

Une Approche pour l'Étude des Signaux Non-ergodiques et son Application à l'Interférence Intra-système des Communications CDMA

Emile GHIZZO¹ Julien LESOUPLE²

¹ISAE-Supaéro, Toulouse (FR), emile.ghizzo@alumni.enac.fr

²ENAC, Toulouse (FR), julien.lesouple@enac.fr

Résumé – L'estimation de paramètres en communications ou traitement du signal repose sur l'hypothèse d'ergodicité, permettant d'observer les statistiques aléatoires du signal via son évolution temporelle. Cependant, en présence d'interférences ou de distorsions, cette hypothèse peut être invalidée, rendant l'estimateur biaisé et son étude complexe. Ce papier propose une approche probabiliste pour analyser les statistiques temporelles et aléatoires des signaux (ergodiques et non ergodiques). Il en dérive des propriétés caractérisant les signaux à onde entretenue (Continuous Wave - CW) pondérés, courants en communications, puis les applique à l'étude des interférences intra-système dans les communications à Accès Multiple par Répartition en Code (Code Division Multiple Access - CDMA). Les résultats établissent la convergence en loi de l'interférence vers une variable gaussienne et en expriment la puissance ainsi que la densité spectrale, assimilant son impact sur toute la chaîne de réception à un bruit gaussien.

Abstract – Parameter estimation in communications and signal processing relies on the assumption of ergodicity, which allows observing the random statistics of a signal through its temporal evolution. However, in the presence of interference or distortions, this assumption may be invalidated, leading to a biased estimator and a more complex analysis. This paper proposes a probabilistic approach to analyze the temporal and random statistics of both ergodic and non-ergodic signals. It derives properties characterizing weighted Continuous Wave (CW) signals, which are common in communications, and then applies them to the study of intra-system interference in Code Division Multiple Access (CDMA) communications. The results establish the convergence in distribution of the interference towards a Gaussian variable and express its power as well as its spectral density, modeling its impact on the entire reception chain as Gaussian noise.

1 Introduction

En théorie de l'estimation, notamment en communications et en traitement du signal, la majorité des méthodes d'estimation reposent sur l'hypothèse d'ergodicité d'un signal, permettant ainsi d'évaluer ses paramètres aléatoires à partir d'une seule de ses réalisations temporelles.

De nombreux exemples de fonctions d'estimation pour des signaux ergodiques sont présentés dans la littérature [5, 6]. Par exemple, [1] explore les propriétés asymptotiques des transformations non linéaires appliquées au périodogramme (estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal). [3] propose une méthode d'estimation de la variance stochastique multivariée en utilisant un filtre gaussien fondé sur la méthode de Laplace. [8] présente une méthode algébrique pour estimer les paramètres intrinsèques (amplitude, fréquence et phase) d'un signal sinusoïdal affecté par un biais constant et un bruit additif. Enfin, [4] généralise les fonctions de maximum de vraisemblance et la théorie des fonctions d'estimation à des contextes où l'ergodicité n'est pas assurée.

L'ergodicité exprime l'idée qu'un signal dépendant du temps, qu'il s'agisse d'un système dynamique ou d'un processus stochastique, finira par explorer l'ensemble de son espace de définition, de manière dynamique ou aléatoire. En d'autres termes, les propriétés statistiques d'un processus stochastique peuvent être représentées par une collection suffisamment large d'échantillons. Ce concept a été formalisé dans le cadre de la théorie de l'estimation. [7, p. 14] introduit l'ergodicité d'ordre N comme la convergence en moyenne quadratique (ou parfois en probabilité) de la moyenne temporelle d'ordre N vers sa

valeur statistique. De plus, cette définition est généralisée à toute fonction du vecteur d'observation (appelée estimateur dans le domaine des statistiques) dans [6, chap. 12], englobant ainsi des processus ergodiques au sens de la moyenne, de la distribution ou du spectre.

Si la moyenne, la puissance ou la densité spectrale de puissance temporelle peuvent être définies par leur représentation aléatoire dans le cas d'un signal ergodique, la définition de ces variables n'a pas été établie pour les processus non ergodiques. L'analyse de signaux et des estimateurs associés est alors compliquée en présence de phénomènes non ergodiques qui perturbent le signal (haute dynamique, interférences, distorsion de la charge utile du satellite, etc.). Dans cette optique, [2] a introduit une définition formelle des représentations aléatoire et temporelle d'un processus stochastique, afin de calculer et d'interpréter les statistiques temporelles de ce signal en conditions non ergodiques. Ce papier généralise cette théorie et en dérive des propriétés caractérisant les signaux à onde entretenue (Continuous Wave - CW) pondérés, puis les applique à l'étude des interférences intra-système dans les communications à Accès Multiple par Répartition en Code (Code Division Multiple Access - CDMA).

