Géométrie de l'information et signaux d'énergie finie

Franck FLORIN Antonin BERTRAND

Thales, 525 Route des Dolines Les Bouillides – BP 157, 06903 Sophia Antipolis France

Résumé – Ce travail présente un cas d'application de la Géométrie de l'Information au traitement du signal. Il s'agit d'obtenir une forme explicite de la distance de Rao entre deux lois de probabilités caractérisant les observations de deux signaux d'énergie finie. Cette distance caractérise la dissimilarité des lois et la confusion possible entre les paramètres dans les problèmes d'estimation. On donne un exemple d'utilisation de cet outil pour l'analyse des bases de données.

Abstract – This work presents a case study of applying Information Geometry to signal processing. It involves obtaining an explicit form of the Rao distance between two probability distributions characterizing observations of two finite energy signals. This distance characterizes the dissimilarity of the distributions and the potential confusion between parameters in estimation problems. An example of using this tool for database analysis is provided.

1 Introduction

Un grand nombre d'applications s'intéressent à la réception d'un signal d'énergie finie dans un environnement bruité : télécommunications, sonar, radar, guerre électronique, musique, analyse de la parole, diagnostique de panne, etc. Le plus souvent, on dispose d'informations a priori sur le signal qui prennent une forme paramétrique : le signal observé fait partie d'un ensemble de signaux possibles et ces signaux sont fonctions de paramètres qu'il s'agit d'estimer. L'objectif du récepteur est ainsi d'observer une séquence temporelle et d'estimer les paramètres du signal reçu en présence d'un bruit d'acquisition. Les caractéristiques statistiques du bruit sont en général connues, mais elles ne suffisent pas à supprimer complètement le caractère aléatoire de l'observation.

La géométrie de l'information est une discipline mathématique qui applique la méthodologie de la géométrie différentielle à la statistique. Les lois de probabilité sont considérées comme des points d'une variété différentielle et, dans les problèmes d'estimation paramétrique, les paramètres deviennent le système de coordonnées de cette variété statistique. Dans cette présentation, nous adressons la question de l'estimation des paramètres de signaux d'énergie finie sous l'angle de la géométrie de l'information. Plus particulièrement, nous nous intéressons à la distance de Rao. Obtenir la distance de Rao entre deux lois de probabilités permet de caractériser la dissimilarité des lois et la confusion possible entre les paramètres dans les problèmes d'estimation. Dans le cas de l'observation de signaux d'énergie finie bruités, cette distance permet d'évaluer la proximité statistique des observations. Elle donne ainsi une évaluation de la possibilité de distinguer les paramètres de signaux différents.

Dans la suite, on rappelle les éléments de la géométrie de l'information qui permettent d'évaluer la distance de Rao (section 2). Cette première section permet de montrer le lien entre l'estimation paramétrique et l'information statistique. Dans un second temps, on donne la description du modèle de signal utilisé pour représenter les signaux d'énergie finie (section 3). Puis on calcule la distance de Rao pour ces signaux (section 4). On montre en conclusion qu'il est possible d'utiliser cette approche pour qualifier les bases de données de signaux.

2 Éléments de Géométrie de l'Information

2.1 La métrique de Fisher

Soient $\boldsymbol{x}$ le vecteur des observations et $\boldsymbol{\xi} = \left[\xi^i\right]$ le vecteur, à N coordonnées, des paramètres du signal. Le comportement aléatoire stochastique des observations est décrit par la distribution statistique des observations conditionnelles aux paramètres : $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi})$. L'ensemble de toutes les distributions de probabilité paramétriques, lorsque $\boldsymbol{\xi}$ varie dans un ensemble prédéfini Ξ, constitue un modèle statistique qui peut être vu comme une variété statistique, et la matrice d'information de Fisher induit une métrique riemannienne sur cette variété. Cette métrique, nommée la métrique de Fisher, relie la structure géométrique de cette variété au problème de l'estimation statistique [2]. La matrice d'information de Fisher $[g_{ij}]$, qui définit la métrique, est dérivée de la log-vraisemblance par la formule :

$$g_{ij} = E_{\boldsymbol{\xi}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi^i} \ln p(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi^j} \ln p(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{\xi})\right] \qquad (1)$$

