

Suivi des ondes membranaires via le signal analytique 2D

Jalal JOUIDI Pierre GRANJON Florent CHATELAIN Nicolas LE BIHAN

Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, Gipsa-Lab, 38402 Grenoble Cedex

Résumé – Nous abordons le problème de l'estimation des déplacements induits par une onde se propageant à la surface d'une membrane. L'approche proposée repose sur la modulation d'un motif imprimé sur la membrane par le champ de déplacement. Une technique de démodulation, basée sur le signal analytique 2D partiel, permet d'estimer précisément les paramètres de l'onde. Des résultats sur données simulées démontrent la supériorité de notre méthode face à la corrélation d'images numériques (DIC).

Abstract – In this paper, we consider the problem of estimating a perturbation of a thin membrane via an image processing technique. The perturbation consists in a *in-plane* wave propagating at the surface of a membrane. The proposed approach relies on the modulation effect on a pattern on the membrane. A demodulation technique based on partial 2D analytic signal is proposed for demodulation and estimation of the perturbative wave parameters. A comparison, on synthetic data, with a state-of-the-art technique is proposed, highlighting the superiority of our approach.

1 Introduction

Plusieurs techniques non intrusives permettent de mesurer les champs de déplacement ou de déformation sous sollicitations dynamiques. En mécanique expérimentale des matériaux, la corrélation d'images numériques (DIC, pour Digital Image Correlation) s'est imposée depuis les années 1980 comme une méthode de référence pour l'analyse d'essais dynamiques [6, 8], notamment grâce aux progrès de l'imagerie à haute vitesse. Ces mesures permettent d'estimer diverses propriétés physiques, telles que les modules d'élasticité et de viscoélasticité, qui présentent un intérêt particulier dans de nombreux domaines, notamment en imagerie médicale [4].

Ce travail s'inscrit dans ce contexte général et porte sur le suivi des ondes se propageant à la surface d'une membrane. Pour permettre l'analyse par imagerie, une fine couche de peinture est appliquée sur la surface de la membrane. En raison de son épaisseur négligeable, cette couche n'a pas d'effet significatif sur les propriétés mécaniques du matériau. Le motif appliqué est généralement un mouchetis aléatoire, comme c'est classiquement le cas en DIC. Toutefois, la méthode proposée dans cet article repose sur l'utilisation d'un motif périodique, ce qui constitue une approche alternative. Le dispositif expérimental typique consiste à générer une perturbation en une position donnée de la membrane, puis à enregistrer une séquence d'images de la surface au cours de la propagation des ondes. Les algorithmes d'analyse s'appuient alors sur le suivi de ces ondes entre images successives.

Dans cet article, afin de simplifier les notations, nous ne faisons pas apparaître explicitement la dimension temporelle, bien que la séquence d'images dépende naturellement du temps. Nous nous concentrons sur l'estimation du mouvement de chaque pixel par rapport à une image de référence. Nous proposons une méthode originale d'estimation de l'orientation et de la phase, permettant de reconstruire les ondes se propageant à la surface d'une membrane. Elle repose sur deux points clés : la création d'un motif périodique spécifique permettant de modéliser les perturbations de l'onde comme des

modulations de phase, et l'utilisation d'une technique de démodulation basée sur une version modifiée du signal analytique 2D. Cette méthode est notamment comparée à la DIC. Des résultats quantitatifs et comparatifs sont présentés, mettant en évidence les performances de notre approche en termes de reconstruction du front d'onde. L'article est structuré ainsi : la section 2 décrit un modèle de modulation d'un motif périodique appliqué sur une membrane par des ondes longitudinales, la section 3 présente une technique de démodulation visant à estimer les propriétés de l'onde à partir des images du motif déformé, et la section 4 présente les résultats de simulation ainsi qu'une comparaison avec la méthode DIC.

2 Modulation d'un motif par une onde

Nous considérons la propagation d'ondes dans une membrane mince, modélisée comme une surface 2D souple soumise à des déformations. Deux types d'ondes s'y propagent : les ondes *dans le plan* (essentiellement longitudinales) et les ondes *hors du plan* (transversales au plan), comme illustré à la Figure 1. Les ondes transversales dans le plan ne sont pas considérées ici.

