

# Opérateur de translation en échelle pour les signaux à temps discret

Armand MATER Mamadou MBOUP

CReSTIC EA3804, UFR Sciences Exactes et Naturelles, Moulin de la Housse, Chem. des Rouliers, 51100 Reims

**Résumé** – Nous étudions ici l’opérateur de translation en échelle pour les signaux en temps discret. L’opérateur défini à l’aide de la transformation de Möbius s’applique rigoureusement pour n’importe quelle échelle. Les problèmes de mise en œuvre pratique sont abordés et présentés dans le cadre du filtrage linéaire en temps discret classique. Des illustrations sur des signaux 1D et 2D sont données.

**Abstract** – We here investigate the scale-change operator for discrete-time signals. The operator, defined using Möbius transformations, applies rigorously for any arbitrary scale. Practical implementation issues are discussed and presented within the framework of classical discrete-time linear filtering. Illustrations of 1D and 2D signals are given.

## 1 Introduction

Les opérateurs de translation sont des éléments fondamentaux de nombreux concepts en traitement du signal, tels que l’étude de la périodicité, la stationnarité, le filtrage linéaire, etc. Ces opérateurs jouent également un rôle clé dans plusieurs domaines des mathématiques, notamment l’analyse fonctionnelle et l’analyse harmonique, qui alimentent le développement de la théorie des systèmes linéaires et fournissent la plupart des outils de traitement du signal pour la représentation, l’analyse et la synthèse des signaux.

Dans un cadre continu, la translation en échelle est liée à la translation temporelle par une anamorphose, qui correspond à une déformation logarithmique de l’axe temporel. Cette anamorphose définit une application qui permet d’exprimer presque tous les concepts liés à la translation temporelle par leurs équivalents en translation d’échelle. Par exemple, la transformée de Mellin apparaît comme l’image de la transformée de Fourier classique et la propriété d’auto-similarité peut être dérivée de la stationnarité classique, à un facteur multiplicatif près. Malheureusement, cette application ne s’applique que dans le cadre du temps continu.

La définition d’un opérateur de translation en échelle en temps discret n’admet pas toujours une définition unanime. Son usage est donc restreint à des cas favorables, ou encore un retour dans un domaine continu via la formule de Shannon où une interpolation peut être faite (pour un exemple voir une idée introduite dans [8] puis développée dans [7]).

Pour notre part nous nous intéresserons ici à une définition donnée dans [4] qui l’exprime rigoureusement du point de vue mathématique en termes d’action de groupe par le groupe des transformations de Möbius [3]. A l’origine, cet opérateur a été défini dans un but plutôt théorique afin par exemple de définir une transformée de Mellin en temps discret [6, 5]. La transformée de Mellin ainsi définie s’écarte de l’état de l’art, où, de manière générale, un passage dans le domaine continu est effectué (voir [1, 2, 9]). Cependant, cet opérateur a tout de même des applications physiques. Il permet d’appliquer des zooms [6, 5].

Nous allons nous intéresser à cet opérateur de translation en temps discret en nous intéressant à ses applications physiques. Hormis l’introduction, cet article est divisé en trois

grandes parties. Nous commencerons par voir brièvement la construction de cet opérateur introduit dans [4] puis nous verrons comment l’implémenter. Ces résultats sur des signaux en 1 dimension et les problèmes entraînés seront étudiés puis nous ferons de même en 2 dimensions sur des images.

## 2 L’opérateur de translation en échelle en temps discret

### 2.1 Construction

**Définition 1** On appelle transformation de Möbius la fonction définie par  $G_\theta : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $s \mapsto \frac{e^{i\theta} - s}{e^{i\theta} + s}$ , où  $\theta$  est un paramètre satisfaisant  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ .

