarios où la qualité du signal est faible. Pour obtenir les résultats, $N_r = 1000$ itérations de Monte Carlo ont été effectuées. La performance des estimateurs est ensuite évaluée à l'aide de l'erreur quadratique intrinsèque sur $SO(2)$ et de l'erreur quadratique standard pour κ . Elle est respectivement donnée pour N_r réalisations des estimateurs $\hat{\kappa}_r$ et $\hat{\mathbf{R}}_r$ par

$$MSE(\phi) = \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} \|\operatorname{Log}_{SO(2)}^\vee(\mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_r)\|^2, \quad (20)$$

$$MSE(\kappa) = \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} (\kappa - \hat{\kappa}_r)^2. \quad (21)$$

Pour une meilleure interprétation physique, la MSE intrinsèque de la phase ϕ dans la matrice $\mathbf{R}$ est convertie en RMSE (Erreur Quadratique Moyenne) en mètres, comme en GNSS, selon $\operatorname{RMSE} = \frac{\lambda_c}{2\pi} \sqrt{MSE_\phi}$, avec $\lambda_c = 19,03$ cm pour le signal GPS L1 [12].

4.2 Discussion

Sur la Figure 1, nous traçons la RMSE relative à l'estimation de $\mathbf{R}$. Pour un faible nombre de mesures ($N < 20$), l'esti-

mation obtenue avec la méthode basée sur GdL (groupe de Lie) semble légèrement moins précise, mais peu significative rapport à la méthode euclidienne. Cependant, pour $N > 20$, la précision de la méthode GdL est meilleure et garantit un estimateur plus stable que la méthode euclidienne. Cette différence de comportement peut s'expliquer à travers le calcul de la Hessienne dans les deux algorithmes de Newton. En effet, nous constatons à travers les équations (5) et (16) que les termes de corrélation de la Hessienne calculés sur le groupe de Lie dépendent explicitement des deux paramètres κ et $\mathbf{R}$. Concernant ceux de la méthode euclidienne, la dépendance est uniquement en ϕ . Cette différence permet non seulement d'obtenir une meilleure précision sur ϕ pour un grand nombre de mesures mais aussi une meilleure précision sur l'estimation de κ , comme observé sur la figure 2 lorsque le nombre de mesures est faible. Cette observation est intéressante car elle rend l'estimateur GdL particulièrement adapté dans un contexte d'estimation GNSS où peu de mesures satellites sont traitées à chaque acquisition.

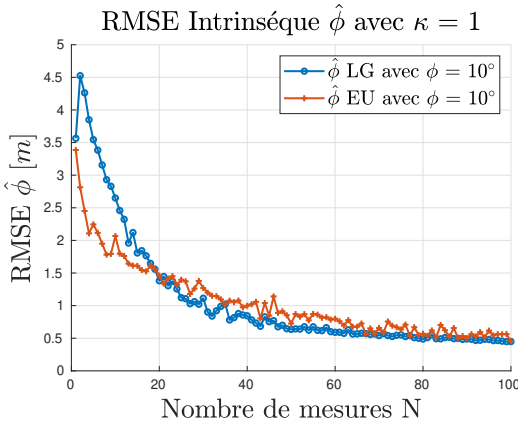


FIGURE 1 : MSE intrinsèque de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\phi = 10^\circ$ et $\kappa = 1$.

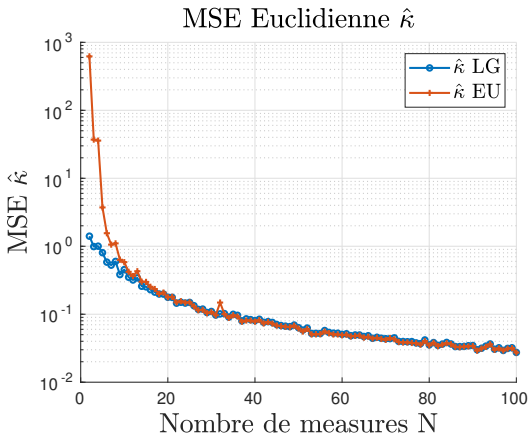


FIGURE 2 : MSE Euclidienne de $\hat{\kappa}$ pour $\phi = 10^\circ$ et $\kappa = 1$.

5 Conclusions

Dans cette communication, nous introduisons une nouvelle approche pour l'estimation du paramètre de localisation ϕ et du paramètre de concentration κ de la distribution de von Mises. Cette méthode reformule le problème d'estimation en utilisant le formalisme des groupe de Lie, offrant ainsi une

alternative mathématiquement rigoureuse aux techniques euclidiennes. Les performances de l'algorithme proposée sur GdL ont été comparées à celles de la méthode euclidienne, et il a été constaté ainsi une amélioration la précision et de la convergence des estimateurs. Les travaux futurs se concentreront sur l'analyse du cas dynamiques lorsque les mesures de phase varieront au cours du temps. Cela impliquera le développement d'un nouveau filtre bayésien sur GdL.

Références

- [1] C. Hegarty and E. Kaplan, *Understanding GPS - Principles and Applications*, Second Edition. Artech House. Inc., MA, 2006.
- [2] P. D. Groves, *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems* : Artech House. Inc. Boston, 2008.
- [3] P. Teunissen and O. Montenbruck, *Springer handbook of global navigation satellite systems*, vol. 10. Springer, 2017.
- [4] S. Labsir *et al.*, "Theoretical Performance Analysis of GNSS Tracking Loops," in *2023 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS)*, pp. 946–951, 2023.
- [5] K. V. Mardia and P. E. Jupp, "Directional statistics," *Directional Statistics*, pp. 1–432, 5 2008.
- [6] H. K. W. Kouassi *et al.*, "A linear-circular regression estimate for data fusion : Application to GNSS carrier-phase signal processing," *Digital Signal Processing*, vol. 117, p. 103172, 2021.
- [7] F. Fabozzi *et al.*, "Robust GNSS Phase Tracking in Case of Slow Dynamics Using Variational Bayes Inference," in *2020 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, pp. 1189–1195, 2020.
- [8] B. Owren and B. Welfert, "The Newton Iteration on Lie Groups," *BIT Numerical Mathematics* 2000 40 :1, vol. 40, pp. 121–145, 2000.
- [9] J. Solà, J. Deray, and D. Atchuthan, "A micro Lie theory for state estimation in robotics," *BIT Numerical Mathematics*, pp. 121–145, 2 2000.
- [10] R. E. Mahony and J. H. Manton, "The Geometry of the Newton Method on Non-Compact Lie Groups," *Article in Journal of Global Optimization*, vol. 23, pp. 309–327, 2002.
- [11] G. S. Chirikjian, "Stochastic models, information theory, and lie groups," *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups*, vol. 2, pp. 1–433, 1 2012.
- [12] D. Medina *et al.*, "Compact CRB for delay, Doppler, and phase estimation – application to GNSS SPP and RTK performance characterisation," *Sonar & Navigation Research Article*, 2020.
- [13] R. V. Lenth, "Robust Measures of Location for Directional Data," *Technometrics*, vol. 23, p. 77, 2 1981.
- [14] G. Marrelec and A. Giron, "Estimating the concentration parameter of a von Mises distribution : a systematic simulation benchmark," *Statistics-Simulation and Computation*, vol. 53, pp. 117–129, 2024.
- [15] D. J. Best and N. I. Fisher, "The bias of the maximum likelihood estimators of the von Mises-Fisher concentration parameters," *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, vol. 10, pp. 493–502, 1 1981.