



Nouvelles formules de synthèse de la transformée de Fourier à court terme avec une fenêtre d'analyse modifiée

Dominique FOURER¹ François AUGER² Eric CHASSANDE-MOTTIN³ Patrick FLANDRIN⁴

¹Lab. IBISC - Univ. Evry Paris-Saclay, 36, rue du Pelvoux, CE1455, 91020 Évry-Courcouronnes Cédex, France

²Nantes Université, IREENA, UR 4642, 37, boulevard de l'Université, CS 90406, 44612 Saint-Nazaire, France

³Univ. Paris Cité, CNRS, Astroparticule et Cosmologie, 75013 Paris, France

⁴Lab. de Physique - ENS de Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cédex 07, France

Résumé – La transformée de Fourier à court terme (TFCT) est un outil couramment utilisé dans de nombreuses applications nécessitant le traitement de signaux non stationnaires. Elle a suscité de nombreux travaux théoriques récents permettant le calcul de versions synchroqueezées, offrant une meilleure lisibilité des signaux tout en améliorant la séparation des composantes et la précision de l'estimation des paramètres. Ces nouveaux opérateurs font intervenir des TFCTs utilisant des fenêtres d'analyse particulières, dont les propriétés restent peu étudiées. Une exploration approfondie de ces propriétés nous permet d'introduire de nouvelles familles de formules de reconstruction du signal à partir de sa TFCT, tout en établissant des liens théoriques avec les méthodes de réallocation et de synchroqueezing. Enfin, nous illustrons ces résultats théoriques par des simulations numériques.

Abstract – The Short-Time Fourier Transform (STFT) is commonly used in applications requiring the processing of non-stationary signals. It has inspired recent theoretical work that enables the design of its synchroqueezed versions, improving signal readability while enhancing the separation of components and the accuracy in parameter estimation. These new operators involve STFTs using particular analysis windows, for which the properties are insufficiently studied. A thorough exploration of these properties allows the introduction of several new families of signal reconstruction formulas from its STFT, while establishing theoretical links with the reassignment and the synchroqueezing methods. Finally, we illustrate these theoretical results with numerical simulations.

1 Introduction

La Transformée de Fourier à court terme (TFCT) est l'un des outils les plus utilisés pour le traitement de signaux non stationnaires multi-composantes. Elle repose sur des fondements théoriques solides et trouve des applications dans divers domaines tels que le traitement audio [6], le radar [1] ou le domaine biomédical [7]. La TFCT a récemment connu un regain d'intérêt, avec l'émergence de techniques basées sur la réallocation et le synchroqueezing [2], qui exploitent la phase de la TFCT pour produire des représentations plus lisibles et mieux localisées dans le plan temps-fréquence afin de faciliter l'extraction des composantes (modes) tout en estimant leurs paramètres [9]. Plus spécifiquement, le synchroqueezing de la TFCT s'appuie sur ses propriétés, notamment ses marginales en temps et en fréquence, pour reconstruire le signal d'origine en agrégeant ses coefficients selon les axes temporel (horizontal) et fréquentiel (vertical).

Dans cette étude, nous proposons d'étendre l'analyse des propriétés de la TFCT à plusieurs familles de fenêtres d'analyse spécifiques, jouant un rôle essentiel dans le calcul des opérateurs de synchroqueezing d'ordre supérieur [10]. Nous établissons ainsi un lien avec les opérateurs de réallocation et de synchroqueezing existants, ouvrant les perspectives de nouveaux développements basés sur la TFCT.

Cet article est structuré de la manière suivante : dans la Section 2, nous rappelons quelques définitions et nous introduisons de nouvelles propriétés de la TFCT ainsi que de sa fenêtre d'analyse. La Section 3 généralise les résultats obtenus et introduit de nouvelles formules de reconstruction de

la TFCT que nous évaluons par des simulations numériques dans la Section 4. Enfin, nous concluons cette étude par des observations et des pistes de travaux futurs en Section 5.

