

Le PAPR du MIMO massif n'augmente pas avec le nombre d'antennes

Marco GUZZO Inbar FIJALKOW

ETIS, UMR 8051, Cergy Paris University, ENSEA, CNRS, Cergy, France

Résumé – Pour les systèmes MIMO massifs multi-utilisateurs en liaison descendante, nous fournissons une borne supérieure et une expression analytique du rapport entre la puissance de crête et la puissance moyenne (PAPR) dans le cas d'un canal gaussien. Contrairement à ce qui a été supposé et intuité dans la littérature, nous examinons une variété de précodeurs linéaires et expliquons comment le PAPR est indépendant du nombre d'antennes de la station de base (SB) lorsque le canal est parfaitement connu.

Abstract – For downlink multi-user massive MIMO systems, we provide an upper bound and an analytical expression of the peak to average power ratio in the case of gaussian channel. In contrast to what was assumed and intuited in the literature, we examine a variety of linear precoders and explain how the PAPR is independent of the base station's antenna count when we have perfect channel state information.

1 Introduction

Dans les systèmes Multi Input Multi Output (MIMO) massif, la station de base d'un réseau sans fil utilise un grand nombre d'antennes. Dans une configuration multi-utilisateurs, la station de base fournit des services à un nombre relativement faible d'utilisateurs par rapport au nombre d'antennes. La robustesse et le débit de données peuvent donc être augmentés en fonction du nombre d'antennes [2]. La station de base étant le seul dispositif nécessitant une technologie coûteuse, l'introduction des systèmes MIMO massifs sans fil permet l'utilisation d'équipements utilisateurs à antenne unique, peu coûteux et de faible puissance [10].

Lorsque le nombre d'antennes augmente, les canaux des utilisateurs deviennent asymptotiquement orthogonaux dans des conditions de propagation favorables. Pour les systèmes à liaison descendante, le canal peut être inversé sans augmentation du bruit à l'aide d'un précodage linéaire simple à la station de base. De nombreuses recherches prennent en compte les précodeurs qui utilisent l'erreur quadratique moyenne minimale (MMSE), le Zero Forcing classique (ZF) ou une de ses normalisations (NZF) ou le Maximum Ratio Combining (MRC). Même pour ces méthodes de précodage simples, les conclusions asymptotiques du théorème central de Lindeberg-Lévy et de la loi des grands nombres d'abord [6], suivies de la théorie des matrices aléatoires, démontrent comment l'ajout d'antennes supplémentaires augmente la capacité de la liaison descendante [4, 7, 8].

Le nombre de chaînes RF et, par conséquent, le nombre d'antennes sont étroitement liés à la consommation d'énergie. En outre, lors de l'utilisation d'amplificateurs de puissance, en particulier les amplificateurs large bande non linéaires, la consommation d'énergie dépend de la plage de puissance du signal et de la puissance de crête à l'entrée de l'amplificateur. En particulier, si l'on impose de rester dans la zone de fonctionnement linéaire de l'amplificateur, on perd encore davantage en efficacité énergétique [1, 3]. Le rapport entre la puissance de crête et la puissance moyenne (PAPR) est la mesure standard utilisée pour évaluer la dynamique de puissance du signal autour de la puissance moyenne.

Cet article se concentre sur l'étude de la dynamique du si-

gnal après qu'il ait été précodé en utilisant le PAPR. Aucune analyse similaire n'a été trouvée pour des systèmes mono-porteuse précodés multi-utilisateurs. Le plan de l'article est le suivant. La section II introduit le modèle MIMO massif multi-utilisateurs en liaison descendante et présente les différents précodeurs linéaires envisagés. Le PAPR est ensuite étudié en détail dans la section III, où nous discutons de son comportement lorsque le nombre d'antennes augmente.

Dans ce qui suit, les lettres majuscules en gras M désignent les matrices dont les éléments se trouvent sur la ligne i , et la colonne j est désignée par $M_{i,j}$. La lettre minuscule en gras v indique un vecteur colonne, sa k^{th} composante est notée v_k . Les notations $()^T$, $()^\dagger$ désignent respectivement la matrice transposée et la matrice conjuguée transposée, $\text{Diag}(v)$ est la matrice diagonale avec les v_k sur la diagonale principale et $\text{Diag}(M)$ est la matrice composée uniquement des éléments diagonaux de M .