Une question qui découle du problème d'estimation statistique est d'évaluer la dissimilarité entre deux populations $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi_1})$ et $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi_2})$. Par exemple, lorsqu'on considère deux populations statistiques mélangées dans une base de données, elles sont représentées par leurs paramètres respectifs $\boldsymbol{\xi_1}$ et $\boldsymbol{\xi_2}$. Mais en quoi sont-elles différentes ? Serait-il facile de distinguer les deux paramètres ? Bien sûr, une approche simple est de considérer la distance Euclidienne $\| \boldsymbol{\xi_2} - \boldsymbol{\xi_1} \|$ pour évaluer « à quel point » les paramètres diffèrent. Mais cette approche ne fournit aucune information relative au comportement statistique des populations.

2.2 La distance de Rao

La métrique de Fisher permet de définir une distance entre les points de la variété statistique, la distance de Rao. La distance de Rao entre deux points représentés par leurs paramètres respectifs $\boldsymbol{\xi_1}$ et $\boldsymbol{\xi_2}$ est la distance géodésique, c'est-à-dire la longueur du chemin minimal qui relie les points sur la

variété [1, 7]. À partir de l'expression de la courbe géodésique $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\varsigma)$, la distance de Rao entre les points $\boldsymbol{\xi_1} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0)$ et $\boldsymbol{\xi_2} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(1)$ s'exprime par la formule intégrale suivante (on utilise la notation d'Einstein pour les sommes tensorielles) :

$$d(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij} \frac{d\tilde{\xi}^i}{d\varsigma} \frac{d\tilde{\xi}^j}{d\varsigma}} d\varsigma \tag{2}$$

Ainsi, grâce à la métrique de Fisher, il est possible d'évaluer une distance statistique entre deux points. Cette distance fournit une estimation de la dissimilarité entre les deux populations statistiques $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi_1})$ et $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi_2})$. En pratique, obtenir une expression littérale de la distance de Rao n'est malheureusement pas triviale et seules quelques familles de distributions de probabilité mènent à une telle expression [6]. Pour obtenir la distance de Rao, il suffit de disposer de l'expression de la courbe géodésique, mais obtenir celle-ci nécessite quelques étapes.

2.3 La courbe géodésique

La méthode utilisée pour calculer la distance de Rao et la courbe géodésique associée à la métrique de Fisher est expliquée dans plusieurs références [1, 2, 7] et elle est couramment utilisée par la communauté de la géométrie de l'information [6, 10]. Obtenir l'expression de la géodésique nécessite deux étapes. La première étape est le calcul des coefficients de Christoffel qui caractérise la connexion affine entre les plans tangents liés à la géométrie riemannienne sous-jacente et permettent d'exprimer l'équation différentielle de la géodésique. Ces coefficients notés Γ_{ij}^k sont obtenus à partir de la formule :

$$\forall\, m, i, j = 1, ..., N \quad g_{mk}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^m}\right) \tag{3}$$

La deuxième étape est la résolution de l'équation différentielle de la géodésique qui permet d'obtenir la trajectoire à chemin minimal $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\varsigma)$ (avec $\varsigma \in [0, 1]$) entre les deux points considérés $\boldsymbol{\xi_1} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0)$ and $\boldsymbol{\xi_2} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(1)$. Cette étape est réalisée à partir des coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k exprimés dans l'équation différentielle suivante :

$$\forall\, k = 1, ..., N \quad \frac{d^2\xi^k}{d\varsigma^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\xi^i}{d\varsigma}\frac{d\xi^j}{d\varsigma} = 0 \tag{4}$$

Une fois obtenue l'expression de la courbe géodésique, il ne reste plus qu'à l'intégrer sur toute sa longueur pour obtenir la longueur du chemin désiré qui n'est autre que la distance de Rao.

