

# Décomposition de signaux bivariés en somme d'ellipses amorties

Philippe FLORES<sup>1</sup> Julien FLAMANT<sup>2</sup> Pierre-Olivier AMBLARD<sup>1</sup> Nicolas LE BIHAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CNRS, Université Grenoble Alpes, Grenoble INP, GIPSA-lab, 11 Rue des Mathématiques, Saint-Martin-d'Hères, France

<sup>2</sup>Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

**Résumé** – Cet article présente SONATA : une méthode de décomposition de signaux bivariés en somme d'ellipses amorties. Les ellipses considérées possèdent des caractéristiques géométriques constantes au cours du temps et une dynamique temporelle sur leur amplitude et leur phase. L'approche proposée utilise (i) l'approximation de rang faible structurée pour la dynamique des ellipses ; et (ii) le plongement quaternionique pour encoder la géométrie des ellipses. Nous illustrons SONATA par un exemple d'approximation de la partie *ringdown* d'un signal correspondant à l'onde gravitationnelle émise lors de la fusion d'étoiles massives.

**Abstract** – This paper presents SONATA: a method that decomposes bivariate signals as a sum of damped ellipses. These ellipses are defined both with geometrical characteristics, fixed in time ; and with dynamics on their amplitude and phase. The proposed approach uses (i) structured low-rank approximation for ellipses dynamics estimation ; and (ii) quaternion-embedding to encode ellipses geometry. SONATA is illustrated on the approximation of the ringdown part of a gravitational wave emitted during a compact binary merger.

## 1 Introduction

Les signaux bivariés sont présents dans une grande variété d'applications comme la sismologie [1], l'optique [2] ou encore l'astronomie gravitationnelle [3]. En particulier, ces signaux permettent de modéliser des phénomènes ondulatoires polarisés. L'information de polarisation traduit géométriquement les corrélations entre les composantes d'un signal bivarié. Dans les applications mentionnées, la polarisation contient des informations uniques sur la source des ondes et/ou sur le milieu traversé par celles-ci. Tenir compte de la polarisation dans l'analyse enrichit donc le contenu informationnel traité et autorise à prendre en compte une propriété pouvant être discriminante (nature de la source, effet du milieu de propagation, démixage, etc).

Classiquement, un signal bivarié peut être considéré comme un signal à valeurs complexes. Cette représentation permet d'encoder algébriquement la géométrie du signal bivarié. Dans le cas des signaux non-stationnaires, l'équivalent du signal analytique pour les signaux univariés est le plongement quaternionique des signaux bivariés [4]. L'utilisation de ce plongement permet d'accéder aux observables physiques d'intérêt – c'est à dire la polarisation – d'un signal bivarié via une paramétrisation algébrique [4].

Parmi les outils classiques du traitement du signal, un certain nombre ont été étendus aux cas polarisé ou bivarié (via des modèles quaternioniques) comme par exemple MUSIC [5], ESPRIT [6] ; voir aussi [7] pour d'autres exemples. Cependant, concernant les approches de rang faible structurées, leur application aux signaux bivariés se limite à une *Singular Spectrum Analysis* complexe ou SSA-complexe [8]. Cette méthode utilise un modèle de mélange d'ellipses amorties comme une somme de deux composantes complexes (aussi appelées *rotary components* en océanographie [9]). La SSA-complexe néces-

site par contre une étape délicate d'appariement de composantes afin d'obtenir la décomposition d'un signal bivarié en atomes polarisés. Nous proposons une approche alternative ici ne nécessitant pas ce type de post-traitement.

Dans cet article, nous introduisons SONATA (*damped ellipse decomposition for bivariate signals*), qui décompose un signal bivarié polarisé (vu comme une série temporelle quaternionique) en une somme d'atomes, en l'occurrence des ellipses amorties. La représentation quaternionique de SONATA permet de décomposer directement un signal bivarié en une somme de modes polarisés. La Section 2 présente les signaux bivariés et leur plongement quaternionique, ainsi que le modèle de mélange d'ellipses amorties. L'algorithme SONATA est introduit en Section 3. Les performances de notre approche sont étudiées sur des données synthétiques en Section 4. Un exemple d'application aux ondes gravitationnelles émises lors la fusion de compacts binaires, générant des signaux pouvant être modélisés comme une somme de modes polarisés, conclut la partie simulation.

**Notations** On note par  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  les nombres réels et complexes. On définit par  $\mathbb{H}$  le corps des quaternions tels que  $\mathbb{H} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$  où  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sont des nombres imaginaires purs ( $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$  et tels que  $\mathbf{ijk} = -1$ ). Pour  $\mu \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , on définit  $\mathbb{C}_\mu = \{a + b\mu \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$ .

## 2 Modèle de signaux bivariés

Un signal bivarié discret est défini par deux séries temporelles  $\{u[n], v[n]\}_{n=0}^{N-1}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Ce signal peut être mis sous la forme complexe  $z[n] = u[n] + \mathbf{i}v[n] \in \mathbb{C}_\mathbf{i}$  pour  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . L'analyse des propriétés instantanées (amplitude, phase, polarisation) de ce signal bivarié repose sur la notion de plongement quaternionique : une extension hypercomplexe du signal analytique au cas bivarié proposée dans [4]. Le plongement quaternionique du signal  $z[n] \in \mathbb{C}_\mathbf{i}$

Recherche financée par le projet ANR RICOCHET (ANR-21-CE48-0013). Les auteurs souhaitent remercier chaleureusement Éric Chassande-Mottin et Pierre Palud pour leur implication.

