

Processus Gaussiens Appliqués à la Bathymétrie des Lacs par Satellite

Geoffroy HEURTIER^{1,2,3,6} Laurent FERRO-FAMIL^{1,4,5} Attilio PALADINO⁶ Jean-Yves TOURNERET^{1,2,3}

¹University of Toulouse, France, ²TéSA Laboratory, Toulouse, France, ³ENSEEIH-IRIT, Toulouse, France, ⁴ISAE-SUPAERO, Toulouse, France, ⁵CESBIO, Toulouse, France, ⁶CGI, Toulouse, France

Résumé – Différentes méthodes d’imagerie satellitaire sont utilisées pour estimer la bathymétrie des lacs. L’enjeu principal réside dans l’établissement d’une relation précise entre la réflectance dans les bandes spectrales observées et la profondeur de l’eau, une tâche complexe dont les incertitudes peuvent affecter la fiabilité des estimations obtenues. Les approches paramétriques, largement utilisées dans la littérature, reposent sur des modèles établis, tandis que des méthodes non paramétriques ont été explorées plus récemment afin de s’affranchir de certaines hypothèses. Dans cet article, nous proposons une approche bayésienne fondée sur les processus Gaussiens, permettant une modélisation probabiliste des relations spectro-bathymétriques ainsi qu’une quantification rigoureuse des incertitudes associées aux estimations de profondeur.

Abstract – Different satellite imaging methods are used to estimate the bathymetry of lakes. The main challenge lies in establishing an accurate relationship between the reflectance in the observed spectral bands and the water depth, a complex task in which uncertainties can affect the reliability of the obtained estimates. Parametric approaches that are widely used in the literature rely on established models, whereas nonparametric methods have been explored more recently to avoid some assumptions. In this paper, we propose a Bayesian approach based on Gaussian processes, enabling probabilistic modeling of spectro-bathymetric relationships and a rigorous quantification of the uncertainties associated with depth estimates.

1 Introduction

Une surveillance précise et régulière des lacs et réservoirs est essentielle pour améliorer la gestion de l’eau, mais demeure encore limitée à l’échelle mondiale [1]. La bathymétrie par satellite (SDB pour Satellite-Derived Bathymetry), qui estime la profondeur de l’eau à partir d’images satellitaires, est une alternative rentable à grande échelle aux méthodes in situ comme l’échosondage. Initialement développée pour les zones côtières, la SDB a montré son intérêt pour les plans d’eau intérieurs, en exploitant les réflectances de capteurs multispectraux, tels que Landsat et Sentinel-2 [2] [3].

La SDB estime la profondeur de l’eau en fonction de la couleur de l’eau observée par satellite. Elle nécessite : (1) des données de profondeur, généralement obtenues par échosondage pour calibrer et valider les modèles, et (2) des mesures spectrales issues de capteurs satellitaires. Si cette approche permet d’étendre la couverture spatiale des mesures bathymétriques, sa précision reste influencée par plusieurs facteurs, tels que la turbidité de l’eau, la nature du substrat et les hypothèses sur la relation entre les bandes spectrales et la profondeur. Divers modèles paramétriques ont été développés pour établir cette relation, notamment les modèles de Lyzenga [4] et de Stumpf [5], qui utilisent des transformations logarithmiques des réflectances dans les bandes bleues et vertes. Ces approches reposent sur des relations prédéfinies, qu’elles soient linéaires, exponentielles [6] ou polynomiales [7]. Cependant, elles présentent des limites, notamment leur dépendance à des hypothèses strictes sur la forme fonctionnelle de la relation spectro-bathymétrique et la nécessité d’un ajustement minutieux de paramètres. Ces contraintes peuvent entraîner des performances d’estimation limitées, en particulier dans des environnements aquatiques complexes où la relation entre couleur et profondeur n’est pas connue a priori [8].

Cet article se concentre sur l’utilisation de modèles non paramétriques pour établir cette relation entre la profondeur et la couleur de l’eau. La Section 2 rappelle les modèles paramétriques utilisés dans le cadre de la SDB, avant d’introduire un modèle non paramétrique basé sur des noyaux Gaussiens [9]. La Section 3 présente une approche probabiliste basée sur les processus Gaussiens qui n’a, à notre connaissance, jamais été considérée pour la bathymétrie des lacs. La Section 4 compare les résultats de ces différentes méthodes d’estimation pour des données synthétiques et in situ.