2 Modèle multi-utilisateurs en MIMO massif

2.1 Description du modèle

Nous supposons un scénario de liaison descendante à évanouissement plat dans lequel une station de base de M -antennes envoie des symboles s_k qui sont à moyenne nulle et indépendants avec une puissance σ_s^2 (i.e. $\mathbb{E}[s s^\dagger] = \sigma_s^2 \mathbf{I}_K$), pour $k \in \{1, \dots, K\}$ utilisateurs à une seule antenne sur le canal $\mathbf{H} K \times M$, voir la figure 1. Dans le présent travail, nous supposons que le canal est parfaitement connu à l'émission.

Le canal du k^{th} utilisateur est représenté par la k^{th} ligne de la matrice de canal \mathbf{H} , qui s'écrit \mathbf{h}_k^T . Nous supposons pour notre analyse que la matrice de canal est modélisée par $\mathbf{H} = \text{Diag}(\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_K) \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{\Sigma} \tilde{\mathbf{H}}$, où les éléments de $\tilde{\mathbf{H}}$ sont des variables aléatoires gaussiennes complexes à symétrie circulaire, dont les parties réelles et imaginaires sont toutes deux des variables aléatoires gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées $\mathcal{CN}(0, 1)$. Pour tenir compte de l'évanouissement dû à la distance (*path loss*), du masquage et des trajets multiples, les valeurs $\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_K$ représentent les

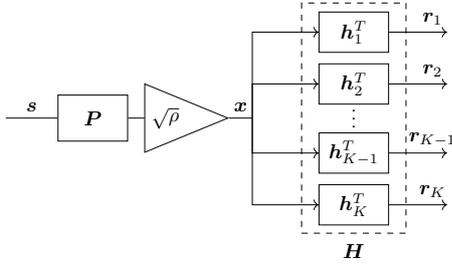


FIGURE 1 : Modèle en liaison descendante considéré

gains individuels du canal. Le vecteur $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_K]^T$ est utilisé pour déterminer les symboles précodés qui constituent le vecteur \mathbf{x} envoyé par la station de base.

Cette étude se concentre sur le cas où le nombre d'utilisateurs K et d'antennes M est important. Nous introduisons le paramètre $\gamma = \frac{M}{K}$ relatif aux dimensions du système représentant la charge d'antenne inverse. La configuration MIMO massive impose $\gamma > 1$.

2.2 Précodeurs linéaires

Le précodeur linéaire \mathbf{P} tire parti de la diversité de transmission en pondérant linéairement le flux d'informations : $\mathbf{x} = \sqrt{\rho}\mathbf{P}\mathbf{s}$. Le précodeur ZF a été choisi parce qu'il peut être utilisé pour les signaux LTE et qu'il est donné en utilisant la pseudo-inverse du canal. Il élimine toutes les interférences entre les utilisateurs. Malheureusement, en raison de l'inversion de la matrice, sa prise en compte n'est pas possible dans toutes les configurations, en particulier lorsque les dimensions du système augmentent en raison de la complexité de sa mise en œuvre.

$$\mathbf{P}_{ZF} = \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger)^{-1} \quad (1)$$

où $\mathbf{P}_{ZF} \in \mathbb{C}^{M \times K}$ devient orthogonal asymptotiquement.

À des fins de simplicité calculatoire, on utilise parfois le précodeur MRC. Pour comparaison, les résultats seront comparés à d'autres précodeurs linéaires tels que le MRC, le MMSE et le NZF [6], [9]. Le NZF est normalisé de telle sorte à ce que tous les utilisateurs reçoivent la même puissance après précodage.

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{MRC} &= \mathbf{H}^\dagger \\ \mathbf{P}_{NZF} &= \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger)^{-1} \text{Diag}(\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger)^{-1/2} \\ \mathbf{P}_{MMSE} &= \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \mathbf{I}_K)^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

On pose habituellement $\rho = \frac{1}{M}$ mais d'autres choix tels que prendre ρ de sorte que $\mathbb{E}[\|\mathbf{x}\|^2] = 1$ ou $\rho = 1$ sont également possibles. Toutefois, ils n'ont pas d'incidence sur le calcul du PAPR. Dans le cadre de ce papier nous considérerons $\rho = 1$.