2 Propriétés de la TFCT

2.1 Opérateurs de réallocation

Pour un signal x intégrable et dérivable, on définit sa TFCT utilisant une fenêtre d'analyse h (intégrable et dérivable), comme la fonction donnée en tout point temps-fréquence $(t, \omega) \in \mathbb{R}^2$ suivante :

$$F_x^h(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t - \tau)^* e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1)$$

avec z^* le conjugué complexe de z et $j^2 = -1$. La TFCT peut s'exprimer dans le domaine fréquentiel par :

$$F_x^h(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} F_x(\omega + \Omega) F_h(-\Omega)^* e^{j\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \quad (2)$$

avec $F_x(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j\omega t} dt$ (resp. $F_h(\omega)$) la transformée de Fourier de x (resp. h). Cette définition de la TFCT permet de formuler les opérateurs de réallocation (complexes avec le tilde et réels avec le chapeau) comme suit [5] :

$$\tilde{t}_x(t, \omega) = t - \frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)}, \quad \tilde{\omega}_x(t, \omega) = j\omega + \frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \quad (3)$$

$$\hat{t}_x(t, \omega) = \text{Re}(\tilde{t}_x(t, \omega)), \quad \hat{\omega}_x(t, \omega) = \text{Im}(\tilde{\omega}_x(t, \omega)) \quad (4)$$

avec $\mathcal{T}h(t) = th(t)$ et $\mathcal{D}h(t) = \frac{dh}{dt}(t)$, des versions modifiées de la fenêtre d'analyse h .

2.2 Propriétés de la fenêtre d'analyse

La dérivée de la transformée de Fourier de la fenêtre d'analyse h vaut :

$$\frac{dF_h}{d\omega}(\omega) = -j \int_{\mathbb{R}} t h(t) e^{-j\omega t} dt = -j F_{\mathcal{T}h}(\omega) = \frac{F_{\mathcal{T}h}(\omega)}{j} \quad (5)$$

et donc $F_{\mathcal{T}h}(\omega) = j \frac{dF_h}{d\omega}(\omega)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{d^n F_h}{d\omega^n}(\omega) = (-j)^n \int_{\mathbb{R}} t^n h(t) e^{-j\omega t} dt = (-j)^n F_{\mathcal{T}^n h}(\omega) \quad (6)$$

qui permet de déduire l'égalité suivante :

$$F_{\mathcal{T}^n h}(\omega) = (-j)^{-n} \frac{d^n}{d\omega^n} F_h(\omega) = j^n \frac{d^n F_h}{d\omega^n}(\omega) \quad (7)$$

En définissant h par sa transformée de Fourier inverse $h(t) = \int_{\mathbb{R}} F_h(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$, on calcule sa dérivée par rapport au temps :

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}} F_h(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right] = \int_{\mathbb{R}} j\omega F_h(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (8)$$

On remarque que la transformée de Fourier de $\mathcal{D}h$ vaut :

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{D}h}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} [h(t)] e^{-j\omega t} dt = \iint_{\mathbb{R}^2} j\Omega F_h(\Omega) e^{j(\Omega-\omega)t} dt \frac{d\Omega}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} j\Omega F_h(\Omega) \delta(\Omega - \omega) d\Omega = j\omega F_h(\omega) \end{aligned} \quad (9)$$

avec δ la distribution de Dirac. Cela permet d'écrire $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^n h}{dt^n}(t) = \int_{\mathbb{R}} (j\omega)^n F_h(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (10)$$

$$F_{\mathcal{D}^n h}(\omega) = (j\omega)^n F_h(\omega) \quad (11)$$

2.3 Marginales de la TFCT

2.3.1 Temps

La marginale en temps de la TFCT intervient par exemple dans le calcul du synchrosqueezing horizontal [3]. On redonne ici cette expression modifiée, pour une fréquence ω_0 choisie :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt &= \iint_{\mathbb{R}^2} x(\tau) h(t - \tau)^* e^{-j\omega_0 \tau} e^{-j\omega_0 t} dt d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u)^* e^{-j\omega_0 u} du \int_{\mathbb{R}} x(\tau) e^{-j(\omega_0 + \omega_0)\tau} d\tau \\ &= F_h(-\omega_0)^* F_x(\omega_0 + \omega_0) \end{aligned} \quad (12)$$