2 Estimation bathymétrique

La SDB estime la profondeur d’un plan d’eau à partir de sa réflectance dans différentes bandes spectrales, souvent le bleu et le vert, qui pénètrent mieux la colonne d’eau, ainsi que le rouge et parfois l’infrarouge pour des corrections atmosphériques ou de turbidité. Il existe deux modèles prédominants dans la littérature, définis par les relations suivantes [5] :

$$g_r(\lambda_a, \lambda_b) = \frac{R(\lambda_a)}{R(\lambda_b)}, \quad g_s(\lambda_a, \lambda_b) = \frac{\ln(nR(\lambda_a))}{\ln(nR(\lambda_b))}, \quad (1)$$

avec $R(\lambda_a)$ la réflectance dans la bande a . Le ratio simple g_r est utilisé pour sa robustesse face aux variations d’illumination, tandis que le ratio logarithmique g_s (proposé par Stumpf [5]) permet une meilleure linéarisation de la relation entre profondeur et réflectance en présence d’une atténuation exponentielle du signal. L’entier n , généralement fixé à 500 [5], [6], garantit la positivité des logarithmes. Pour un pixel i , l’entrée du modèle de régression bathymétrique est définie par :

$$x_i = g(\lambda_{a,i}, \lambda_{b,i}), \quad (2)$$

où g désigne g_r ou g_s selon le modèle choisi. La profondeur d'eau estimée au pixel i est alors donnée par :

$$z_i = f(x_i; \mathbf{w}) + \varepsilon_i, \quad (3)$$

où ε_i est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle, f est la fonction qui modélise la relation entre la profondeur et la réflectance de l'eau, et \mathbf{w} est un vecteur de paramètres qui définit le modèle de régression.

2.1 Modèles paramétriques

On qualifie de modèle paramétrique un modèle dans lequel on suppose une forme fonctionnelle explicite de la relation entre la variable d'entrée x_i et la profondeur d'eau z_i . Le modèle introduit par Stumpf [5] repose sur l'hypothèse d'une relation linéaire entre la profondeur et le logarithme du ratio des réflectances. Cependant, d'autres modèles ont été étudiés dans la littérature, notamment dans [6] et [7], proposant différentes formes fonctionnelles. Dans ce travail, les modèles linéaires, quadratiques et exponentiels sont considérés :

$$f_1(x_i; \mathbf{w}) = w_1 + w_2 x_i, \quad \mathbf{w} = [w_1, w_2]^T, \quad (4)$$

$$f_q(x_i; \mathbf{w}) = w_1 + w_2 x_i + w_3 x_i^2, \quad \mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T, \quad (5)$$

$$f_e(x_i; \mathbf{w}) = w_1 e^{w_2 x_i}, \quad \mathbf{w} = [w_1, w_2]^T. \quad (6)$$

Ces modèles paramétriques ont l'avantage d'être simples à calibrer et interprétables, mais leur performance dépend fortement de la validité des hypothèses imposées par la relation entre x_i et z_i . Dans des environnements complexes où la relation spectro-bathymétrique peut être non linéaire ou influencée par d'autres facteurs (turbidité, nature du substrat), ces modèles peuvent montrer des limites qui motivent l'exploration d'approches alternatives, telles que les modèles non paramétriques.

2.2 Méthodes à noyaux

Une approche basée sur une régression non paramétrique utilisant des noyaux Gaussiens a été récemment proposée dans [9]. Les modèles à noyaux sont appréciés pour leur capacité à approcher de manière lisse toute relation non linéaire entre deux variables, sans nécessiter d'hypothèse forte sur la forme fonctionnelle sous-jacente. L'idée principale est de représenter la fonction f comme une somme pondérée de fonctions à noyaux, où chaque noyau $k(x_i, x)$ est centré sur une observation x_i et pondéré par un coefficient w_i :

$$f(x; \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N w_i k(x_i, x), \quad (7)$$

où N est le nombre de données d'entraînement et k un noyau (symétrique défini positif). Le noyau Gaussien est souvent utilisé pour k :

$$k(x_i, x) = \exp[-\gamma(x_i - x)^2], \quad (8)$$

avec γ un hyperparamètre contrôlant l'étendue de l'influence des points d'apprentissage. Ces modèles sont particulièrement adaptés aux situations où la relation spectro-bathymétrique est complexe, fortement non linéaire, ou influencée par des facteurs environnementaux difficiles à modéliser explicitement. De plus, ils peuvent être facilement généralisés pour traiter plusieurs rapports de bandes simultanément en utilisant le noyau $k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp(-\gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2)$, où \mathbf{x}_i est le vecteur contenant tous les rapports de bandes.