3 Le modèle d'observation

3.1 Le modèle des signaux

Nous examinons les observations après application de la transformée de Fourier. Nous supposons que la transformée de Fourier est observée dans la bande passante du récepteur $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^+$. Ainsi, l'observation prend la forme suivante :

$$\forall \nu \in \mathcal{B} \quad x(\nu) = s_{\boldsymbol{\xi}}(\nu) + n(\nu) \tag{5}$$

Dans cette équation, $x(\nu)$, $s_{\boldsymbol{\xi}}(\nu)$ et $n(\nu)$ sont des nombres complexes. $x(\nu)$ est une fonction de la fréquence ν, et le signal $s_{\boldsymbol{\xi}}(\nu)$ est exprimé en fonction de la fréquence et paramétré par $\boldsymbol{\xi}$. En vertu du théorème de Parseval appliqué aux signaux d'énergie finie, on a la propriété $\int_{\nu\in\mathcal{B}} |s_{\boldsymbol{\xi}}(\nu)|^2 \, d\nu < \infty$.

En regardant les contributions du bruit dans le domaine fréquentiel $n(\nu)$, nous supposons que les composantes du bruit après la transformée de Fourier $n(\nu)$ sont des variables aléatoires gaussiennes circulaires centrées, indépendantes les unes des autres pour chaque fréquence. Cette hypothèse est vraie si le bruit est naturellement gaussien, mais elle est aussi asymptotiquement vraie pour d'autres types de distributions de bruit. À titre d'exemples, des hypothèses plus générales sont mentionnées dans les articles suivants [3, 9].

Nous supposons que les densités spectrales de puissance du bruit sont connues : $\forall \nu \in \mathcal{B} \quad \gamma_0(\nu) = E\left(n(\nu)n^*(\nu)\right)$ (où * désigne le nombre complexe conjugué).

En résumé, l'observation est une variable complexe $x(\nu)$ dans le domaine des fréquences positives après l'application d'une transformée de Fourier, où la fréquence ν appartient à la bande passante d'observation $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^+$. Le vecteur total des observations $\boldsymbol{x}$ est composé de toutes les variables complexes $x(\nu)$ dans la bande passante d'observation : $\boldsymbol{x} = [x(\nu)]_{\nu\in\mathcal{B}}$.

3.2 Le modèle statistique

Les distributions statistiques sont déterminées par les paramètres du signal et les caractéristiques du bruit. Les observations $\boldsymbol{x}$ dépendent des paramètres à travers une loi de probabilité paramétrique, où les paramètres caractérisent le signal :

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi}) = \prod_{\nu\in\mathcal{B}} \frac{1}{\pi\gamma_0(\nu)} \exp\left(-\frac{\|x(\nu) - s_{\boldsymbol{\xi}}(\nu)\|^2}{\gamma_0(\nu)}\right) \tag{6}$$

Le modèle utilisé pour dériver cette expression de la distribution a déjà été appliqué dans des travaux antérieurs concernant la borne inférieure de Cramer-Rao (CRLB) [4].

Cette équation 6 est similaire à l'expression de la distribution gaussienne multivariée telle qu'exprimée dans [10] :

$$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2^{N_\mathcal{B}}\pi^{N_\mathcal{B}}\sqrt{\det\left(\boldsymbol{\Sigma}\right)}} \exp\left(-\frac{\left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu_\xi}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu_\xi}\right)}{2}\right) \tag{7}$$

où :

- $N_\mathcal{B}$ est le nombre de fréquences ν dans $\mathcal{B}$,
- $\boldsymbol{\Sigma} = diag\left(\sigma_0^2(n)\right)$ est une matrice $2N_\mathcal{B} \times 2N_\mathcal{B}$ diagonale telle que :

$$\forall k = 1, ..N_\mathcal{B} \quad \gamma_0(k) = 2\sigma_0^2(2k-1) = 2\sigma_0^2(2k),$$