Cela permet d'obtenir la transformée de Fourier de x , quand $\omega_0 = 0$, si $F_h(0) \neq 0$:

$$F_x(\omega) = \frac{1}{F_h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(\tau, \omega) d\tau, \quad (13)$$

qui permet de reconstruire x par transformée de Fourier inverse. Si $F_h(0) = 0$, et si $\frac{\partial F_h}{\partial \omega_0}(0) \neq 0$, on peut utiliser la règle de l'Hôpital¹ : $F_x(\omega) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} F_x(\omega + \omega_0) =$

¹Rappel de ce théorème : Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et si $g'(x_0) \neq 0$, alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt}{F_h(-\omega_0)^*} &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \omega_0} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt}{\frac{\partial}{\partial \omega_0} \int_{\mathbb{R}} h(u)^* e^{-j\omega_0 u} du} \\ &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^h(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt}{\int_{\mathbb{R}} u h(u)^* e^{-j\omega_0 u} du} = \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^h(t, \omega) dt}{F_{\mathcal{T}h}(0)^*} \end{aligned} \quad (14)$$

Cela permet d'obtenir la formule de synthèse suivante après transformée de Fourier inverse, quand $F_{\mathcal{T}h}(0) \neq 0$:

$$x(t) = \frac{1}{F_{\mathcal{T}h}(0)^*} \iint_{\mathbb{R}^2} \tau F_x^h(\tau, \omega) e^{j\omega t} d\tau \frac{d\omega}{2\pi} \quad (15)$$

2.3.2 Fréquence

Dans [4], nous avons proposé une marginale modifiée de la TFCT en introduisant un délai $t_0 \geq 0$. Cette marginale intervient dans le calcul du synchrosqueezing vertical :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega(t-t_0)} \frac{d\omega}{2\pi} &= \iint_{\mathbb{R}^2} x(\tau) h(t - \tau)^* e^{j\omega(t-\tau-t_0)} d\tau \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t - \tau)^* \delta(t - \tau - t_0) d\tau = x(t - t_0) h(t_0)^* \end{aligned} \quad (16)$$

Ce qui permet de retrouver le signal quand $h(t_0) \neq 0$. Par ailleurs, si $t_0 = 0$ et $h(0) \neq 0$, on obtient :

$$x(t) = \frac{1}{h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (17)$$

Dans le cas où $h(0) = 0$ et $Dh(0) \neq 0$, on peut aussi utiliser la règle de l'Hôpital pour reconstruire x :

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} x(t - t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega(t-t_0)} \frac{d\omega}{2\pi}}{h(t_0)^*} \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t_0} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega(t-t_0)} \frac{d\omega}{2\pi}}{\frac{\partial}{\partial t_0} h(t_0)^*} = \frac{\int_{\mathbb{R}} \omega F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}}{j Dh(0)^*} \end{aligned} \quad (18)$$

Cette dernière expression est similaire à un résultat établi pour la transformée en ondelettes continue [8].

3 Nouvelles formules de synthèse

On souhaite généraliser les nouvelles expressions précédentes des marginales en temps et en fréquence des Eqs. (14) et (18), en remplaçant la fenêtre d'analyse h par des familles de fenêtres modifiées telles que $\mathcal{T}^n h$, $\mathcal{D}^n h$ ou $\mathcal{T}\mathcal{D}^n h$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.1 Généralisations reposant sur la marginale en temps de la TFCT