Dans ce travail, nous nous concentrons sur les ondes longitudinales \vec{H}_L et leur effet sur la surface de la membrane. Ce type d'ondes est présent dans divers matériaux, allant des plaques rigides en acier [9] aux membranes souples en silicone [2]. Nous considérons ici le cas de membranes élastiques, et proposons dans cette section un modèle de génération d'ondes longitudinales ainsi qu'un motif structuré conçu pour interagir avec ces ondes et en permettre la détection et la caractérisation. En effet, ce motif est modifié par la propagation des ondes, ce qui permet d'en extraire les paramètres dynamiques.

2.1 Modèle génératif et contraintes physiques

Les ondes longitudinales génèrent un champ de déplacement $\vec{H}_L = (U, V)$ soumis à une contrainte physique fondamentale : son rotationnel doit être nul. Cette condition, issue de l'équation de Navier via la décomposition de Helmholtz-Hodge [5,

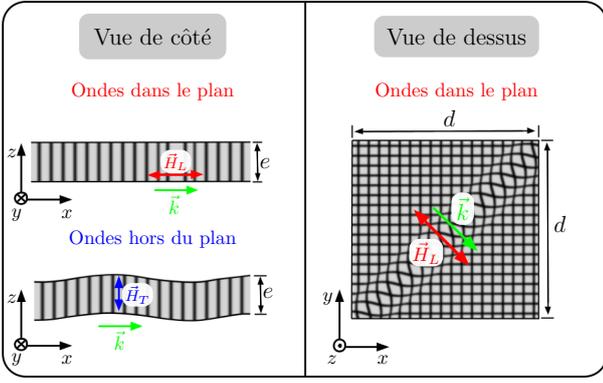


FIGURE 1 : Illustration des ondes dans le plan (longitudinales) et hors du plan (transversales) dans une membrane mince. Gauche : vue de côté avec déplacements dans le plan \vec{H}_L (haut) et hors du plan \vec{H}_T (bas). Droite : vue de dessus avec un déplacement longitudinal \vec{H}_L orienté selon \vec{k} , la direction de propagation.

Sec. 5.1.3], implique l'existence d'un potentiel scalaire $P(x, y)$ duquel les déplacements selon x et y se déduisent de la façon suivante :

$$U(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad V(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

De plus, le potentiel P est supposé d'amplitude bornée $|P(x, y)| \leq a$, et à bande limitée avec un vecteur d'onde maximal $\vec{k}_m = 2\pi\vec{\nu}_m$ où $\vec{\nu}_m = (\nu_{mx}, \nu_{my})$. Sous ces hypothèses, l'inégalité de Bernstein [7, Sec. 2.3.8] conduit à :

$$|U(x, y)| \leq a, \quad |V(x, y)| \leq a \frac{\nu_{my}}{\nu_{mx}},$$

ce qui borne le déplacement maximal en (x, y) .

La membrane au repos est décrite par un motif $F(x, y)$, par exemple une grille régulière imprimée à sa surface (voir Fig. 1). La déformation induite par l'onde est modélisée comme une modulation du motif par une fonction $\Phi(x, y) = (x - U(x, y), y - V(x, y))$, donnant le motif modulé :

$$F_{\text{mod}}(x, y) = F(\Phi(x, y)) = F(x - U(x, y), y - V(x, y)). \quad (1)$$

Pour garantir une déformation physique admissible, la transformation Φ doit être bijective et localement orientée. Cela impose que le déterminant de la matrice Jacobienne soit strictement positif en tout point. En appliquant de nouveau l'inégalité de Bernstein aux dérivées du potentiel, on obtient :

$$\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \leq 2\pi a \nu_{mx}, \quad \left| \frac{\partial V}{\partial y} \right| \leq 2\pi a \frac{\nu_{my}^2}{\nu_{mx}}. \quad (2)$$

La condition sur le Jacobien conduit alors à la contrainte :

$$\nu_{mx} < \frac{1}{4\pi a}, \quad (3)$$

qui relie la bande passante spatiale au déplacement maximal admissible. Nous analysons dans la suite l'impact spectral de cette modulation dans le domaine de Fourier.

2.2 Motif binaire périodique

Supposons que le motif sur la membrane soit périodique dans les directions x et y , avec la même fréquence spatiale fondamentale f_p . En utilisant (1), le développement en série de

Fourier du motif modulé s'écrit¹ :

$$F_{\text{mod}}(x, y) = \sum_{n,m} c_{n,m} e^{2\pi i f_p (nx + my)} e^{-2\pi i f_p (nU + mV)}, \quad (4)$$

où $c_{n,m}$ sont les coefficients de la série de Fourier de $F(x, y)$.