- $\boldsymbol{X}$ est un vecteur à $2N_\mathcal{B}$ composantes, avec $\forall k = 1, ...N_\mathcal{B}$:

$$X^{2k-1} = Re\left\{x(k)\right\} \text{ et } X^{2k} = Im\left\{x(k)\right\},$$

- $\boldsymbol{\mu_\xi}$ est un vecteur à $2N_\mathcal{B}$ composantes, avec $\forall k = 1, ...N_\mathcal{B}$:

$$\mu^{2k-1} = Re\left\{s_{\boldsymbol{\xi}}\left(k\right)\right\} \text{ et } \mu^{2k} = Im\left\{s_{\boldsymbol{\xi}}\left(k\right)\right\}.$$

3.3 La matrice de Fisher

Pour toutes les fréquences ν dans la bande d'observation $\mathcal{B}$, le signal $s_{\boldsymbol{\xi}}(\nu)$ est un nombre complexe, qui peut être représenté par son amplitude $\rho_{\boldsymbol{\xi}}(\nu)$ et sa phase $\psi_{\boldsymbol{\xi}}(\nu)$:

$$s_{\boldsymbol{\xi}}(\nu) = \rho_{\boldsymbol{\xi}}(\nu) \cdot \exp\left(\imath \psi_{\boldsymbol{\xi}}(\nu)\right) \tag{8}$$

avec $(\imath)^2 = -1$, $\psi_{\boldsymbol{\xi}}(\nu) \in]-\pi, \pi]$, et $\rho_{\boldsymbol{\xi}}(\nu) \in]0, +\infty[$.
En séparant les paramètres liés à l'amplitude $\boldsymbol{\phi}$ et ceux liés à la phase $\boldsymbol{\varphi}$ ($\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\phi}^T, \boldsymbol{\varphi}^T\right)^T$), on peut réécrire l'équation sous la forme suivante :

$$\forall \nu \in \mathcal{B} \quad s_{\boldsymbol{\xi}}(\nu) = \rho_{\boldsymbol{\phi}}(\nu) \cdot \exp\left(\imath \psi_{\boldsymbol{\varphi}}(\nu)\right) \tag{9}$$

Des équations 1, 6 et 9, on peut déduire l'expression de la matrice de Fisher :

$$g_{ij} = \sum_{\nu} \frac{2}{\gamma_0} Re\left\{\partial_i\left[\rho_{\boldsymbol{\phi}} \cdot \exp\left(-\imath\psi_{\boldsymbol{\varphi}}\right)\right] \partial_j\left[\rho_{\boldsymbol{\phi}} \cdot \exp\left(\imath\psi_{\boldsymbol{\varphi}}\right)\right]\right\}$$

Le calcul montre (cf. [4, 5]) que cette matrice est diagonale par blocs :

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} [g_{uv}] & [0] \\ [0] & [g_{qr}] \end{pmatrix}$$

Dans cette écriture, les paramètres ϕ sont indicés par u (et v) et les paramètres φ sont indicés par q (et r).

4 Le calcul de la distance de Rao

4.1 Influence de la métrique de Fisher

Compte tenu de la structure diagonale par bloc de la matrice de Fisher, on est en droit de se demander si les coefficients de Christoffel Γ^k_{ij} correspondants à la métrique $[g_{ij}]$ peuvent se déduire de ceux induits par les métriques des blocs $[g_{uv}]$ et $[g_{qr}]$.

La réponse est positive lors que les dérivées croisées des coefficients de la matrice de Fisher sont nuls, c'est-à-dire lorsque : $\frac{dg_{uv}}{d\xi^q} = 0$ et $\frac{dg_{qr}}{d\xi^u} = 0$.