2.3 Estimation des paramètres

Quel que soit le modèle choisi, la détermination du vecteur de paramètres \mathbf{w} , qui définit la relation entre la profondeur z_i et les caractéristiques spectrales x_i , repose sur une procédure d'optimisation. Une approche classique consiste à minimiser une fonction de coût basée sur les moindres carrés régularisés définie pour un ensemble de N observations par :

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^N [z_i - f(x_i; \mathbf{w})]^2 + \alpha \|\mathbf{w}\|^2. \quad (9)$$

Le second terme, $\alpha \|\mathbf{w}\|^2$ correspond à une régularisation de Tikhonov qui pénalise les valeurs élevées des paramètres \mathbf{w} . Une alternative consiste à régulariser directement la fonction f via un terme $\alpha \|f\|_{\text{RKHS}}^2$, où $\|\cdot\|_{\text{RKHS}}^2$ est la norme dans la RKHS induite par le noyau k . Dans ce cadre, la régularisation revient à placer un prior Gaussien sur l'espace des fonctions. La comparaison des deux régularisations sera donc effectuée dans la Section 4. Ces régularisations introduisent un lissage sur la fonction f [10], limitant ainsi le risque de sur-apprentissage. Le paramètre de régularisation α doit être choisi avec soin, souvent par validation croisée, afin d'établir un compromis entre fidélité au jeu de données et capacité de généralisation du modèle (voir [9] pour plus de détails).

3 Processus Gaussiens

La régression par processus Gaussien (PG) est une approche bayésienne non paramétrique qui permet d'estimer l'incertitude de la prédiction. On ne cherche pas, contrairement aux méthodes fréquentistes, une fonction unique f qui minimise une certaine fonction, mais on modélise une distribution sur un ensemble de fonctions possibles. Un PG est une généralisation des lois normales aux fonctions, permettant de modéliser une fonction inconnue à partir d'un ensemble limité d'observations bruitées. Il utilise une loi a priori sur l'espace des fonctions, mise à jour via les données pour obtenir une loi a posteriori. Formellement, un processus Gaussien est défini par une fonction moyenne a priori m et un noyau de covariance k :

$$f \sim \mathcal{PG}(m, k), \quad (10)$$

où la fonction moyenne m et le noyau k doivent être choisis de manière à refléter les connaissances préalables ou la conviction que l'on a concernant la fonction de régression [11]. On dit qu'une fonction f est un PG si pour tout ensemble de données $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$, le vecteur aléatoire :

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}} = [f(x_1), \dots, f(x_N)]^T, \quad (11)$$

suit une distribution normale multivariée $\mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{x}}, \mathbf{K})$, où $\mathbf{K} = k(x_i, x_j)_{i,j=1}^N$ est la matrice de covariance du vecteur $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = [m(x_1), \dots, m(x_N)]^T$ est son vecteur moyenne.

On construit d'abord un PG comme loi a priori Π_0 , où la moyenne est souvent choisie comme étant nulle (hypothèse de fonction centrée), alors que le noyau caractérise la dépendance entre les valeurs de la fonction en différents points. On définit ensuite la vraisemblance des $f(x_i)$ par rapport aux profondeurs $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_N]^T$ mesurées aux points \mathbf{x} par :

$$V(f|\mathbf{x}, \mathbf{z}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^N \mathcal{N}(z_i | f(x_i), \sigma^2), \quad (12)$$

où les $f(x_i)$ sont indépendants, et le bruit est blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 > 0$. Grâce au théorème de Bayes, on peut déterminer la loi a posteriori de f notée Π_N qui est également un PG. On peut montrer que la moyenne et la covariance de ce PG qui maximisent la probabilité a posteriori pour (x_*, x^*) , deux éléments quelconques de l'espace d'entrée du modèle de régression, sont définies par [11] :

$$\hat{m}(x_*) = m(x_*) + \mathbf{k}_{x_*, x_*}^T (\mathbf{K} + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{m}_x), \quad (13)$$