La transformée de Fourier du motif modulé, avec (ν_x, ν_y) comme variables fréquentielles, s'écrit :

$$\text{FT}\{F_{\text{mod}}\}(\nu_x, \nu_y) = \sum_{n,m} c_{n,m} \delta(\nu_x - n f_p, \nu_y - m f_p) * \text{FT}\{e^{-2\pi i f_p (nU + mV)}\}(\nu_x, \nu_y), \quad (5)$$

où δ désigne la distribution de Dirac et $*$ le produit de convolution. Cela montre que l'effet de la modulation due à la propagation d'onde est une convolution par $\text{FT}\{e^{-2\pi i f_p (nU + mV)}\}$ dans le domaine de Fourier, pour chaque harmonique indexée par le couple $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

La conception du motif doit respecter une contrainte fondamentale liée à l'échantillonnage spatial. Soit f_s la fréquence d'échantillonnage spatiale et f_p la fréquence spatiale du motif. Une fréquence f_p élevée améliore la sensibilité à la modulation, mais elle est limitée par la condition de Nyquist pour éviter le repliement spectral. Dans le cas le plus simple d'un motif constitué uniquement des harmoniques $(1, 0)$ et $(0, 1)$, on a :

$$F(x, y) = \cos(2\pi f_p x) + \cos(2\pi f_p y),$$

et sa modulation devient :

$$F_{\text{mod}}(x, y) = \cos[2\pi f_p (x - U)] + \cos[2\pi f_p (y - V)].$$

Sous l'hypothèse $\nu_{mx} > \nu_{my}$, la fréquence spatiale instantanée maximale le long de x est donnée par $\left| \frac{d}{dx} [f_p (x - U)] \right| = f_p (1 + \partial U / \partial x)$. En appliquant la borne de Bernstein (2), on obtient la condition de Nyquist :

$$2f_p (1 + 2\pi a \nu_{mx}) < f_s.$$

En utilisant la borne supérieure sur ν_{mx} donnée par (3), cette contrainte se simplifie en :

$$f_p < \frac{f_s}{3}. \quad (6)$$

Pour des motifs contenant des harmoniques d'ordre supérieur (m, n) , la contrainte devient $f_p < f_s / 3 \max(m, n)$. Ainsi, afin de maximiser f_p pour une fréquence d'échantillonnage donnée, il est conseillé de ne chercher à démoduler que les premiers harmoniques $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

2.3 Modèle pour des observations réalistes

Dans un scénario réaliste, les données disponibles sont des images numériques du motif F obtenues par acquisition vidéo. Il faut alors tenir compte des distorsions introduites par la caméra. On prend donc en compte les éventuelles imperfections optiques ainsi que le bruit de mesure à travers le modèle d'observation suivant pour le motif modulé \tilde{F}_{mod} :

$$\tilde{F}_{\text{mod}} = F_{\text{mod}} * \Psi + E, \quad (7)$$

où Ψ est la fonction d'étalement du point de la caméra, supposée de forme gaussienne, et E est un bruit additif blanc gaussien centré de variance finie.

¹La dépendance de U et V en (x, y) est omise pour alléger l'écriture.

Grâce au modèle d'observation donné par l'équation (7), et aux résultats clés des équations (3), (6), il est possible de simuler des mesures de motifs modulés réalistes et exploitables. Dans la suite, nous proposons une méthode pour estimer la modulation induite par l'onde se propageant à travers la membrane, autorisant une démodulation de l'effet de l'onde sur le motif pour remonter à ses caractéristiques.

3 Démodulation par signal analytique

La section précédente a montré comment les déformations d'une onde sur une membrane se traduisent par une modulation du motif de surface. Nous présentons ici une méthode de démodulation fondée sur le signal analytique 2D, permettant d'avoir une estimation (\hat{U}, \hat{V}) des déplacements (U, V) à partir du motif de référence \tilde{F} et de sa version modulée \tilde{F}_{mod} .

L'estimation est réalisée séparément pour chaque composante. Nous décrivons ci-dessous la procédure pour \hat{U} , celle pour \hat{V} est identique.