En effet, un système CDMA souffre nécessairement d'une interférence induite par les autres signaux partageant la même bande. Caractériser les dégradations provoquées par cette interférence permettrait d'optimiser la conception du signal et du récepteur (quantification des pertes, définition de la taille minimale du code, etc.). À notre connaissance, il n'existe pas d'étude proposant une modélisation et une quantification précises des erreurs intra-système CDMA.

2 Formulation

Soit $s : I_t \times I_\Omega \rightarrow I_s$ un processus stochastique, où $I_t \subset \mathbb{R}$ est un intervalle borné représentant l'intervalle de définition temporelle de s , I_Ω l'ensemble de tous les événements aléatoires, et $I_s \subseteq \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs prises par s . Dans ce papier, le processus stochastique est noté s , et sa valeur pour $t \in I_t, \omega \in I_\Omega$, est notée $s(t, \omega)$.

Définition 1 (Espace des événements aléatoires). [2] Soit $(I_\Omega, \mathcal{E}_\Omega, \mathbb{P}_\Omega)$ un espace probabilisé engendré par I_Ω , la tribu associée $\mathcal{E}_\Omega$ et la mesure de probabilité $\mathbb{P}_\Omega : \mathcal{E}_\Omega \rightarrow [0, 1]$. Le triplet $(I_\Omega, \mathcal{E}_\Omega, \mathbb{P}_\Omega)$ constitue l'espace probabilisé associé à la réalisation aléatoire du signal s . L'espérance associée à $(I_\Omega, \mathcal{E}_\Omega, \mathbb{P}_\Omega)$ est notée $\mathbb{E}_\Omega[\cdot] = \int_{I_\Omega} \cdot d\mathbb{P}_\Omega$ et est dénommée espérance aléatoire.

Définition 2 (Espace des événements temporels). [2] Soit $(I_t, \mathcal{E}_t, \mathbb{P}_t)$ un espace de mesure sur l'intervalle de temps borné $I_t \subset \mathbb{R}$, avec $\mathcal{E}_t$ la tribu associée et la mesure de probabilité $\mathbb{P}_t : \mathcal{E}_t \rightarrow [0, 1]$ définie pour tout $E \in \mathcal{E}_t$ par

$$\mathbb{P}_t(E) = \frac{1}{T} \int_E dt \text{ avec } T = \int_{t \in I_t} dt. \quad (1)$$

Le triplet $(I_t, \mathcal{E}_t, \mathbb{P}_t)$ définit un espace de probabilité associé à l'intervalle de temps I_t , appelé espace des événements temporels et représentant la réalisation temporelle du signal s . L'espérance associée à $(I_t, \mathcal{E}_t, \mathbb{P}_t)$ est définie par

$$\mathbb{E}_t[\cdot] = \int_{I_t} \cdot d\mathbb{P}_t = \frac{1}{T} \int_{I_t} \cdot dt, \quad (2)$$

et est dénommée espérance temporelle.

Définition 3 (Espace total des événements). Soit $(I, \mathcal{E})$ l'espace produit associé au produit cartésien $I = I_\Omega \times I_t$, où $\mathcal{E}$ est la tribu produit, générée par la collection de tous les rectangles mesurables tels que $\mathcal{E} = \sigma(\{E_t \times E_\Omega : E_t \in \mathcal{E}_t, E_\Omega \in \mathcal{E}_\Omega\})$ et $\mathbb{P}$ la mesure produit sur $(I, \mathcal{E})$ (unique mesure qui satisfait $\mathbb{P}(E_t \times E_\Omega) = \mathbb{P}_t(E_t) \mathbb{P}_\Omega(E_\Omega)$, $\forall E_t \in \mathcal{E}_t, E_\Omega \in \mathcal{E}_\Omega$). Le triplet $(I, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, appelé espace total des événements, caractérisant le domaine total de définition du signal. Nous notons $\mathbb{E}[\cdot] = \int_I \cdot d\mathbb{P}$ l'espérance associée à l'espace total des événements.