Cette transformation permet d’exprimer des notions en temps continu via leurs équivalents en discret. En particulier, partant de l’opérateur de translation en échelle  $\alpha$  :

$\mathbb{C}_+ \ni s \mapsto S_\alpha(s) = \alpha s$ , cette transformation de Möbius permet de l’exprimer dans le disque par :

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto (G_\theta \circ S_\alpha \circ G_\theta^{-1})(z).$$

**Lemme 2** Pour tout  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , on a :

$$(G_\theta \circ S_\alpha \circ G_\theta^{-1})(z) = \frac{\gamma_1 z + \gamma_2}{\gamma_2 z + \gamma_1} = \gamma_\alpha(z) \quad (1)$$

$$\text{avec } \gamma_1 = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}\alpha}{2\sqrt{\alpha\cos(\theta)}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{e^{i\theta}(1-\alpha)}{2\sqrt{\alpha\cos(\theta)}}.$$

Ainsi,  $\gamma_\alpha$  est un élément du groupe hyperbolique des transformations linéaires :

$$\Gamma := \left\{ \gamma(z) = \frac{\gamma_1 z + \gamma_2}{\gamma_2 z + \gamma_1}, |\gamma_1|^2 - |\gamma_2|^2 = 1 \right\} \quad (2)$$

Chaque élément de  $\Gamma$  envoie  $\mathbb{D}$  le disque unité et  $\mathbb{T}$  le cercle unité dans lui-même (respectivement). Inversement, on a :

**Lemme 3 ([4])** Pour chaque élément  $\gamma(z) \in \Gamma$ , il existe  $\alpha_\gamma > 0$ ,  $|\theta_\gamma| < \frac{\pi}{2}$  et  $|\lambda_\gamma| = 1$  tels que  $\gamma(z) = \gamma_\alpha(z) = \lambda_\gamma(G_\theta \circ S_\alpha \circ G_\theta^{-1})(\lambda_\gamma z)$ .

Sans perte de généralités on peut considérer  $\theta = 0$  pour simplifier les expressions.

**Définition 4** En utilisant l'équivalence précédente, il est possible de définir la translation d'un signal à partir de sa transformée en Z.

Soit  $(x_n)_n \in \ell_2$  de transformée en Z notée  $X(\cdot)$ . La transformée en Z du signal translaté  $(x_n^\alpha)_n$  est donnée par :

$$T_\alpha X(z) = X^\alpha(z) = \frac{1}{\gamma_2 z + \gamma_1} X(\gamma_\alpha(z)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^\alpha z^n \quad (3)$$

**Proposition 5**  $\forall \gamma_\alpha \in \Gamma$ , on pose  $\Phi_n^\alpha := \frac{1}{\gamma_2 z + \gamma_1} (\gamma_\alpha(z))^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . La famille  $(\Phi_n^\alpha(z))_{n \in \mathbb{N}}$  est complète et orthogonale dans  $H^2(\mathbb{D})$ .

**Remarque 6** En posant  $\phi_{n,m}^\alpha = \langle \Phi_n^\alpha, z^m \rangle$  qui est donc la transformée en Z de  $\Phi_n^\alpha$  on obtient :

$$x_n^\alpha = \sum_{m \geq 0} x_m \phi_{m,n}^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

**Définition 7** Il est donc possible de définir la translation en échelle en temps discret via l'application :

$$\mathbf{x} = (x_n)_n \mapsto \mathbf{x}^\alpha = (x_n^\alpha)_n = \left( \sum_{m \geq 0} x_m \phi_{m,n}^\alpha \right)_n \quad (5)$$

Reformulée du point de vue matriciel on obtient :

$$\mathbf{x}^\alpha = \phi_\alpha \mathbf{x} \text{ avec } \phi_\alpha = (\phi_{n,m}^\alpha)_{n,m \geq 0} \quad (6)$$

Ainsi cette opération peut être vue comme un simple changement de base.

## 2.2 Propriétés/Implémentation

**Proposition 8**

$$\begin{cases} \Phi_0^\alpha(z) = \frac{1}{\gamma_2 z + \gamma_1} = \frac{\frac{1}{\gamma_1}}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} z + 1} \\ \Phi_n^\alpha(z) = \gamma_\alpha(z) \Phi_{n-1}^\alpha(z) = \frac{\gamma_1 z + \gamma_2}{\gamma_1} \Phi_{n-1}^\alpha(z), \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

Ainsi, il est possible d'implémenter cet opérateur en suivant le diagramme de la figure 1.