3.1.1 $\mathcal{T}^n h$

Si on remplace h par $\mathcal{T}^n h$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dans l'Eq. (12), on obtient :

$$F_x(\omega + \omega_0) = \frac{1}{F_{\mathcal{T}^n h}(-\omega_0)^*} \int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{T}^n h}(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt \quad (19)$$

qui permet de retrouver la transformée de Fourier de x quand $\omega_0 = 0$ et $F_{\mathcal{T}^n h(0)} \neq 0$. Si, $F_{\mathcal{T}^n h(0)} = 0$ et $F_{\mathcal{T}^{n+1} h(0)} \neq 0$, on peut utiliser à nouveau la règle de l'Hôpital : $F_x(\omega) =$

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \omega_0} \left[\int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{T}^n h}(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt \right]}{\frac{d}{d\omega_0} [F_{\mathcal{T}^n h}(-\omega_0)^*]} = \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^{\mathcal{T}^n h}(t, \omega) dt}{F_{\mathcal{T}^{n+1} h(0)}^*} \quad (20)$$

3.1.2 $\mathcal{D}\mathcal{T}^n h$

Si on remplace h par $\mathcal{D}\mathcal{T}^n h$ dans l'Eq. (14), le dénominateur fait apparaître $F_{\mathcal{D}\mathcal{T}^n h(0)}^*$ reformulé ainsi (cf. Sect. 2.2) :

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{D}\mathcal{T}^n h}(\omega) &= j \frac{d}{d\omega} [F_{\mathcal{D}\mathcal{T}^n h}(\omega)] = j \frac{d}{d\omega} \left[\omega j^{n+1} \frac{d^n}{d\omega^n} F_h(\omega) \right] \\ &= j^{n+2} \frac{d^n}{d\omega^n} F_h(\omega) + j\omega j^{n+1} \frac{d^{n+1}}{d\omega^{n+1}} F_h(\omega) \\ &= -F_{\mathcal{T}^n h}(\omega) + F_{\mathcal{D}\mathcal{T}^{n+1} h}(\omega). \end{aligned} \quad (21)$$

Donc, si $F_{\mathcal{D}\mathcal{T}^n h(0)} \neq 0$, l'Eq. (20) conduit à :

$$F_x(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^{\mathcal{D}\mathcal{T}^n h}(t, \omega) dt}{F_{\mathcal{D}\mathcal{T}^{n+1} h(0)}^*} = \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^{\mathcal{D}\mathcal{T}^n h}(t, \omega) dt}{F_{\mathcal{D}\mathcal{T}^{n+1} h(0)}^* - F_{\mathcal{T}^n h(0)}^*} \quad (22)$$

3.2 Généralisation basées sur la marginale en fréquence de la TFCT

3.2.1 $\mathcal{D}^n h$

En remplaçant h par $\mathcal{D}^n h(t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ qui lorsque $\mathcal{D}^n h(t_0) \neq 0$, permet d'obtenir :

$$x(t - t_0) = \frac{1}{\mathcal{D}^n h(t_0)^*} \int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{D}^n h}(t, \omega) e^{j\omega(t-t_0)} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (23)$$

Si $\mathcal{D}^n h(0) = 0$ et $\mathcal{D}^{n+1} h(0) \neq 0$, on peut utiliser la règle de l'Hôpital vu que $\frac{d}{dt} [\mathcal{D}^n h(t)] = \mathcal{D}^{n+1} h(t)$, ce qui permet d'écrire :

$$x(t) = \frac{1}{j\mathcal{D}^{n+1} h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} \omega F_x^{\mathcal{D}^n h}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (24)$$

3.2.2 $\mathcal{T}\mathcal{D}^n h$

En remplaçant h par $\mathcal{T}\mathcal{D}^n h$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on remarque :

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{T}\mathcal{D}^n h(t)] = \mathcal{D}^n h(t) + \underbrace{t \mathcal{D}^{n+1} h(t)}_{\mathcal{T}\mathcal{D}^{n+1} h(t)}. \quad (25)$$