Propriété 1. [2] Considérant l'espace de mesure $(I_s, \mathcal{A}, \mu)$ sur l'intervalle $I_s \subset \mathbb{R}$ muni de sa tribu $\mathcal{A}$ et sa mesure μ , le signal s peut être vu comme une variable aléatoire (v.a.) de $I \rightarrow I_s$. Le signal s , évalué à un instant fixe $t_0 \in I_t$ ou à une réalisation aléatoire $\omega_0 \in I_\Omega$, peut alors être observé à travers les v.a. conditionnelles $s | \{t_0\}$ et $s | \{\omega_0\}$ respectivement. Ainsi, le signal étudié sur chacun de ces trois espaces probabilisés respecte toutes les propriétés définies dans la théorie des probabilités. Ces propriétés et définitions (e.g., indépendance, fonction de densité, moments, etc.) peuvent être utilisées pour chacun de ces trois espaces.

3 Analyse des signaux à onde entretenue pondérée

Un signal CW est un signal sinusoïdal à fréquence et amplitude constantes. Dans ce papier, nous généralisons aux signaux CW

à amplitude variable $w(t, \omega)$, dénommés w -CW. L'étude de ces signaux est intéressante dans le cadre des communications où le signal transmis est modulé par une porteuse sinusoïdale (CW).

Définition 4 (CW pondéré (w -CW)). [2] Soient $f \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ et θ une v.a. uniforme sur $[0, 2\pi]$ et constante sur I_t . Soit $w : I_t \times I_\Omega \rightarrow I_s$ un processus stochastique centré ($\mathbb{E}_t[w] = 0$, $\mathbb{E}_\Omega[w] = 0$). Le signal CW pondéré s est alors défini par

$$s(t, \omega) = a w(t, \omega) \cos(2\pi f t + \theta(\omega)). \quad (3)$$

Définition 5 (Multiple w -CW). Soient $(w_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}$ un vecteur de processus stochastiques centrés, $(\theta_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}$ un vecteur de v.a. uniformes $\mathcal{U}([0, 2\pi]^M)$ et $(f_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}$ un vecteur de réels tel que $f_{m+1} > f_m$. Le multiple CW pondéré $S_M : I_t \times I_\Omega \rightarrow I_S$ est défini par

$$S_M(t, \omega) = \sum_{m=1}^M w_m(t, \omega) a_m \cos(2\pi f_m t + \theta_m(\omega)). \quad (4)$$

Propriété 2 (Indépendance temporelle de deux fonctions périodiques). Soient $s_1 : I_t \rightarrow \mathbb{R}$ et $s_2 : I_t \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions périodiques de périodes T_1 et T_2 . Pour $T \rightarrow \infty$, si T_2/T_1 est un nombre irrationnel, et si $T_1 \ll T$ et $T_2 \ll T$, alors s_1 et s_2 sont temporellement indépendants.

Démonstration. Reprendre la démonstration de [2, Annexe A] en généralisant pour n'importe quelles fonctions périodiques. $\square$

Remarque. La propriété 2 peut être généralisée à M signaux périodiques (indépendance deux à deux).

Propriété 3 (Puissance de w -CW non-corrélés). [2] Soit $S_M : I_t \rightarrow I_S$ une multiple w -CW. Si chaque élément de S_M est deux à deux non-corrélé et que pour tout $m \in \llbracket 1; M \rrbracket$, w_m et $\cos(2\pi f_m t + \theta_m(\omega))$ sont temporellement non-corrélés, alors S_M est centré et sa puissance est

$$P_S = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M a_m^2 P_{w_m} \quad (5)$$

où P_{w_m} est la puissance de w_m . Ici, on parle de puissance moyenne temporelle (voir [2]).

Propriété 4 (Théorème central limite (TCL) pour w -CW). [2] Soit $S_M : I_t \times I_\Omega \rightarrow I_S$ un signal multiple w -CW, composé de M signaux w -CW comme défini dans la Définition 5. Soient A_M et $\Sigma_M : I_t \rightarrow I_\Sigma$ tels que

$$A_M = \sqrt{\text{Var}_t \{S_M\}}, \quad \Sigma_M = \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M w_m^2 a_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

avec $\text{Var}_t \{\cdot\}$ la variance temporelle. Si A_M satisfait les conditions suivantes :

$$A_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} +\infty, \quad \frac{\sqrt{P_m}}{A_M} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{\Sigma_M}{A_M} \xrightarrow{\mathcal{L}} 1, \quad (7)$$

où P_m est la puissance de chaque élément de S_M , alors le signal S_M/A_M converge en loi vers une loi normale centrée réduite :