3 PAPR du signal précodé MIMO massif

3.1 Définition du PAPR

L'analyse des variations d'amplitude du signal transmis est effectuée en utilisant le PAPR du signal échantillonné, défini comme le rapport entre la puissance de crête et la puissance moyenne d'un signal :

$$\text{PAPR}_{\mathbf{x}} = \frac{p_{\max, \mathbf{x}}}{p_{\text{avg}, \mathbf{x}}} = \frac{\max_{m \in \{1, \dots, M\}} |\mathbf{x}_m|^2}{\mathbb{E}[\|\mathbf{x}\|^2]} \quad (3)$$

Notre étude porte sur une configuration mono-porteuse. Cependant, l'intuition derrière la mention d'une augmentation de la plage dynamique en fonction du nombre d'antennes M dans [4, 7, 8] provient de l'OFDM. Dans le cas des signaux OFDM, le signal peut être considéré comme le signal \mathbf{s} précodé à l'aide de la matrice de transformée de Fourier rapide FFT (de taille $N \times N$) en tant que précodeur, où N est le nombre de sous-porteuses OFDM. En utilisant l'hypothèse du pire cas, on peut montrer que $\text{PAPR}_{\mathbf{x}} = N \text{PAPR}_{\mathbf{s}}$ [5].

Avec cette idée en tête, l'intuition dans [4, 7, 8] était que le signal MIMO massif mono-porteuse $\text{PAPR}_{\mathbf{x}}$ serait M fois $\text{PAPR}_{\mathbf{s}}$.

Par la suite, nous considérons le signal MIMO massif précodé mono-porteuse. Nous étudions le PAPR du signal transmis car il sera crucial pour déterminer le point de fonctionnement de l'amplificateur de puissance afin de maximiser son efficacité.

3.2 Cas du précodeur MRC

3.2.1 Puissance moyenne

De manière générale, peu importe le précodeur linéaire choisi, on peut montrer que la puissance moyenne $p_{\text{avg}, \mathbf{x}} = \frac{\mathbb{E}[\|\mathbf{x}\|^2]}{M} = \frac{\sigma_s^2}{M} \text{tr}(\mathbf{P}^\dagger \mathbf{P})$. Dans le cas du précodeur MRC cela devient :

$$p_{\text{avg}, \mathbf{x}} = \frac{\sigma_s^2}{M} \text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger) \quad (4)$$

En utilisant des résultats asymptotiques sur les matrices aléatoires, [8] donne une approximation déterministe des éléments de la matrice $(\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger)^{-1}$ quand M devient grand,

Lemme ([8] eq. (29)) :

$$(\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger)^{-1} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{1}{K(\gamma - 1)} \mathbf{\Sigma}^{-2} \quad (5)$$

On en déduit donc le résultat pour $p_{\text{avg}, \mathbf{x}}$:

$$p_{\text{avg}, \mathbf{x}} = \frac{\sigma_s^2}{M} \text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} K \sigma_s^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \varsigma_k^2 \right) \quad (6)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} p_{\text{avg}, \mathbf{x}} &= \frac{\sigma_s^2}{M} \text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger) \\ &\xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{\sigma_s^2}{M} \text{tr}(K(\gamma - 1)\mathbf{\Sigma}^2) = \sigma_s^2(\gamma - 1) \frac{K}{M} \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^2) \\ &\xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \sigma_s^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \sum_{k=1}^K \varsigma_k^2 = K \sigma_s^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \varsigma_k^2 \right) \end{aligned}$$

□

On a ici une puissance moyenne qui est asymptotiquement uniquement dépendante du nombre d'utilisateurs K et aucunement du nombre d'antennes M .

3.2.2 Borne sur la puissance maximale

Étant donné l'hypothèse sur $(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}$, $\forall(m, k)$, $\left| (\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k} \right|^2 \sim \mathcal{E}(1)$ (i.e. une distribution exponentielle de paramètre 1), nous pouvons analytiquement déterminer

une borne supérieure sur $p_{\max, \mathbf{x}}$.