$$\hat{k}(x_*, x^*) = k(x_*, x^*) - \mathbf{k}_{x_*, x_*}^T (\mathbf{K} + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{k}_{x_*, x^*}, \quad (14)$$

où $\mathbf{k}_{x_*, x_*} = [k(x_1, x_*), \dots, k(x_n, x_*)]^T$, \mathbf{K} est la matrice de Gram et \mathbf{m}_x est le vecteur moyenne a priori (égal à 0 dans le cas centré) [11]. Notons que la fonction \hat{m} donne la prédiction de la valeur de f au nouveau point x_* , tandis que \hat{k} donne l'incertitude associée à cette prédiction. Ce cadre permet de modéliser non seulement les valeurs attendues mais aussi l'incertitude sur ces valeurs, ce qui est un avantage clé des PG pour la régression. On note également qu'en cas de moyenne nulle et avec $\sigma^2 = N\alpha$, la moyenne a posteriori du PG \hat{m} est identique à l'estimateur de la régression par noyaux avec une régularisation portant sur f , lorsque le même noyau est utilisé pour ces deux approches [11].

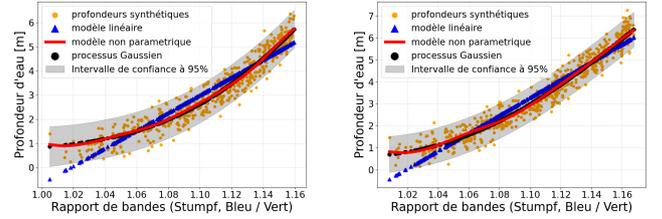
4 Expériences

4.1 Données synthétiques

Les modèles non paramétriques sont d'abord évalués sur des données synthétiques et comparés aux modèles paramétriques. Pour cela, les bandes bleue et verte d'un des 17 lacs étudiés dans [6] sont utilisées pour générer trois cartes bathymétriques à l'aide des modèles linéaires, quadratiques et exponentiels. Un bruit blanc Gaussien additif de moyenne nulle est introduit. Les performances des modèles paramétriques et non paramétriques sont ensuite évaluées sur ces données synthétiques. Les reconstructions sont comparées aux données de référence, avec une évaluation quantitative via l'erreur quadratique moyenne (EQM). Les données synthétiques sont divisées en deux parties : l'une pour l'entraînement et l'autre pour l'évaluation de performances. Comme le montrent la figure 1 et le tableau 1, les régressions obtenues avec les modèles utilisés pour générer les données sont les meilleures. Mais les modèles non paramétriques (qui n'utilisent pas d'information a priori sur le modèle de génération) fournissent des performances équivalentes au meilleur modèle dans tous les cas. Les hyperparamètres sont calibrés de la même façon que dans [9] pour la méthode à noyaux, et par maximisation de la log-vraisemblance marginale pour le processus Gaussien. Les valeurs sont obtenues après moyennage sur 50 simulations de Monte-Carlo.

Données	Modèles			
	Linéaire	Exponentiel	Noyau G	PG
Linéaire	0.1959	0.3317	0.1965	0.1961
Quadratique	0.3022	0.2434	0.1956	0.1963
Exponentiel	0.3788	0.1933	0.1949	0.1937

TABLE 1 : EQMs (en mètres) de trois ensembles de données reconstruits avec quatre modèles : linéaire, exponentiel, noyau Gaussien ($\|\mathbf{w}\|^2$) et processus Gaussien (Monte-Carlo).



(a) Données exponentielles.

(b) Données quadratiques.

FIGURE 1 : Estimation de la profondeur d'eau pour des données générées à partir des modèles exponentiel et quadratique.

4.2 Données réelles

Cette section examine le jeu de données in situ de [6], collecté sur 17 lacs arctiques lors d'une expédition de terrain du 22 au 27 juillet 2017, à l'aide d'un sonar monté sur un hydravion. Les données d'entrée sont les réflectances TOA de Landsat-8 pour les bandes bleue (bande 2, 452–512 nm), verte (bande 3, 533–590 nm) et rouge (bande 4, 636–673 nm), issues de la même image que celle utilisée dans [6]¹. Notons que le jeu de données considéré ici est constitué de données L1, utilisées sans correction atmosphérique, un point à prendre en compte pour toute analyse bathymétrique multi-temporelle.