$$\frac{S_M}{A_M} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (8)$$

Corollaire 4.1 (Théorème central limite (TCL) pour des w -CW complexes). Soit $S_M : I_t \times I_\Omega \rightarrow I_S$ un signal multiple w -CW (avec $I_S \subset \mathbb{C}$) tel que

$$S_M(t, \omega) = \sum_{m=1}^M w_m(t, \omega) a_m \exp(2j\pi f_m t + j\theta_m(\omega)) \quad (9)$$

avec $(w_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}$ complexes et $(\theta_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}$, $(f_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}$ et $(a_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}$ comme définis dans 5. Soient

$$A_M = \sqrt{\text{Var}_t \{S_M\}}, \quad \Sigma_M = \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M |w_m|^2 a_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Si A_M satisfait les conditions (7), alors le signal S_M/A_M converge en loi vers une loi normale complexe circulaire centrée réduite :

$$\frac{S_M}{A_M} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{CN}(0, 1). \quad (11)$$

Démonstration. Appliquer le TCL pour une série lacunaire trigonométrique complexe présentée dans [9, (iv)] à la démonstration du théorème 4. $\square$

Corollaire 4.2 (Théorème central limite (TCL) pour w -CW non-corrélés). Soit $S_M : I_t \times I_\Omega \rightarrow I_S$ un signal multiple w -CW comme défini dans la Définition 5. Soient A_M et $\Sigma_M : I_t \rightarrow I_\Sigma$ tels que

$$A_M = \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M a_m^2 P_{w_m} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Sigma_M = \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M w_m^2 a_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Si A_M satisfait les conditions suivantes :

$$A_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} +\infty, \quad \frac{a_m \sqrt{P_{w_m}}}{A_M} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \quad (13)$$

que les éléments de S_M sont deux à deux non-corrélés et $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall m, \quad \mathbb{E}_t [w_m^4] \leq \alpha P_{w_m}^2 \quad (14)$$

alors le signal S_M/A_M converge en loi vers une loi normale centrée réduite :

$$\frac{S_M}{A_M} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (15)$$

Démonstration. L'Eq. (12) est une conséquence de la propriété 3. La propriété 4.2 peut être démontrée en utilisant 4 et en montrant que pour des w -CW non-corrélés, alors $\Sigma_M/A_M \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$. Pour montrer ceci, il suffit de montrer que $\text{Var}_t \{\Sigma_M^2/A_M^2\} \rightarrow 0$.

$$\text{Var}_t \left\{ \frac{\Sigma_M^2}{A_M^2} \right\} = \left(\frac{1}{2A_M^2} \right)^2 \sum_{m=1}^M a_m^4 \text{Var}_t \{w_m^2\} \quad (16)$$

$$\leq \alpha \left(\frac{1}{2A_M^2} \right)^2 \sum_{m=1}^M a_m^4 P_{w_m}^2. \quad (17)$$

On peut démontrer que pour toute suite divergente (évolution supérieure ou égale à $1/m$), comme supposé dans (13), alors (17) converge vers 0 (en majorant par son min/max). La variance étant positive, par le théorème de convergence dominée, on a $\Sigma_M/A_M \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$. $\square$

4 Application : Interférence intra-système dans des communications CDMA

Dans cette section, on considère un système de télécommunication CDMA où M émetteurs différents transmettent un signal dans une même bande de fréquence. Le signal $S_M : I_t \rightarrow \mathbb{R}$ reçu par un récepteur est alors défini par

$$S_M(t) = \sum_{m=1}^M a_m w_m(t - \tau_m) \exp(2j\pi f_m t + j\theta_m) \quad (18)$$

où m est l'indice du m -ième signal reçu. Pour chaque $m \in \llbracket 1; M \rrbracket$, w_m représente la séquence binaire pseudo-aléatoire (Pseudo-Random Binary Sequence - PRBS), matérialisée par une forme d'onde quelconque. L'amplitude du signal est donnée par $a_m \sim \mathbb{R}_+$, et le retard de code est noté par $\tau_m \in \mathcal{U}([0, T_w])$. Le retard de phase est noté $\theta_m \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$, tandis que la fréquence du signal reçu, prenant en compte principalement le décalage Doppler, est donnée par $f_m \in \mathbb{R}$. On suppose que la forme d'onde est identique pour chaque w_m , les différences entre les signaux ne venant que de leurs codes PRBS respectifs.