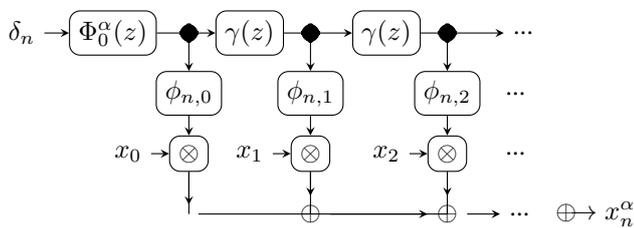


FIGURE 1 : Diagramme d'implémentation

## 3 Cas des signaux 1D

### 3.1 Cas d'un signal continu

Considérons le signal continu suivant :

$$f(t) = (0.66(t - 1.87)^2 + 0.1)e^{-0.66(t-2)^2}$$

échantillonné à la période  $T_s = 0.01$ . On peut considérer  $t$  allant jusqu'à 7 ce qui est suffisamment élevé pour contenir tout le support de cette fonction.

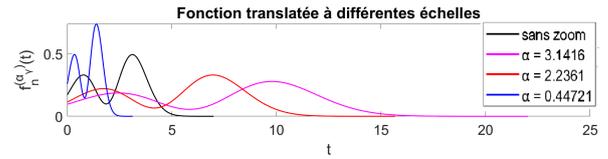


FIGURE 2 : Effectivité de l'opérateur à des échelles irrationnelles

Comme on peut le voir sur la figure 2, la translation est bien traitée.

À présent, on s'intéresse au cas où le signal présente une discontinuité.

### 3.2 Oscillations de Gibbs

On reprend le même signal en tronquant son support. En appliquant la translation, voici ce que l'on obtient.

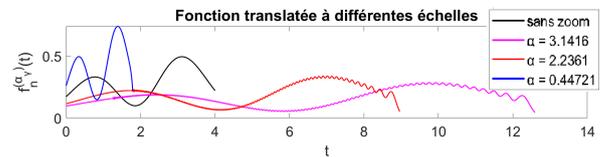


FIGURE 3 : Effectivité de l'opérateur sur un signal de support tronqué

On désigne par  $N_\alpha = \lfloor N \times \alpha \rfloor$  la taille du signal translatée. On peut voir nettement apparaître dans la figure 3 un phénomène de Gibbs mais uniquement pour les deux translations d'ordre supérieur à 1 et à partir de temps différents. En effet, la matrice  $\phi_\alpha$  étant doublement infinie, les  $N$  échantillons du signal d'entrée sont implicitement complétés par un nombre infini de zéros pour avoir une dimension compatible. Le passage du dernier échantillon  $x_N$  à zéro représente ainsi un saut dans le signal vu par l'opérateur de translation. C'est finalement cette discontinuité induite qui est à l'origine du phénomène de Gibbs car filtrer un signal avec des sauts entraîne des oscillations. Notons que dans l'expérience précédente, ce phénomène est absent car le signal décroît vers zéro de façon lisse.

Avant d'essayer de régler ce problème, il est d'abord important de comprendre pour quelles valeurs de  $\alpha$  celui-ci apparaît. Sur les deux translations d'ordres plus élevés, on s'aperçoit que l'oscillation débute en réalité à partir de l'indice  $n_\alpha = \lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor$  et persiste jusqu'à la fin du signal translaté, i.e. jusqu'à  $N_\alpha = \lfloor N \times \alpha \rfloor$ .

Ainsi, si l'on considère une translation de paramètre  $\alpha < 1$ , on a  $n_\alpha = \lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor > \lfloor N \times \alpha \rfloor = N_\alpha$ . Les oscillations sont en réalité bien présentes mais ont lieu en dehors de l'intervalle que l'on considère. Il n'y a donc pas de correction nécessaire à faire pour ce cas de figure.