Malheureusement cette propriété n'est que partiellement vérifiée dans notre cas, car si les dérivées des coefficients du premier bloc par rapport aux coordonnées du second sont bien nulles :

$$\frac{dg_{uv}}{d\xi^q} = \frac{dg_{uv}}{d\varphi^q} = \partial_q g_{uv} = 0 \tag{10}$$

les dérivées des coefficients du deuxième bloc par rapport aux coordonnées du premier ne le sont pas dans le cas général :

$$\frac{dg_{qr}}{d\xi^u} = \partial_u g_{rq} = \sum_{\nu} \frac{4}{\gamma_0} \rho_{\boldsymbol{\phi}} \cdot \partial_u \rho_{\boldsymbol{\phi}} \cdot \partial_q \psi_{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \partial_r \psi_{\boldsymbol{\varphi}} \tag{11}$$

Ainsi, l'estimation des paramètres de phase est influencée par les paramètres d'amplitude, alors que les paramètres de phase (qui disparaissent avec le module) n'influencent pas l'estimation des paramètres d'amplitude.

4.2 Les solutions géodésiques

On peut montrer (cf. [5]) que les équations de la géodésique peuvent s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire nulle des gradients :

$$\sum_{\nu} \frac{2}{\gamma_0} \left(\frac{d^2 \rho_{\boldsymbol{\phi}}}{d\varsigma^2} - \rho_{\boldsymbol{\phi}} \left(\frac{d\psi_{\boldsymbol{\varphi}}}{d\varsigma} \right)^2 \right) \nabla_{\boldsymbol{\phi}} \rho_{\boldsymbol{\phi}} = [\mathbf{0}] \tag{12}$$

$$\sum_{\nu} \frac{2}{\gamma_0} \left(\rho^2_{\boldsymbol{\phi}} \frac{d^2 \psi_{\boldsymbol{\varphi}}}{d\varsigma^2} + 2\rho_{\boldsymbol{\phi}} \frac{d\rho_{\boldsymbol{\phi}}}{d\varsigma} \frac{d\psi_{\boldsymbol{\varphi}}}{d\varsigma} \right) \nabla_{\boldsymbol{\varphi}} \psi_{\boldsymbol{\varphi}} = [\mathbf{0}] \tag{13}$$

Ces équations permettent d'introduire un modèle paramétrique. Le calcul de leurs solutions conduit à l'équation de la courbe géodésique qui s'exprime par des fonctions $\tilde{\rho}_{\boldsymbol{\phi}}(\varsigma)$ et $\tilde{\psi}_{\boldsymbol{\varphi}}(\varsigma)$ solutions des équations géodésiques 12 et 13.

À partir de ces fonctions, la distance de Rao dans la variété décrite par les paramètres $\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\phi}^T, \boldsymbol{\varphi}^T\right)^T$ est obtenue par la formule :

$$d_{L2,\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{\nu} \frac{2}{\gamma_0} \left(\left(\frac{d\tilde{\rho}_{\boldsymbol{\phi}}}{d\varsigma} \right)^2 + \left(\tilde{\rho}_{\boldsymbol{\phi}} \frac{d\tilde{\psi}_{\boldsymbol{\varphi}}}{d\varsigma} \right)^2 \right)} d\varsigma \tag{14}$$

4.3 Le cas des signaux d'énergie finie

D'après [8] et [10], on sait que, dans la variété de dimension $2N_{\mathcal{B}}$ composée de distributions normales multivariées avec une matrice de covariance commune $\boldsymbol{\Sigma}$, la distance de Fisher-Rao entre deux distributions paramétrées respectivement par $\boldsymbol{\mu_{\xi_1}}$ et $\boldsymbol{\mu_{\xi_2}}$ est égale à la distance de Mahalanobis :

$$d_M\left(\boldsymbol{\mu_{\xi_1}}, \boldsymbol{\mu_{\xi_2}}\right) = \sqrt{\left(\boldsymbol{\mu_{\xi_2}} - \boldsymbol{\mu_{\xi_1}}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\boldsymbol{\mu_{\xi_2}} - \boldsymbol{\mu_{\xi_1}}\right)} \tag{15}$$