Proposition :

Pour $K < M$, nous prouvons que pour le précodeur MRC, en introduisant ξ une probabilité très proche de 1,

$$p_{\max, \mathbf{x}} \leq K^2 \max_k |s_k|^2 \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_k^2 \right) \max_{m,k} \left(|(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}|^2 \right) \quad (7)$$

$$\leq K^2 \max_k |s_k|^2 \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_k^2 \right) \ln \left(\frac{1}{1 - \xi \frac{1}{MK}} \right) \quad (8)$$

Démonstration. Pour $K < M$, en utilisant la situation du pire cas par analogie avec le cas OFDM,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_m|^2 &= \left| \sum_{k=1}^K \mathbf{P}_{m,k} \mathbf{s}_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^K |\mathbf{P}_{m,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^K |\mathbf{s}_k|^2 \right) \\ &\leq K \max_k |s_k|^2 \left(\sum_{k=1}^K |\mathbf{P}_{m,k}|^2 \right) = K \max_k |s_k|^2 \left(\sum_{k=1}^K |\mathbf{H}^\dagger_{m,k}|^2 \right) \\ &\leq K \max_k |s_k|^2 \left(\sum_{k=1}^K |(\boldsymbol{\Sigma} \tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}|^2 \right) \\ &\leq K^2 \max_k |s_k|^2 \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_k^2 \right) \max_{m,k} |(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}|^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$p_{\max, \mathbf{x}} \leq K^2 \max_k |s_k|^2 \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_k^2 \right) \max_{m,k} \left(|(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}|^2 \right)$$

Puisque toutes les valeurs de la matrice suivent la même distribution et sont indépendantes, nous pouvons facilement calculer la densité de probabilité de leur maximum. Comme $|(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}|^2$ suit une distribution exponentielle,

$$\mathbb{P} \left(\forall (m, k) \left(|(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}|^2 < \Upsilon \right) \right) = \xi \Leftrightarrow \Upsilon = \ln \left(\frac{1}{1 - \xi \frac{1}{MK}} \right)$$

Ainsi,

$$p_{\max, \mathbf{x}} \leq K^2 \max_k |s_k|^2 \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_k^2 \right) \ln \left(\frac{1}{1 - \xi \frac{1}{MK}} \right) \quad \square$$

3.3 Cas des précodeurs du type ZF

3.3.1 Puissance moyenne

En procédant de la même manière que pour le MRC on peut trouver des expressions analytiques pour les autres précodeurs respectivement ZF, NZF et MMSE :

$$p_{\text{avg}, \mathbf{x}} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{\sigma_s^2}{M(\gamma - 1)} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{c_k^2} \right) = \frac{\sigma_s^2}{M(\gamma - 1)} \zeta \quad (\text{ZF}) \quad (9)$$

$$\xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{\sigma_s^2}{MK(\gamma - 1)^2} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{c_k^4} \right) \quad (\text{NZF}) \quad (10)$$

$$\xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{\sigma_s^2}{M(\gamma - 1)} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{c_k^2 \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2 K (\gamma - 1) c_k^2} \right)^2} \right) \quad (\text{MMSE}) \quad (11)$$

Alors que pour le MRC, (6) montrait que la puissance moyenne était indépendante de M ou de γ de manière asymptotique, ((9), (10), (11)) montrent que la puissance moyenne décroît fortement en fonction de M . La convergence vers la borne est d'ailleurs bien plus rapide que pour le MRC car la variance de la loi de Wishart est proportionnelle à $\frac{1}{M^3}$.

3.3.2 Borne sur la puissance maximale

De manière équivalente au résultat (7) on trouve pour le ZF, le NZF ou le MMSE les résultats respectifs suivants :

$$p_{\max, \mathbf{x}} \leq \frac{\max_k |s_k|^2}{(\gamma - 1)^2} \zeta \max_{m,k} \left(|(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}|^2 \right) \quad (\text{ZF}) \quad (12)$$

$$p_{\max, \mathbf{x}} \leq \frac{K \max_k |s_k|^2}{(\gamma - 1)^3} \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{c_k^4} \right] \max_{m,k} \left(|(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}|^2 \right) \quad (\text{NZF}) \quad (13)$$

$$p_{\max, \mathbf{x}} \leq \frac{\max_k |s_k|^2}{(\gamma - 1)^2} \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{c_k^2 \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2 K (\gamma - 1) c_k^2} \right)^2} \right] \max_{m,k} \left(|(\tilde{\mathbf{H}}^\dagger)_{m,k}|^2 \right) \quad (\text{MMSE}) \quad (14)$$

Contrairement à ce que l'on peut observer pour le MRC dans l'équation (7), les précodeurs de type ZF ont une puissance maximale qui décroît avec γ . De plus on voit que le MMSE et le ZF ont exactement la même dynamique et le même comportement selon cette étude asymptotique ((12), (14)). La puissance maximale du système n'est pas décuplée par l'augmentation du nombre d'antennes !