Autrement, la première idée consiste à prolonger le signal d'étude. À l'origine, l'équation que l'on considère est la suivante :

$$(X_{N_\alpha}^\alpha | \star \dots)^t = \Phi_\alpha (X_N | 0 \dots)^t, \quad (8)$$

avec pour notation  $X_N = (x_1 \dots x_N)^t$  et  $\tilde{N}_\alpha = \lfloor (N + K)\alpha \rfloor$

$$\left( X_{\tilde{N}_\alpha}^\alpha | x_{\tilde{N}_\alpha+1}^\alpha \dots x_{\tilde{N}_\alpha}^\alpha | \star \dots \right)^t = \Phi_\alpha (X_N | x_N \dots x_N | 0 \dots)^t \quad (9)$$

Dans l'objectif de faire en sorte que les oscillations n'apparaissent qu'après l'intervalle d'étude, comme pour le cas  $\alpha < 1$ , il est intéressant de prolonger le signal par la dernière valeur non nulle de celui-ci en suivant l'équation (9).

Considérons que  $x_N$  a été répété  $K$  fois. La taille du nouveau signal est donc  $N + K$ .

Le phénomène de Gibbs se produira donc à partir de l'indice  $\tilde{n}_\alpha = \lfloor \frac{N+K}{\alpha} \rfloor$ .

Pour éviter les oscillations on souhaite donc avoir  $\lfloor N \times \alpha \rfloor \leq \lfloor \frac{N+K}{\alpha} \rfloor \iff K \geq \lceil N(\alpha^2 - 1) \rceil$ .

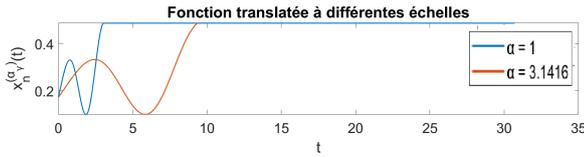


FIGURE 4 : Déplacement du problème de Gibbs

Afin d'atténuer ces effets de Gibbs, d'autres méthodes ont été testées. Toutes les techniques visaient à faire disparaître cette discontinuité en fin de support. La technique présentée ici est celle qui fournit les meilleurs résultats.

### 3.3 Cas d'un signal présentant de multiples discontinuités

À présent, on s'intéresse au cas de multiples discontinuités. La méthode précédente peut s'y adapter. Au lieu de simplement répéter la dernière valeur du signal, on répète chaque valeur. Cependant, simplement répéter chaque valeur puis traduire le signal donnerait un signal traduit trop grand. Les meilleurs résultats visuels s'obtiennent en prenant la moyenne des valeurs. Il s'agit de calculer la moyenne des  $K$  premières lignes et de placer cette moyenne en première position. Ensuite, on prend la moyenne des  $K$  valeurs des lignes suivantes que l'on place en deuxième position, et ainsi de suite.

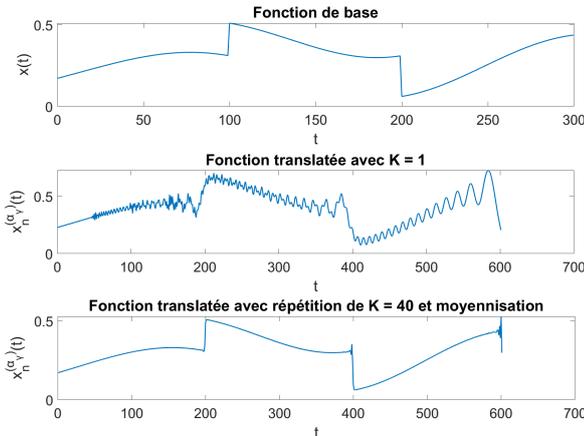


FIGURE 5 : Translation x2 sans et avec répétition

Répéter le signal n'atténue pas complètement les oscillations (on ne régularise pas le signal d'origine et on ne le répète pas forcément suffisamment loin), mais les valeurs correspondantes à la translation des valeurs répétées contiennent des

informations pouvant améliorer le résultat, d'où la moyennisation. La figure 5 illustre bien ce résultat. Plus les termes seront nombreux, plus la moyenne sera proche de la valeur de convergence, d'où l'intérêt d'augmenter le plus possible le nombre de répétitions. Cependant, le phénomène de Gibbs reste particulièrement prononcé sur la fin du signal traduit. Ce qui rejoint un peu le premier problème.

## 4 Cas des signaux 2D

Nous allons à présent nous intéresser aux images. Le principe est le même que pour des signaux 1D, on applique dans un premier temps une translation sur chaque ligne puis on transpose le résultat afin de traduire sur chaque colonne.