Avec la notation des équations 7 et 8 et sur la base de la définition 15, la distance de Mahalanobis correspond à la distance de Fisher-Rao dans la variété L2 des signaux d'énergie finie. Elle peut être obtenue par la formule suivante :

$$\begin{aligned} &\left(d_{L2}\left(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}\right)\right)^2 \\ &= \sum_{\nu} \frac{2}{\gamma_0(\nu)} \left(\left(\rho_{\boldsymbol{\xi_2}}(\nu)\right)^2 + \left(\rho_{\boldsymbol{\xi_1}}(\nu)\right)^2 \right) \\ &- \sum_{\nu} \frac{4}{\gamma_0(\nu)} \rho_{\boldsymbol{\xi_2}}(\nu) \cdot \rho_{\boldsymbol{\xi_1}}(\nu) \cdot \cos\left(\psi_{\boldsymbol{\xi_2}}(\nu) - \psi_{\boldsymbol{\xi_1}}(\nu)\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Lorsque les signaux ont des lois de phases différentes, dont la différence varie très vite dans la bande, les contributions des différences de phases se compensent et la somme des cosinus s'annule. Dans ce cas la distance de Rao peut être approchée par la formule :

$$\begin{aligned} &d_{L2}\left(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}\right) \\ &\approx \sqrt{\sum_{\nu} \frac{2}{\gamma_0(\nu)} \left(\left(\rho_{\boldsymbol{\xi_2}}(\nu)\right)^2 + \left(\rho_{\boldsymbol{\xi_1}}(\nu)\right)^2 \right)} \end{aligned} \tag{17}$$

C'est le cas par exemple de deux signaux à large bande, séparés par un important retard.

Dans le cas de deux signaux identiques, séparés par un retard $\Delta\tau$, la distance de Fisher devient :

$$d_{L2}\left(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}\right) = \sqrt{\sum_{\nu} \frac{2\left(\rho_{\boldsymbol{\xi}}(\nu)\right)^2}{\gamma_0(\nu)} \cdot 2\left(1 - \cos(\nu\Delta\tau)\right)} \tag{18}$$

La distance s'annule lorsque le retard $\Delta\tau$ tend vers zéro :

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} d_{L2}\left(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}\right) = 0 \tag{19}$$

Lorsque deux signaux disposent de la même loi de phase, la distance de Rao ne dépend plus que de la différence de leurs amplitudes :

$$d_{L2}\left(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}\right) = \sqrt{\sum_{\nu} \frac{2}{\gamma_0\left(\nu\right)} \left(\rho_{\boldsymbol{\xi_2}}\left(\nu\right) - \rho_{\boldsymbol{\xi_1}}\left(\nu\right)\right)^2} \quad (20)$$

On remarque aussi que, lorsque deux signaux ont des bandes de fréquences séparées, leur distance de Rao est égale à la somme quadratique de leurs rapports signal-à-bruit :

$$d_{L2}\left(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}\right) = \sqrt{\sum_{\nu \in \mathcal{B}_2} \frac{2\left(\rho_{\boldsymbol{\xi_2}}\left(\nu\right)\right)^2}{\gamma_0\left(\nu\right)} + \sum_{\nu \in \mathcal{B}_1} \frac{2\left(\rho_{\boldsymbol{\xi_1}}\left(\nu\right)\right)^2}{\gamma_0\left(\nu\right)}} \quad (21)$$

À titre d'exemple, on peut tracer la distance de Rao de deux signaux d'énergie finie de mêmes amplitudes et phases en fonction de leur retard. On suppose pour simplifier que le rapport signal à bruit est constant dans la bande et que la bande est $\mathcal{B} = \left[\nu_0 - \frac{B}{2}, \nu_0 + \frac{B}{2}\right]$. La formule 16 devient :

$$d_{L2}\left(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}\right) = \sqrt{2RSB}\sqrt{1 - \frac{\sin\left(\pi B \Delta\tau\right)}{\pi B \Delta\tau} \cos\left(2\pi\nu_0 \Delta\tau\right)} \quad (22)$$

On donne un exemple figure 1.