Comme $\mathcal{T}\mathcal{D}^n h(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \mathcal{T}\mathcal{D}^n h(t) = \mathcal{D}^n h(0)$. Ainsi, quand $\mathcal{D}^n h(0) \neq 0$, on obtient :

$$x(t) = \frac{1}{j\mathcal{D}^n h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} \omega F_x^{\mathcal{T}\mathcal{D}^n h}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (26)$$

3.3 Relation avec opérateurs de réallocation

3.3.1 Opérateurs complexes $\tilde{t}$ et $\tilde{\omega}$

À partir de l'Eq. (3), on trouve les expressions suivantes qui font apparaître les opérateurs de réallocation complexes :

$$F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega) = (\tilde{\omega}_x(t, \omega) - j\omega) F_x^h(t, \omega) \quad (27)$$

$$F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega) = (t - \tilde{t}_x(t, \omega)) F_x^h(t, \omega) \quad (28)$$

On peut substituer ces expressions dans la formule de synthèse utilisant $\mathcal{D}^n h$ pour $n = 1$ (cf. Eq. (23)). Ainsi, si $\mathcal{D}h(t_0) \neq 0$ et $\mathcal{T}h(t_0) \neq 0$, on a :

$$x(t - t_0) = \frac{1}{\mathcal{D}h(t_0)^*} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\omega}_x(t, \omega) - j\omega) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega(t-t_0)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (29)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{T}h(t_0)^*} \int_{\mathbb{R}} (t - \tilde{t}_x(t, \omega)) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega(t-t_0)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (30)$$

qui permet de reconstruire le signal sans retard pour $t_0 = 0$. Si $\mathcal{D}h(0) = 0$, et $\mathcal{D}^2 h(0) \neq 0$, la règle de l'Hôpital conduit à :

$$x(t) = \frac{1}{j\mathcal{D}^2 h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} \omega (\tilde{\omega}_x(t, \omega) - j\omega) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (31)$$

De même, vu que $\mathcal{T}h(0) = 0$, en remarquant que :

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{T}h(t)] = \frac{d}{dt} [t h(t)] = h(t) + t \mathcal{D}h(t) \quad (32)$$

et donc que $\mathcal{D}\mathcal{T}h(0) = h(0)$, on peut utiliser la règle de l'Hôpital quand $h(0) \neq 0$, ce qui conduit à :

$$x(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} x(t - t_0) = \frac{1}{jh(0)^*} \int_{\mathbb{R}} \omega F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (33)$$

$$= \frac{1}{jh(0)^*} \int_{\mathbb{R}} \omega (t - \tilde{t}_x(t, \omega)) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (34)$$

3.3.2 Opérateurs réels $\hat{t}$ et $\hat{\omega}$

En remplaçant h par $\mathcal{D}h$ dans l'Eq. (17), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) + j \operatorname{Im} \left(\frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) \right) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \left(\frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\quad + j \int_{\mathbb{R}} (\hat{\omega}_x(t, \omega) - \omega) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = x(t) \mathcal{D}h(0)^* \end{aligned} \quad (35)$$

qui vaut 0 quand $\mathcal{D}h(0) = 0$, (eg. pour une fenêtre d'analyse symétrique centrée en 0). De même, en remplaçant h par $\mathcal{T}h$ dans l'Eq. (17), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) + j \operatorname{Im} \left(\frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) \right) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} (t - \hat{t}_x(t, \omega)) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\quad + j \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \left(\frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = x(t) \mathcal{T}h(0)^* = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