Afin d'éviter de perdre du temps, la matrice  $\Phi_\alpha$  peut n'être remplie qu'une fois. Pour que celle-ci convienne à chaque ligne et colonne elle doit être de la taille  $(\max(n_\alpha, m_\alpha), (\max(n, m)))$  où  $n$  et  $m$  représentent respectivement les lignes et colonnes.

De plus, pour éviter de remplir la matrice  $\Phi_\alpha$  dans sa globalité, si  $K$  désigne le nombre de répétitions de chaque valeur, une autre matrice adaptée de  $\Phi_\alpha$  de taille  $(\max(\lfloor n_\alpha K \rfloor, \lfloor m_\alpha K \rfloor) \times \max(\lfloor n \rfloor, \lfloor m \rfloor))$  plutôt que de taille  $(\max(\lfloor n_\alpha K \rfloor, \lfloor m_\alpha K \rfloor) \times \max(\lfloor nK \rfloor, \lfloor mK \rfloor))$  convient pour achever les calculs. Cela permet généralement de gagner du temps mais permet surtout de réduire considérablement les besoins en mémoire.

D'autre part, le code d'origine pour implémenter l'opérateur utilise la fonction externe `filter()`. Un moyen d'outrepasser ceci consiste à utiliser la relation de récurrence suivante :

$$\phi_{n,m}^\alpha = \begin{cases} \phi_{n-1,m-1}^\alpha + a\phi_{n-1,m}^\alpha - a\phi_{n,m-1}^\alpha & \text{si } m \geq 1, n \geq 1 \\ \phi_{n,0} = a\phi_{n-1,0} & \text{si } m = 0, n \geq 1 \\ \phi_{0,m} = \sqrt{1-a^2}(-1)^m a^m & \end{cases} \quad (10)$$

Tout d'abord la différence des résultats via chaque méthode a été calculée et sont toutes très proches de 0 (de l'ordre de  $1.10^{-7}$ ). Pour des translations d'ordre allant jusqu'à environ trois, la méthode sans `filter()` était toujours meilleure, en termes de temps d'exécution, que les deux autres, quel que soit  $K$ .

Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Pour des translations d'ordre supérieures à 4 notamment. En effet, la méthode sans `filter()` avec de grandes valeurs de  $\alpha$  implique de manière générale des matrices de plus grande taille, ce qui peut rendre les opérations plus lourdes, même avec des optimisations. La taille accrue des matrices peut entraîner une plus grande consommation de mémoire et un plus grand nombre d'opérations, ralentissant ainsi les calculs. Dans ces cas, la méthode utilisant `filter()` fait un bon compromis mémoire/vitesse.

Ainsi, pour  $\alpha \leq 3$ , l'optimisation a permis des améliorations significatives des temps d'exécution et a réduit considérablement les besoins en mémoire. Les valeurs de  $\alpha$  plus élevées ont, elle, montré que l'utilisation de `filter()` est parfois plus efficace.

Les figures 6 et 7 montrent un exemple de notre méthode ainsi que les résultats obtenus avec la fonction `imresize()` de Matlab, qui utilise le principe d'interpolation et donc un passage dans le domaine continu.

Dans certains cas, malgré la répétition élevée de chaque pixel (répéter 40 fois donne de très bons résultats) il peut par-

fois persister un léger phénomène de Gibbs. Pour atténuer encore plus ces oscillations on peut essayer les différentes méthodes suivantes qui ne donnent pas nécessairement de meilleurs résultats mais légèrement différents. Faire une translation en plusieurs étapes (par exemple deux translations de paramètre  $\sqrt{\alpha}$  au lieu d'une d'ordre  $\alpha$ ).