Un ensemble de 12 modèles paramétriques a été élaboré pour modéliser la relation spectro-bathymétrique en utilisant différents rapports de bandes (bleu/vert, bleu/rouge et rouge/vert), différentes formes de fonction (linéaire et exponentiel) et des rapports de bandes simples et de Stumpf (voir Section 2). Le type de rapport ainsi que les bandes utilisées sont indiqués dans le tableau 2 (par exemple, $g_s(B, V)$ désigne le rapport de Stumpf des bandes bleue et verte). Pour chaque lac, le meilleur modèle paramétrique utilisé dans [6] a été sélectionné afin d'assurer une comparaison pertinente. Deux méthodes à noyaux Gaussiens ont été testées en utilisant les mêmes données avec des régularisations de Tikhonov sur le vecteur \mathbf{w} et sur la fonction f . Enfin, un processus Gaussien a été entraîné. Les hyperparamètres sont calibrés de la même façon que dans la section 4.1. Le tableau 2 compare les EQMs obtenues pour le meilleur modèle paramétrique et les modèles non paramétriques (méthodes à noyaux et processus Gaussiens) en utilisant une validation croisée (leave-one-out). Ces résultats montrent l'intérêt d'utiliser un modèle non paramétrique, et de bien calibrer les hyperparamètres (car la moyenne du PG peut différer de la méthode à noyau avec régularisation sur f en fonction de cette calibration).

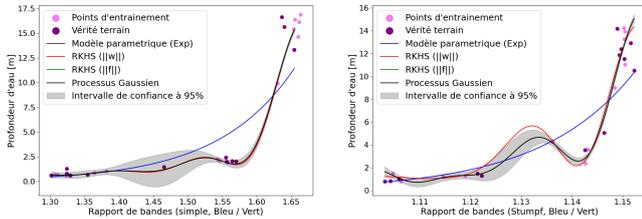
Des exemples d'ajustement de la profondeur de l'eau obtenus avec ces différentes régressions sont présentés dans la figure 2 pour deux lacs. La figure de gauche montre un cas où le modèle paramétrique n'est pas adapté aux données, alors que les modèles non paramétriques sont capables de capturer les non-linéarités entre rapports de bandes et profondeur. La figure de droite illustre un cas où les régularisations sur le vecteur paramètre \mathbf{w} (en rouge) et sur la fonction f (en vert) fournissent des résultats différents. On remarque également que sur les deux figures, la courbe verte (régularisation sur f) et noire (moyenne de l'estimateur de la régression par PG avec $\sigma^2 = N\alpha$) sont identiques, comme mentionné dans la section 3 et dans [11]. La zone grise représente l'intervalle de

¹Image LC08 L1TP 077011 20160805 20170222 01 TI.

Lacs			EQM (mètres)			
ID	D_{\max}	x_i	Paramétrique	Noyau G ($\ w\ ^2$)	Noyau G ($\ f\ ^2$)	PG (Monte-Carlo)
6274	8.8	$g_r(B, R)$	1.49 ± 1.3	1.04 ± 0.8	1.05 ± 0.7	1.29 ± 1.0
6199	9.5	$g_r(B, R)$	1.18 ± 0.8	0.94 ± 0.8	0.98 ± 0.8	1.08 ± 0.8
6167	11.1	$g_s(B, V)$	1.92 ± 1.8	1.26 ± 1.4	1.08 ± 1.1	1.13 ± 1.7
6058	9.9	$g_r(B, V)$	2.47 ± 2.6	0.75 ± 1.2	0.74 ± 1.2	0.98 ± 1.2
4782	2.2	$g_s(V, R)$	0.11 ± 0.1	0.11 ± 0.1	0.11 ± 0.1	0.11 ± 0.1

TABLE 2 : Comparaison des modèles paramétriques et non paramétriques (hyperparamètres estimées avec une LOO CV).

confiance de l’estimateur obtenu avec les PG. Cet intervalle a tendance à s’étendre au niveau des zones où peu de données d’entraînement existent et où la fonction est plate, car le problème devient mal conditionné. Il se réduit dans les zones d’abondance de points ou les zones à forte pente.



(a) Lac 6058.

(b) Lac 6167.

FIGURE 2 : Exemples de relations fonctionnelles entre les ratios de bandes et la profondeur de l’eau.