3.4 Étude du PAPR

3.4.1 Borne du PAPR

En utilisant ces nouvelles bornes sur la puissance maximale et les approximations que nous avons sur les puissances moyennes, nous pouvons déterminer une borne sur le PAPR. Il vient immédiatement pour tous les précodeurs étudiés :

$$\begin{aligned} \text{PAPR}_{\mathbf{x}} &\leq \text{PAPR}_{\mathbf{s}} \times K \frac{\gamma}{\gamma - 1} \max (|\mathbf{H}_{m,k}|^2) \\ &\leq \text{PAPR}_{\mathbf{s}} \times K \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{1}{1 - \xi \frac{1}{MK}} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Dans (15), nous voyons que le PAPR du signal précodé est asymptotiquement K fois le PAPR du signal d'entrée. À noter que K le nombre d'utilisateur est également le rang de la matrice de canal et de précodage. Ainsi, nous pouvons affirmer que le PAPR du signal précodé dépend davantage du rang de la matrice de précodage K que de sa dimension supérieure M (c'est-à-dire le nombre d'antennes), contrairement à l'intuition présente dans la littérature.

3.4.2 Simulations

Avec les simulations suivantes nous vérifierons les résultats sur la puissance moyenne obtenus à l'aide de considérations asymptotiques pour corroborer nos résultats et démontrer la vitesse de convergence vers les courbes simulées, nous comparerons le comportement des différents précodeurs en puissance moyenne et maximale pour des symboles choisis dans une QPSK. Enfin nous montrerons que comme le montre la sous-section 3.4.1, l'ensemble des précodeurs admet un PAPR identique lorsque $\gamma > 5$. On réalise une inférence sur 10^5 chaînes complètes par simulation Monte-Carlo. La valeur de puissance max est prise comme max de toutes les chaînes pour chaque nombre d'antennes étudié.

Les figures 2 et 3 illustrent bien la différence de comportement entre le MRC et les ZF. La figure 2 valide les expressions

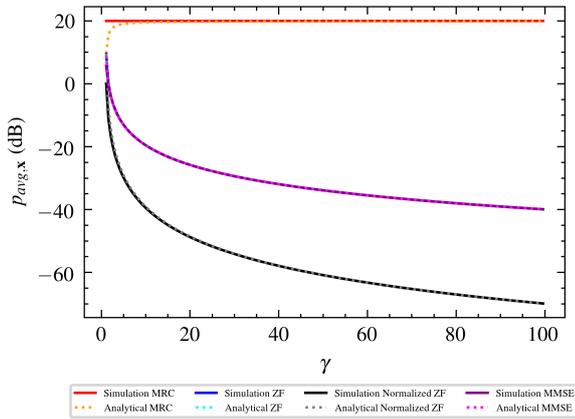


FIGURE 2 : Comparaison de la puissance moyenne simulée et théorique en fonction de γ pour $K = 10$, $\varsigma_k = 1$ avec une inférence sur 10^5 itérations

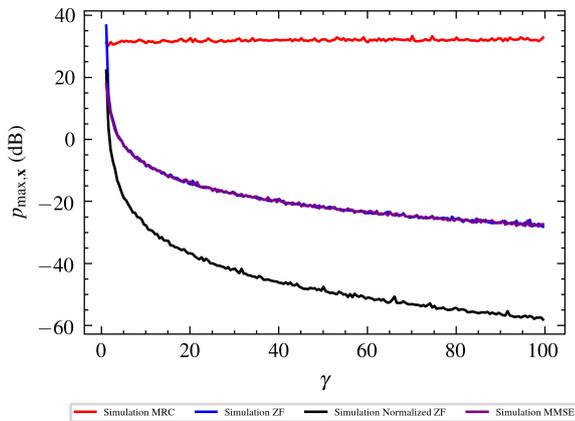


FIGURE 3 : Comparaison de la puissance crête simulée en fonction de γ pour $K = 10$, $\varsigma_k = 1$ avec une inférence sur 10^5 itérations

asymptotiques (6),(9),(10),(11) plus ou moins rapidement suivant la valeur de γ . La figure 4 montre quand à elle que tous les précodeurs ont le même comportement quand $\gamma > 5$. Ainsi la borne donnée par (15) en utilisant des résultats asymptotiques donne la bonne allure du PAPR peu importe le précodeur utilisé.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle borne analytique sur la puissance de crête et le PAPR d'un signal mono-porteuse précodé linéairement. Même si cette borne n'est pas serrée pour un grand nombre d'utilisateurs, elle met clairement en évidence la tendance et l'absence de dépendance par rapport à γ dès que γ dépasse 5.