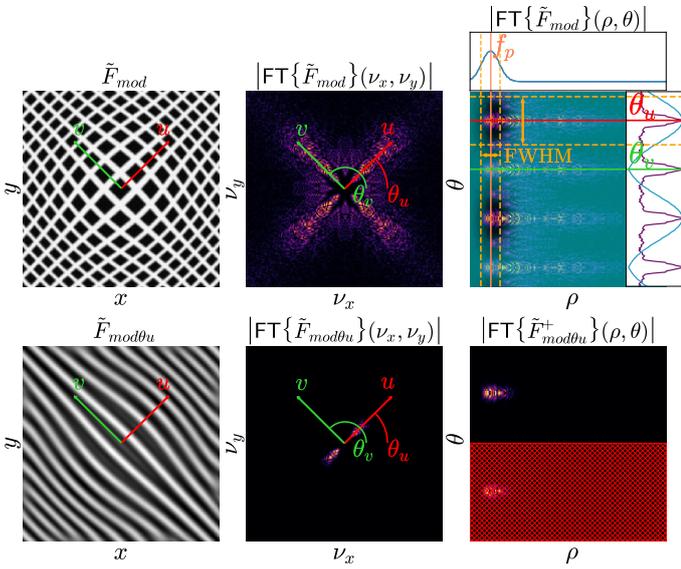


FIGURE 2 : Détection d'orientation et filtrage. **Haut** : motif modulé (gauche), sa transformée de Fourier en coordonnées cartésiennes (centre) puis polaires (droite) avec l'intensité moyenne selon ρ (en magenta foncé à droite du carré) et les filtres (en cyan). **Bas** : motif filtré (gauche), son spectre (centre), et spectre du signal analytique orienté (droite).

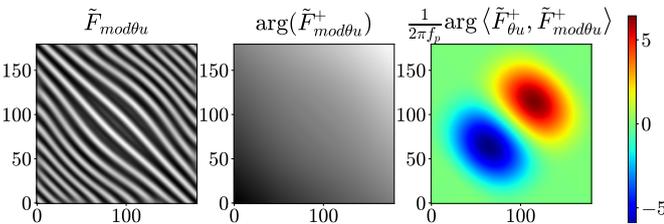


FIGURE 3 : Estimation de \hat{U} à partir de la différence de phase. **Gauche** : motif filtré selon θ_u . **Centre** : phase orientée. **Droite** : déplacement estimé.

Le motif modulé \tilde{F}_{mod} possède une transformée de Fourier 2D caractéristique présentant deux orientations principales

θ_u et θ_v associées aux directions u et v (voir les carrés de gauche et du milieu en haut de la Figure 2). Ces directions définissent les axes de variation le long desquels sont estimées les composantes de déplacement U et V .

Dans un premier temps, le spectre est exprimé en coordonnées polaires (ρ, θ) , où les orientations deviennent des lignes horizontales. Cela est illustré dans le carré supérieur droit de la Figure 2. L'intensité moyenne selon ρ (en magenta foncé à droite de ce carré) présente des pics correspondant aux angles θ_u, θ_v , et par symétrie $\theta_u + \pi$ et $\theta_v + \pi$. Les orientations peuvent donc être estimées en détectant ces pics. Ensuite, des filtres gaussiens sont appliqués autour de θ_u et $\theta_u + \pi$ ainsi qu'un filtre centré sur la fréquence fondamentale f_p , pour isoler la première harmonique selon la direction u . Ce filtrage est illustré en coordonnées polaires (en cyan dans le même carré), mais il peut être exprimé en coordonnées cartésiennes via un changement de variables. À partir du motif filtré $\tilde{F}_{mod\theta_u}$, on construit le signal analytique orienté partiel [1], défini dans le domaine de Fourier par :

$$\text{FT}\{\tilde{F}_{mod\theta_u}^+\} = \text{FT}\{\tilde{F}_{mod\theta_u}\} (1 + \text{sign}(\nu_x \cos \theta_u + \nu_y \sin \theta_u))$$

Cette opération est illustrée dans le carré inférieur droit de la Figure 2.