5 Conclusion

Cet article propose d’évaluer la pertinence des processus Gaussiens comme alternatives à des modèles plus traditionnels comme les modèles paramétriques pour décrire la relation entre la profondeur de la colonne d’eau en chaque point d’un lac et la réflectance lumineuse dans différentes bandes optiques. Les méthodes à noyaux permettent d’améliorer les performances d’estimation en réduisant les erreurs quadratiques moyennes des estimateurs de la profondeur d’eau. Les processus Gaussiens fournissent des performances d’estimation similaires (voir identiques selon le réglage des hyperparamètres), tout en intégrant de manière simple une estimation de l’incertitude associée aux prédictions.

L’un des atouts des méthodes non paramétriques est leur capacité à représenter la relation spectro-bathymétrique sans imposer de forme fonctionnelle préalablement définie, réduisant ainsi les hypothèses nécessaires à la modélisation. Avec seulement deux paramètres à calibrer, ces méthodes s’adaptent aux données de terrain de manière flexible. L’intérêt particulier des processus Gaussiens tient à leur capacité à fournir une distribution probabiliste des prédictions, plutôt qu’une estimation ponctuelle. Moyennant un coût de calcul supplémentaire, cela permet d’évaluer directement la fiabilité des résultats en tenant compte des variations locales et de la complexité de la relation entre réflectance et profondeur. On peut notamment mettre en lumière les zones où l’estimation est incertaine et devra être confirmée par d’autres méthodes d’estimation.

Les travaux futurs porteront sur la conception d’un modèle local multi-temporel prenant en compte l’évolution des

réflectances au cours du temps. Plusieurs pistes seront explorées, notamment l’application de corrections atmosphériques, l’atténuation du sunglint et la détection d’éléments aberrants (outliers) dans les séries temporelles. Nous pensons que les processus Gaussiens sont des outils très adaptés à la prise en compte des variations temporelles des réflectances car ils ont fait leurs preuves pour l’analyse de séries temporelles.

Références

- [1] S. Zhang, H. Gao, and B. S. Naz, “Monitoring reservoir storage in South Asia from multisatellite remote sensing,” *Water Resources Research*, vol. 50, pp. 8927–8943, Oct. 2014.
- [2] A. Arsen, J. F. Cretaux, M. Berge-Nguyen, and R. A. D. Rio, “Remote sensing-derived bathymetry of lake Poopó,” *Remote Sensing*, vol. 6, pp. 407–420, Dec. 2013.
- [3] A. Getirana, H. C. Jung, and K. Tseng, “Deriving three dimensional reservoir bathymetry from multi-satellite datasets,” *Remote Sensing of the Environment*, vol. 217, pp. 366–374, Nov. 2018.
- [4] D. R. Lyzenga, “Passive remote sensing techniques for mapping water depth and bottom features,” *Applied Optics*, vol. 17, no. 3, pp. 379–383, 1978.
- [5] R. P. Stumpf, K. Holderied, and M. Sinclair, “Determination of water depth with high-resolution satellite imagery over variable bottom types,” *Limnol. Oceanogr.*, vol. 48, pp. 547–556, Jan. 2003.
- [6] C. E. Simpson, C. D. Arp, Y. Sheng, M. L. Carroll, B. M. Jones, and L. C. Smith, “Landsat-derived bathymetry of lakes on the Arctic coastal plain of Northern Alaska,” *Earth System Science Data*, vol. 13, p. 1135–1150, Mar. 2021.
- [7] F. Eugenio and J. Marcello and A. Mederos-Barrera and F. Marqués, “High-resolution satellite bathymetry mapping : regression and machine learning-based approaches,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 60, pp. 1–14, Dec. 2021.
- [8] C. Wei, Y. Xiao, D. Fu, and T. Zhou, “Impact of turbidity on satellite-derived bathymetry : comparative analysis across seven ports in the South China sea,” *Remote Sensing*, vol. 16, p. 4349, Nov. 2024.
- [9] G. Heurtier, L. Ferro-Famil, F. Larue, and J. Y. Tourneret, “A non-parametric method for landsat-derived bathymetry of Northern Alaska lakes,” *EUSIPCO*, 2025. submitted.
- [10] B. Schölkopf and A. J. Smola, *Learning with kernels : support vector machines, regularization, optimization, and beyond*. Massachusetts : MIT Press, 2001.
- [11] M. Kanagawa, P. Hennig, D. Sejdinovic, and B. K. Sriperumbudur, “Gaussian processes and kernel methods : a review on connections and equivalences,” *arXiv preprint, https://arxiv.org/abs/1807.02582*, 2018.