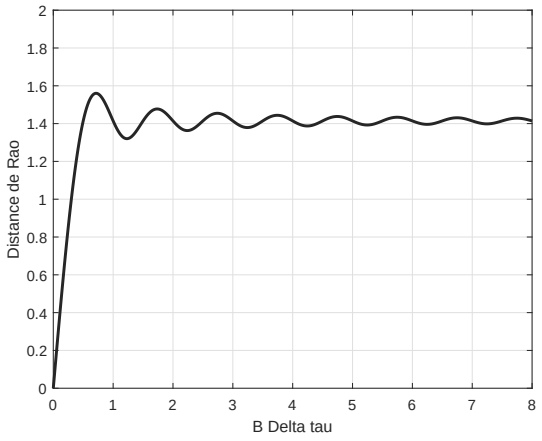

FIGURE 1 : Distance de Rao en fonction du produit $B\Delta\tau$ pour $\nu_0 = B/2$ et $RSB = 1$

5 Conclusion

On a calculé la distance de Rao $d_{L2}\left(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}\right)$ entre deux signaux d'énergie finie observés dans un même canal bruité et dans une bande d'observation fixée $\mathcal{B}$. On s'est intéressé au cas général dans lequel les signaux peuvent varier librement dans l'ensemble des signaux d'énergie finie (noté ensemble L2 des fonctions de carrés sommables), mais on a aussi donné les équations géodésiques qui permettent d'introduire des contraintes supplémentaires sur les paramètres afin d'obtenir des distances sur des sous-variétés correspondantes. Il faut remarquer que les distances dans ces sous-variétés seront nécessairement plus grandes que dans la variété L2, les sous-variétés n'étant pas nécessairement des sous-variétés géodésiques.

Dans le cas général, on a donné l'expression de la distance de Rao et on a donné un exemple de calcul de distance entre un signal et sa copie retardée d'un retard $\Delta\tau$. La formule générale obtenue permet de mesurer une distance entre deux signaux d'énergie finie quelconques d'une base de données en tenant compte du niveau de bruit d'observation. Lorsqu'une base de données sert de base d'apprentissage pour la classification de signaux par exemple, le calcul de la distance de Rao entre les signaux permet d'évaluer la complexité de la tâche de classification ou de discrimination des signaux, les signaux les plus proches étant difficiles à discriminer au sens statistique. Ces travaux ouvrent la voie à des études complémentaires dans le cadre de l'analyse topologique des bases de données de signaux d'énergie finie.

Références

[1] S. I. AMARI : *Information Geometry and Its Applications*. Springer Japan, Tokyo, 2016.

[2] S. I. AMARI et H. NAGAOKA : *Methods of Information Geometry*. AMS, Providence, R.I., 2000.

[3] D. BRILLINGER : Asymptotic normality of finite Fourier transforms of stationary generalized processes. *Journal of multivariate analysis*, 12:64–71, 1982.

[4] F. FLORIN : On Fisher information matrix, array manifold geometry and time delay estimation. *In* F. NIELSEN et F. BARBARESCO, éditeurs : *Geometric Science of Information, GSI 2023*, pages 307–317, Cham, 2023. Springer Nature Switzerland.

[5] F. FLORIN : Fisher-Rao distances between finite energy signals in noise, 2025. https ://arxiv.org/abs/2505.14611, preprint, submitted to the journal of Information Geometry (Springer).

[6] H. MIYAMOTO, F. MENEGHETTI, J. PINELE et S. COSTA : On closed-form expressions for the Fisher-Rao distance. *Information Geometry*, 7(2):311–354, 2024.

[7] F. NIELSEN : An elementary introduction to information geometry. *Entropy*, 10(22):1100, 2020.

[8] F. OPITZ : Information geometry and its applications. *In Proceedings of the 9th European Radar Conference*, pages 46–49, Amsterdam, The Netherlands, 2012.

[9] M. PELIGRAD et W. B. WU : Central limit theorem for Fourier transforms of stationary processes. *The Annals of Probability*, 38(5):2009–2022, 2010.

[10] J. PINELE, J. E. STRAPASSON et S. COSTA : The Fisher-Rao distance between multivariate normal distributions : Special cases, bounds and applications. *Entropy*, 22(4): 404, 2020.