En particulier, nous avons prouvé que, contrairement à l'intuition issue de l'état de l'art, le PAPR est borné et reste quasiment constant lorsque le nombre d'antennes augmente. Notre nouvelle borne montre également que les effets du affaiblissement de propagation ou du masquage n'ont pas d'impact sur le PAPR.

Dans nos travaux futurs, nous étudierons la conception conjointe entre le nombre d'antennes et l'amplificateur de

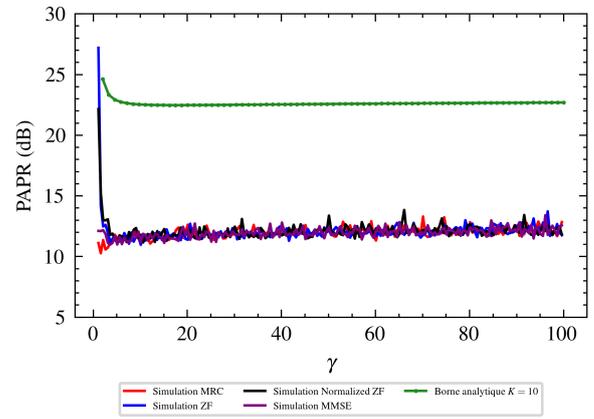


FIGURE 4 : Comparaison du PAPR simulé en fonction de γ pour $K = 10$, $\varsigma_k = 1$ avec une inférence sur 10^5 itérations

puissance afin de réduire la consommation d'énergie globale.

Références

- [1] Emil BJÖRNSON, Jakob HOYDIS, Marios KOUNTOURIS et Mérouane DEBBAH : Massive MIMO Systems with Non-Ideal Hardware : Energy Efficiency, Estimation, and Capacity Limits. *IEEE Transactions on Information Theory*, 60(11):7112–7139, novembre 2014. arXiv :1307.2584 [cs, math].
- [2] Erik G LARSSON, Ove EDFORS, Fredrik TUFVESSON et Thomas L MARZETTA : Massive mimo for next generation wireless systems. *IEEE communications magazine*, 52(2):186–195, 2014.
- [3] Alexandre MARCASTEL, Inbar FIJALKOW et Lee SWINDLEHURST : Energy efficient downlink massive mimo : Is 1-bit quantization a solution ? In *2019 16th International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS)*, pages 198–202. IEEE, 2019.
- [4] Amine MEZGHANI et Josef A. NOSSEK : Analysis of Rayleigh-fading channels with 1-bit quantized output. In *2008 IEEE International Symposium on Information Theory*, pages 260–264, Toronto, ON, Canada, juillet 2008. IEEE.
- [5] Richard van NEE et Ramjee PRASAD : *OFDM for Wireless Multimedia Communications*. Artech House, Inc., USA, 1st édition, 2000.
- [6] Hien Quoc NGO, Erik G LARSSON et Thomas L MARZETTA : Energy and spectral efficiency of very large multiuser mimo systems. *IEEE Transactions on Communications*, 61(4):1436–1449, 2013.
- [7] Christian B PEEL, Bertrand M HOCHWALD et A. Lee SWINDLEHURST : A vector-perturbation technique for near-capacity multiantenna multiuser communication-part i : channel inversion and regularization. *IEEE Transactions on Communications*, 53(1):195–202, 2005.
- [8] Amodh Kant SAXENA, Inbar FIJALKOW et A. Lee SWINDLEHURST : Analysis of One-Bit Quantized Precoding for the Multiuser Massive MIMO Downlink. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65(17):4624–4634, septembre 2017.
- [9] Ami WIESEL, Yonina C EL-DAR et Shlomo SHAMAI : Zero-forcing precoding and generalized inverses. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(9):4409–4418, 2008.
- [10] Rafik ZAYANI, Hmaied SHAIK et Daniel ROVIRAS : Papr-aware massive mimo-ofdm downlink. *IEEE Access*, 7:25474–25484, 2019.