## 5 Conclusion

En conclusion, cet article présente l'étude d'un opérateur de translation en échelle rigoureusement défini, contrairement à d'autres méthodes comme celle utilisant la formule de Shannon, qui souffre de plus d'une convergence lente qui la rend peu pratique. Bien que des outils comme `imresize()` de Matlab soient plus rapides, la compréhension de cet opérateur en temps discret est essentielle pour améliorer les méthodes existantes. Même si des défauts ont été identifiés, des pistes d'amélioration ont été proposées. Enfin, même sans progrès concrets pour notre opérateur, cette étude permet d'explorer les effets physiques de l'opérateur, dont l'objectif principal est l'application à une transformée de Mellin discrète. En effet, c'est la structure de groupe associée à cet opérateur qui permet, par la suite, de définir une transformée de Mellin discrète. Et c'est cette structure de groupe qui présente le plus d'intérêt, et non la réalisation d'une translation. D'autres recherches pourraient se concentrer sur l'application de cet opérateur sur des images en une seule étape.

## Bibliographie

- [1] J. BERTRAND, P. BERTRAND et J. P. OVARLEZ : Discrete Mellin transform for signal analysis. *In ICASSP'90*, pages 1603–1606. IEEE, 1990.
- [2] A. DE SENA et D. ROCCHESO : A fast Mellin and scale transform. *EURASIP JASP*, 2007:1–9, 2007.
- [3] L. R. FORD : *Automorphic functions*, volume 85. AMS, 2004.
- [4] M. MBOUP : A character-automorphic Hardy spaces approach to discrete-time scale-invariant systems. *MTNS 2006*, Kyoto, Japan.
- [5] M. NGOM : *Opérateur d'échelle en temps discret et analyse harmonique associée*. Thèse de doctorat, Université de Reims, 2023.
- [6] M. NGOM, D. ALPAY et M. MBOUP : Scale-shift and harmonic analysis approach to the Mellin transform for discrete-time signals. *Signal Processing*, 204:108830, 2023.
- [7] M. D. ORTIGUEIRA, Carlos JC MATOS et M. S. PIEDADE : Fractional discrete-time signal processing : scale conversion and linear prediction. *Nonlinear Dynamics*, 29:173–190, 2002.
- [8] M. D. ORTIGUEIRA : Introduction to fractional linear systems. part 2 : discrete-time case. *IEE Proceedings-Vision, Image and Signal Processing*, 147(1):71–78, 2000.
- [9] N. ZHOU, Y. WANG et L. GONG : Novel optical image encryption scheme based on fractional Mellin transform. *Optics communications*, 284(13):3234–3242, 2011.

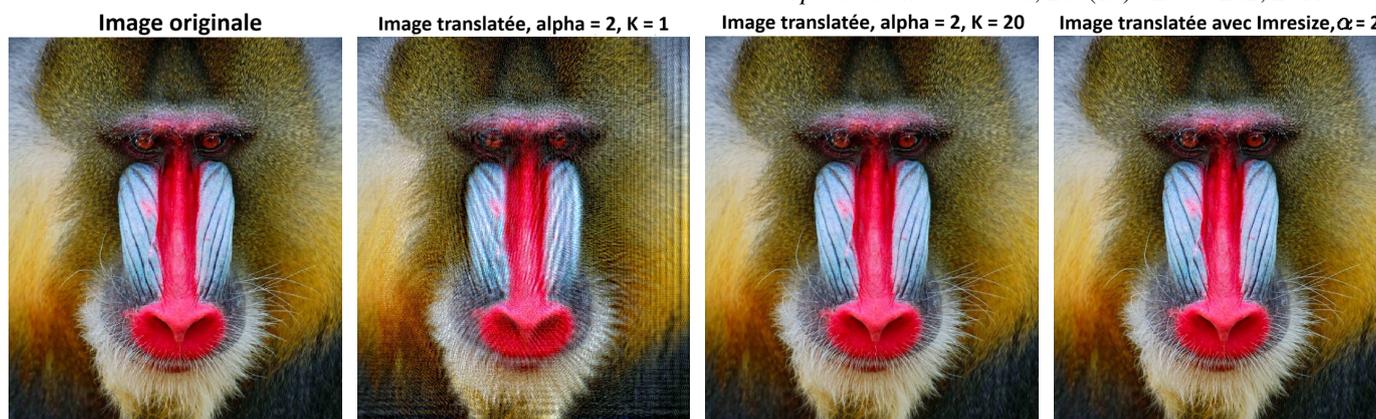


FIGURE 6 : Différentes translations, image : Babouin



FIGURE 7 : Différentes translations, image : L'Afghane aux yeux verts