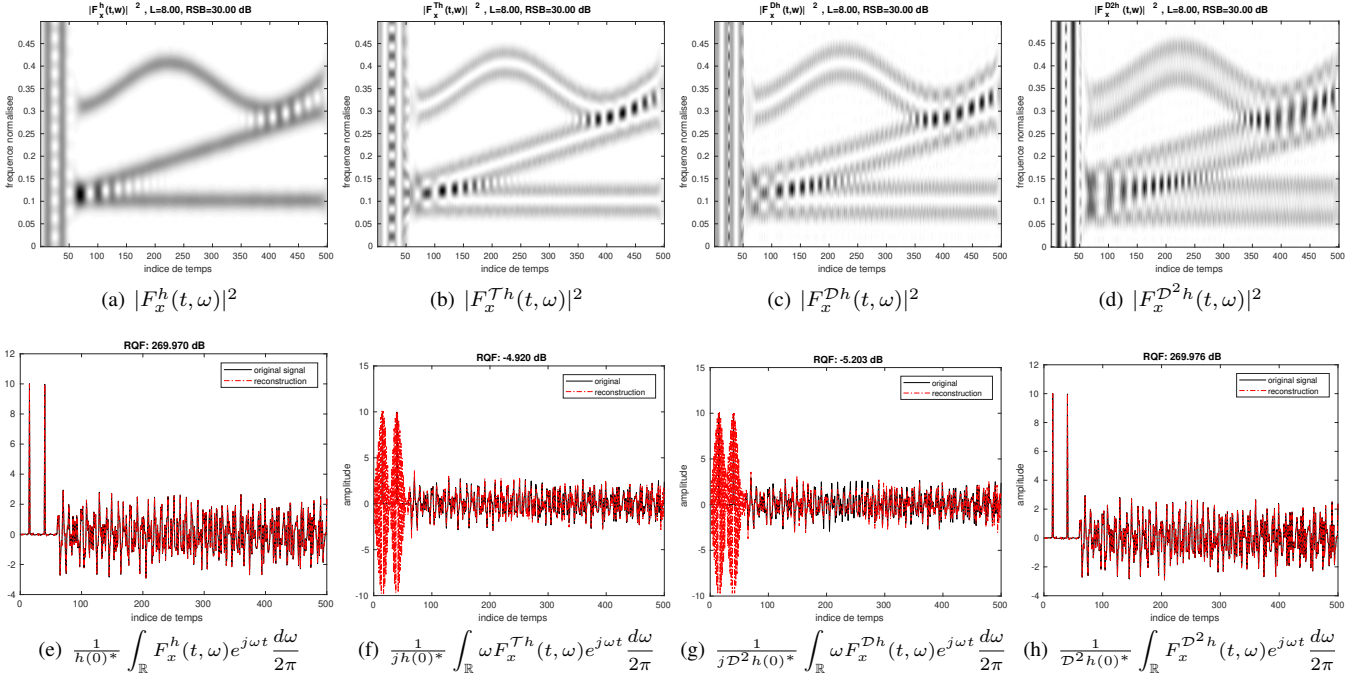


FIGURE 1 : Spectrogrammes utilisant différentes fenêtres d'analyse (a) h , (b) $\mathcal{T}h$, (c) $\mathcal{D}h$ et (d) $\mathcal{D}^2h$. Les signaux correspondants reconstruits avec les formules de synthèse indiquées qui correspondent aux Eqs. (17), (26) pour $n = 0$ et (24) pour $n = 1$.

4 Simulations numériques

Nos simulations réalisées avec la *toolbox* ASTRES [5] et MATLAB considèrent un signal simulé avec 2 impulsions et 3 composantes sinusoïdales, mélangées à un bruit blanc gaussien additif pour un rapport signal sur bruit (RSB) de 30 dB. Les intégrales sont calculées par approximation rectangulaire des expressions obtenues plus haut. Notre implémentation² s'assure de rendre les calculs indépendants de la fréquence d'échantillonnage. Nous choisissons $M = 500$ le nombre d'indices fréquentiels tel que $m \in [-M/2 + 1; M/2]$. Les TFCT obtenues utilisent une fenêtre d'analyse gaussienne $h[n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}L} e^{-\frac{n^2}{2L^2}}$ dont la largeur choisie arbitrairement est $L = 8$. La Figure 1 présente les spectrogrammes calculés avec h , $\mathcal{T}h(t)$, $\mathcal{D}h(t)$ et $\mathcal{D}^2h(t)$. Comme attendu, les TFCT utilisant $h(t)$ et $\mathcal{D}^2h(t)$ sont inversibles via la formule de synthèse classique et obtiennent respectivement une qualité de reconstruction quasi-parfaite avec un $\text{RQF}(x, \hat{x}) = \frac{\|x\|_2^2}{\|x - \hat{x}\|_2^2}$ d'environ 270 dB. Les signaux reconstruits en utilisant la règle de l'Hôpital pour les TFCT $F_x^{\mathcal{T}h}$ et $F_x^{\mathcal{D}h}$ (non inversibles par la formule de synthèse classique), semblent plus instables numériquement avec des problèmes de reconstruction pour les impulsions et les transitoires. Seules les composantes sinusoïdales semblent correctement estimées bien que le RQF global soit très faible (environ -5 dB).