La composante U du déplacement est enfin estimée par le produit scalaire complexe suivant :

$$\hat{U} = \frac{1}{2\pi f_p} \arg \langle \tilde{F}_{\theta_u}^+, \tilde{F}_{mod\theta_u}^+ \rangle, \quad (8)$$

où $\langle a, b \rangle = \bar{a}b$ est calculé pixel par pixel. La Figure 3 illustre le résultat obtenu pour le motif de la Figure 2. La même démarche est répétée pour l'orientation θ_v , ce qui permet d'obtenir les deux composantes du déplacement \hat{U} et \hat{V} en chaque pixel.

Cette approche peut être vue comme une reformulation de la méthode du signal monogénique introduite par Felsberg [3] et étendue par Zang [10], dans laquelle l'orientation et la phase sont estimées à l'aide de filtres harmoniques sphériques orientables. Ici, l'utilisation du signal analytique partiel plutôt que du signal monogénique s'avère avantageuse car les orientations du motif initial \tilde{F} sont supposées constantes. L'estimation des orientations θ_u et θ_v peut ainsi être réalisée sur l'ensemble de l'image, contrairement aux approches locales reposant sur une estimation pixel par pixel, comme celles présentées par Felsberg et Zang.

4 Résultats et discussion

Dans cette section, nous comparons la méthode de démodulation proposée à la technique de corrélation d'images numériques (DIC) [2] classiquement utilisée pour suivre les ondes dans les images. La méthode DIC repose sur l'utilisation d'un motif aléatoire (voir le carré en haut au centre de la Figure 5). Afin d'assurer une comparaison équitable, les hyperparamètres de la DIC ont été ajustés empiriquement pour optimiser ses performances, notamment en fixant le taux de couverture du motif à 30% et en adaptant la taille de la fenêtre de corrélation en fonction du déplacement maximal.

Nous définissons d'abord le paramètre clé du déplacement maximal a , comme expliqué en 2.1, ce qui détermine ν_{mx} via l'équation (3). Nous considérons le cas $a = 1\%$, où a est exprimé en pourcentage de la taille totale de l'image. Pour

cette valeur de a , plusieurs images contenant les déplacements U et V sont générées, et les estimateurs \hat{U} et \hat{V} sont calculés.

La première simulation, décrite Fig. 4, génère une onde linéaire dont le potentiel $P(\nu_x, \theta_0, \phi_0)$ est de la forme :

$$P(\nu_x, \theta_0, \phi_0) = \cos(2\pi\nu_x (\cos(\theta_0)x + \sin(\theta_0)y) + \phi_0),$$

où $\theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ sont des variables aléatoires tirées uniformément. Les déplacements U et V sont obtenus à partir des dérivées partielles de ce potentiel, comme expliqué en 2.1.

Pour évaluer les performances de chaque méthode et comparer les déplacements estimés \hat{U} et \hat{V} aux valeurs réelles U et V , nous utilisons pour métrique la RMSE normalisée par la racine carrée de l'énergie du déplacement réel, notée $\varepsilon = \text{NRMSE}(\hat{H}_L)$ avec $\hat{H}_L = (\hat{U}, \hat{V})$ et exprimée en pourcentage. Les résultats des simulations, présentés à la Figure 4, correspondent au cas où le rapport signal à bruit (RSB) est de 10 et 20 dB. La méthode proposée surpasse sensiblement la DIC. L'augmentation de l'erreur avec la fréquence ν_x/ν_{mx} est particulièrement marquée pour la DIC en raison des erreurs d'interpolation (cubique). La méthode proposée reste, en revanche, quasi-insensible à ce phénomène grâce à une estimation sur l'image complète sans interpolation. Elle est toutefois plus sensible au bruit : tandis que l'approche par corrélation (DIC) se montre robuste face au bruit additif, ce dernier impacte plus significativement la phase du signal analytique estimée par notre méthode. Cependant, dans un contexte de bruit réaliste (RSB ≥ 10 dB), la méthode proposée reste supérieure à la DIC.