En pratique, le récepteur souhaite synchroniser et décoder un seul des M signaux (ou chaque signal sur un canal différent). Les autres signaux sont alors perçus comme des interférences, appelées interférences intra-système. Ces interférences peuvent être modélisées par une multiple w -CW complexe (Définition 5) comportant $M' = M - 1$ signaux. Dans cette section, nous appliquons les théories présentées dans les Sec-

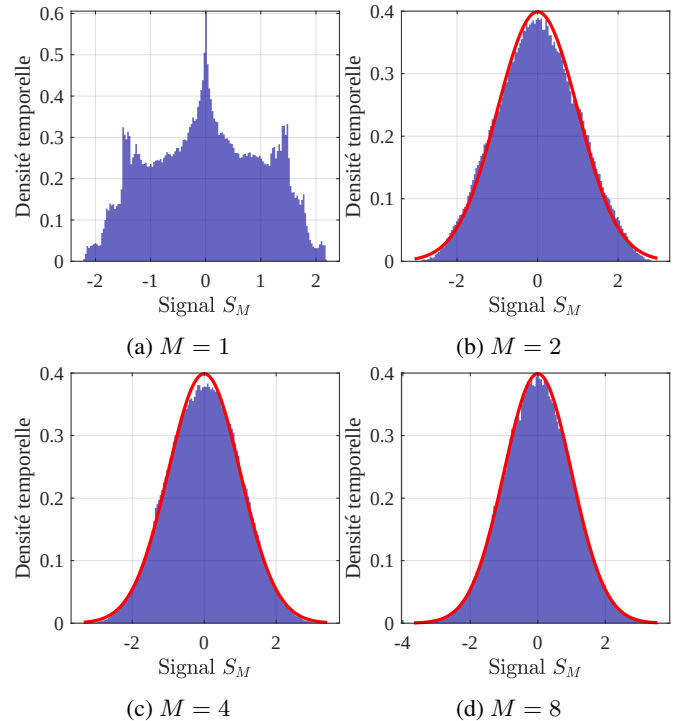


FIGURE 1 : Fonction de densité temporelle du signal S_M/P_S ($M \in \{1, 2, 4, 8\}$) pour un cosinus surélevé de paramètres $\beta = 0.5$ et $T_s = 5\mu s$. La courbe rouge représente la fonction de densité de $\mathcal{N}(0, 1)$.

tions 2 et 3 pour caractériser ces interférences et évaluer leur impact sur les performances du récepteur.

En raison des propriétés pseudo-aléatoires des w_m , ces derniers sont deux à deux décorrélés, c'est-à-dire que pour tous n et m distincts, $\text{Cov}_t(w_n, w_m) = 0$. Nous supposons également que $\mathbb{E}_t[|w_m|^4] < \infty$. Par conséquent, le théorème 4.2 établit la convergence en loi, sur le plan temporel, de l'interférence intra-système vers un processus $\mathcal{CN}(0, P_S)$ de variance (ou puissance) P_S , défini par (Propriété 3)

$$P_S = \frac{E_w}{2T} \sum_{m=1}^{M'} a_m^2 \quad (19)$$

où $E_w/T = \mathbb{E}_t[|w(t)|^2]$ est la puissance moyenne de la forme d'onde sur un symbole de donnée. Il est important de noter que, bien que l'interférence intra-système puisse être modélisée par une loi normale, celle-ci n'est pas nécessairement blanche. En effet, sa densité de puissance (DSP) est donnée par

$$S_S(f) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M a_m^2 S_w(f - f_m) \quad (20)$$

$$\approx \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M a_m^2 \right) \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M S_w(f - f_m) \right) \quad (21)$$

où $S_w(f) = \mathcal{F}(\mathbb{E}_t[w(t)w(t - \tau)])$ est la densité spectrale de puissance sur I_t et $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier. Dans l'équation (21), le terme à gauche représente la puissance agrégée des signaux, tandis que le terme à droite, noté $\tilde{S}_S$, correspond à la DSP moyenne des signaux.

Les résultats pour une forme d'onde spécifique sont présentés dans les Figs. 1 et 2 pour un cosinus surélevé de paramètre $\beta = 0.5$, avec une durée de symbole $T_s = 5 \mu\text{s}$ et un code de 5 ms. Les paramètres de propagation $(f_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}$ et $(a_m)_{m \in \llbracket 1; M \rrbracket}$ sont choisis arbitrairement dans les intervalles $[-3000, 3000]$ Hz et $[0, 1]$, respectivement. La convergence en loi est illustrée dans la Fig. 1, où l'on observe une bonne similitude à partir de $M \approx 4$. La DSP moyenne est montrée dans la Fig. 2 (en bleu), qui ressemble fortement à la DSP de la forme d'onde w (en rouge).