5 Conclusion

Ce travail préliminaire nous a permis de revisiter les propriétés de la Transformée de Fourier à court terme (TFCT) et d'introduire plusieurs formules de synthèse pour reconstruire le signal original en utilisant certaines fenêtres d'analyse particulières. La représentation redondante fournie par la STFT, associée à un espace de Hilbert à noyau auto-reproduisant, dis-

tribue l'information sur le signal dans le plan temps-fréquence. Ainsi, cette représentation non locale permet d'envisager de multiples manières de recombinaison l'information afin d'inverser la STFT. Certaines formules font naturellement apparaître les opérateurs de réallocation. Ces résultats ouvrent la voie au développement de nouveaux outils inspirés du synchrosqueezing pour l'extraction des composantes présentes dans un signal.

Références

- [1] K. ABRATKIEWICZ, P. SAMCZYŃSKI et D. FOURER : A comparison of the recursive and FFT-based reassignment methods in micro-Doppler analysis. *In Proc. IEEE Radar Conference (RadarConf20)*, pages 1–6, 2020.
- [2] F. AUGER, P. FLANDRIN, Y.-T. LIN, S. MCLAUGHLIN, S. MEIGNEN, T. OBERLIN et H.-T. WU : Time-frequency reassignment and synchrosqueezing : An overview. *IEEE Signal Processing Magazine*, 30(6):32–41, 2013.
- [3] D. FOURER et F. AUGER : Synchrosqueezing temporel d'ordre 2 de la transformée de fourier à court terme. *In XXVIIème Colloque francophone de Traitement du Signal et des Images (GRETSI 2019)*, 2019.
- [4] D. FOURER, F. AUGER et P. FLANDRIN : Recursive versions of the Levenberg-Marquardt reassigned spectrogram and of the synchrosqueezed STFT. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 4880–4884, 2016.
- [5] D. FOURER, J. HARMOUCHE, J. SCHMITT, T. OBERLIN, S. MEIGNEN, F. AUGER et P. FLANDRIN : The ASTRES toolbox for mode extraction of non-stationary multicomponent signals. *In Proc. EUSIPCO 2017*, pages 1170–1174, août 2017.
- [6] D. FOURER et G. PEETERS : Fast and adaptive blind audio source separation using recursive Levenberg-Marquardt synchrosqueezing. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 766–770, 2018.
- [7] M. M GANATRA et C. H VITHALANI : A novel morphological feature extraction approach for ECG signal analysis based on generalized synchrosqueezing transform, correntropy function and adaptive heuristic framework in FPGA. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 31(18):2250312, 2022.
- [8] E. LEBEDEVA et E. POSTNIKOV : On alternative wavelet reconstruction formula : a case study of approximate wavelets. *Royal Society Open Science*, 1(2):140124, 2014.
- [9] Q. LEGROS, D. FOURER, S. MEIGNEN et M. COLOMINAS : Instantaneous frequency and amplitude estimation in multicomponent signals using an EM-based algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 72:1130–1140, 2024.
- [10] D.-H. PHAM et S. MEIGNEN : High-order synchrosqueezing transform for multicomponent signals analysis—with an application to gravitational-wave signal. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65(12):3168–3178, 2017.

²<https://github.com/dfourer/STFTmarginals>