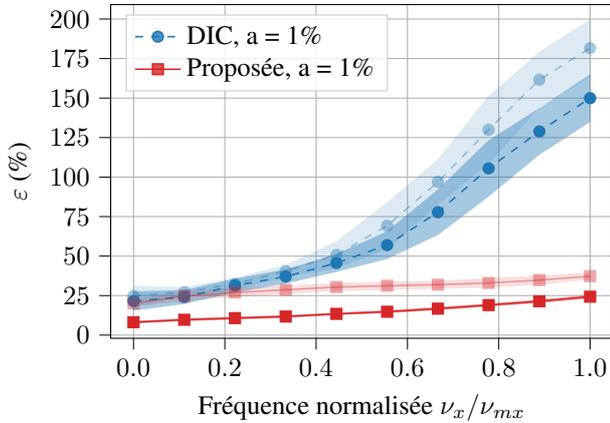


FIGURE 4 : Erreur vs Fréquence normalisée pour la DIC (marqueurs circulaires bleus) et la méthode proposée (marqueurs carrés rouges) pour $f_p/f_s = 0.16$ sur des images 200×200 pixels avec un RSB = 20 dB (couleurs pleines) et 10 dB (en transparence). L'écart-type des deux méthodes est représenté en ombre autour des points (200 tirages de Monte-Carlo).

La Figure 5 illustre un exemple d'estimation d'une onde circulaire par DIC et par la méthode proposée. L'interpolation utilisée dans la DIC provoque des distorsions du front d'onde circulaire, contrairement à notre méthode.

En termes de coût de calcul, la méthode proposée est compétitive avec la DIC classique, tout en étant plus robuste et mieux adaptée à un large éventail de longueurs d'onde pour les perturbations dans la membrane. Une validation expérimentale de la méthode proposée sur des données réelles constitue une perspective naturelle de ce travail.

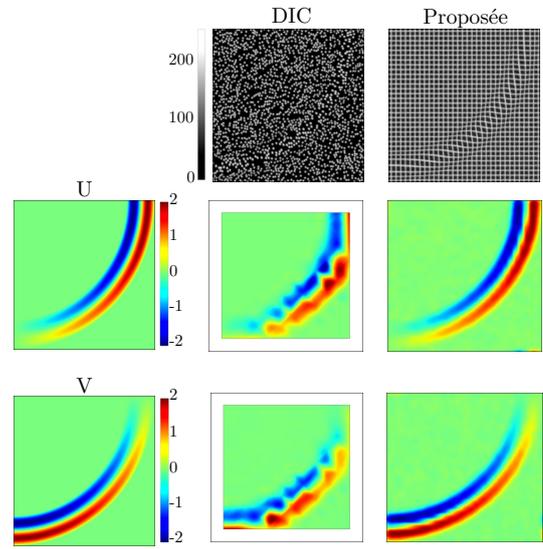


FIGURE 5 : Reconstruction des déplacements U et V pour des images de taille 200×200 pixels, avec $a = 1\%$, $\nu_x/\nu_{mx} = 0.6$ et RSB = 20 dB. Col. gauche : vérité terrain, col. centre : motif (haut) et déplacements estimés pour la DIC ($\varepsilon = 53.5\%$), col. droite : motif ($f_p/f_s = 0.16$) et déplacements estimés pour la méthode proposée ($\varepsilon = 19.4\%$). Les images DIC sont plus petites en raison des limites d'interpolation aux bords.

Références

- [1] T. BÜLOW : *Hypercomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images*. Thèse de doctorat, Kiel University, 1999.
- [2] A. DELORY *et al.* : Viscoelastic dynamics of a soft strip subject to a large deformation. *Soft Matter*, 20(9):1983–1995, 2024.
- [3] M. FELSBERG : *Low-level image processing with the structure multivector*. Thèse de doctorat, Kiel University, 2002.
- [4] J.-L. GENNISSON *et al.* : Acoustoelasticity in soft solids : Assessment of the nonlinear shear modulus with the acoustic radiation force. *JASA*, 122(6):3211–3219, 2007.
- [5] K. F. GRAFF : *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation, 2012.
- [6] M. GRÉDIAC *et al.* : *Full-field measurements and identification in solid mechanics*. John Wiley & Sons, 2012.
- [7] M. A. PINSKY : *Introduction to Fourier analysis and wavelets*, volume 102. Amer. Math. Soc., 2008.
- [8] P. RASTOGI : *Photomechanics*, volume 77. Springer Science & Business Media, 2003.
- [9] M. RUCKA : Modelling of in-plane wave propagation in a plate using spectral element method and kane–mindlin theory with application to damage detection. *Archive of Applied Mechanics*, 81, 2011.
- [10] D. ZANG *et al.* : Signal modeling for two-dimensional image structures. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 18(1):81–99, 2007.