5 Conclusion

Ce papier présente une approche probabiliste pour étudier les statistiques temporelles et aléatoires de signaux non ergodiques (et ergodiques). Différentes propriétés des multiples CW pondérées sont dérivées, telles que la puissance et le TCL. Ces propriétés sont ensuite appliquées pour caractériser les interférences intra-système dans un système de communication CDMA, montrant la convergence en loi vers une v.a. $\mathcal{CN}(0, P_S)$ de puissance donnée par (19) et de DSP décrite par (21). Enfin, bien que le TCL démontre une convergence asymptotique lorsque $M \rightarrow \infty$, la convergence semble assez rapide, avec une similitude apparente dès $M \approx 4$ dans l'exemple de forme d'onde présenté.

6 Remerciements

Ce travail a été partiellement financé par le projet DGA/AID 2023 65 0083.

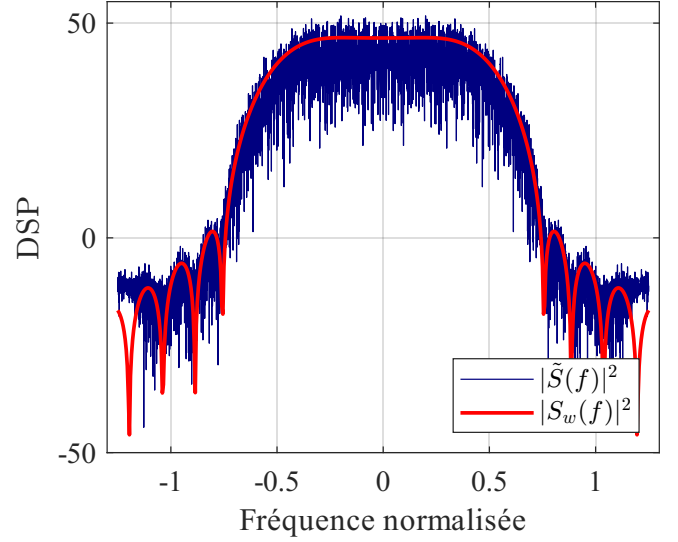


FIGURE 2 : Densité spectrale de puissance équivalente $\tilde{S}_S(f)$ ($M = 6$).

Références

- [1] Gilles FAY, Eric MOULINES et Philippe SOULIER : Fonctionnelles Non-Linéaires du Périodogramme. In *GRETSI 1999 : XVIIe Colloque*, pages 223–226. GRETSI, Sep. 1999.
- [2] Emile GHIZZO, El-Mehdi DJELLOUL, Julien LESOUPLE, Carl MILNER et Christophe MACABIAU : Assessing Jamming and Spoofing Impacts on GNSS Receivers : Automatic Gain Control (AGC). *Signal Processing*, 228:109762, 3 2025.
- [3] Ivan GORYNIN, Emmanuel MONFRINI et Wojciech PIECZYNSKI : Estimation de la Variance Stochastique Multivariée avec un Filtre Gaussien Basé sur la Méthode de Laplace. In *GRETSI 2017 : XXVIe Colloque*. GRETSI, Sep. 2017.
- [4] Sun-Young HWANG : Some characterizations of non-ergodic estimating functions for stochastic processes. *Journal of the Korean Statistical Society*, 44(4):661–667, 2015.
- [5] Steven M. KAY : *Fundamentals of statistical signal processing : estimation theory*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [6] Athanasios PAPOULIS et S Unnikrishna PILLAI : *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, Fourth Edition*. McGraw-Hill Europe : New York, NY, USA, 2002.
- [7] Boaz PORAT : *Digital Processing of Random Signals : Theory and Methods*. Courier Dover Publications, 2008.
- [8] Rosane USHIROBIRA, Wilfrid PERRUQUETTI, Mamadou MBOUP et Michel FLIESS : Estimation algébrique des paramètres intrinsèques d'un signal sinusoïdal biaisé en environnement bruité. In *Gretsi*, Bordeaux, France, septembre 2011.
- [9] Antoni ZYGMUND : On Lacunary Trigonometric Series. *Transactions of the American Mathematical Society*, 34(3): 435–446, 1932.