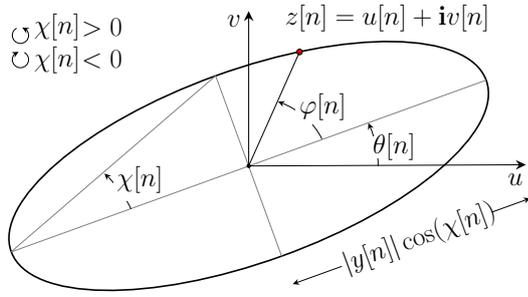


FIGURE 1 : Représentation d'un signal bivarié  $z[n]$  élémentaire et de sa géométrie obtenue par la forme polaire de son plongement quaternionique  $y[n]$ .

est donné par  $y[n] = \mathcal{A}(u[n]) + \mathbf{i}\mathcal{A}(v[n]) \in \mathbb{H}$  avec  $\mathcal{A}(\cdot)$  le signal analytique usuel, calculé dans  $\mathbb{C}_j$ . Le signal  $y[n]$  peut être décomposé de manière unique sous la forme polaire quaternionique  $y[n] = |y[n]|e^{i\theta[n]}e^{-\mathbf{k}\chi[n]}e^{j\phi[n]}$ , faisant apparaître une amplitude et trois angles, pouvant s'interpréter comme suit. Pour un signal bivarié élémentaire, les paramètres  $|y[n]|$  et  $\phi[n]$  encodent respectivement l'amplitude et la phase instantanée du signal  $z[n]$ , tandis que les angles  $\theta[n]$  et  $\chi[n]$  décrivent l'ellipse de polarisation instantanée. La Figure 1 illustre cette interprétation : en particulier  $\theta[n] \in [-\pi/2, \pi/2]$  donne l'orientation instantanée de l'axe principal de l'ellipse, tandis que  $\chi[n] \in [-\pi/4, \pi/4]$  correspond à son ouverture.

## 2.1 Modèle de mélange d'ellipses

Dans la suite, on considère un modèle de signaux bivariés pouvant être décrits par une somme d'ellipses amorties, c'est à dire une somme de signaux bivariés élémentaires d'ellipse de polarisation constante au cours du temps (i.e., à  $\theta[n], \chi[n]$  constants). Pour ce type de signaux, le plongement quaternionique peut s'écrire

$$y[n] = \sum_{r=1}^R \rho_r e^{-d_r n} e^{i\theta_r} e^{-\mathbf{k}\chi_r} e^{j(\omega_r n + \varphi_r)} \quad (1)$$

où  $\{\rho_r, \theta_r, \chi_r, \varphi_r\}$  sont les paramètres géométriques décrivant la forme de la  $r$ -ième ellipse :  $\rho_r$  est le module,  $\theta_r$  l'orientation de l'axe principal,  $\chi_r$  l'ouverture et  $\varphi_r$  la phase initiale. Les paramètres restants concernent la dynamique des ellipses :  $d_r \geq 0$  l'amortissement et  $\omega_r$  la pulsation. Un exemple d'ellipse amortie est présentée en Figure 2. La séparation en deux catégories de paramètres (géométriques et dynamiques) permet d'écrire les composantes (1) sous la forme de produits de termes quaternioniques et à valeurs complexes  $\mathbb{C}_j$  de la façon suivante :

$$y[n] = \sum_{r=1}^R q_r \mu_r^n,$$

où  $q_r = \rho_r e^{i\theta_r} e^{-\mathbf{k}\chi_r} e^{j\varphi_r} \in \mathbb{H}$  contient les paramètres géométriques et  $\mu_r = e^{-d_r} e^{j\omega_r} \in \mathbb{C}_j$  contient les paramètres dynamiques. Si on définit le vecteur ligne  $\mathbf{y} = [y[0] \ \dots \ y[N-1]] \in \mathbb{H}^{1 \times N}$  (de même avec  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^{1 \times R}$  et  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}_j^{1 \times R}$ ), l'équation (1) devient :

$$\mathbf{y} = \mathbf{q}\mathcal{V}(\boldsymbol{\mu}), \quad (2)$$

où  $\mathcal{V}(\boldsymbol{\mu})$  est une matrice de Vandermonde de taille  $R \times N$  contenant les puissances  $\{\mu_r^n\}_{n=1}^{N-1}$  pour  $r = 1, \dots, R$ .

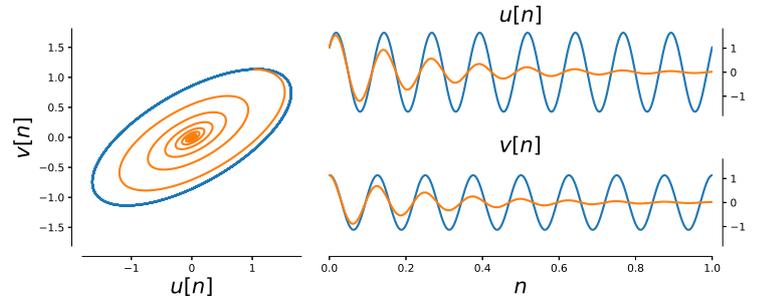


FIGURE 2 : Deux ellipses amorties (non bruitées) partageant les mêmes paramètres géométriques ( $\rho_r, \theta_r, \chi_r, \varphi_r$ ) : orange avec amortissement ( $d_r > 0$ ) et bleue sans amortissement ( $d_r = 0$ ).

Le modèle (2) est donc une somme de  $R$  composantes harmoniques complexes, chacune multipliée par une constante à valeur dans  $\mathbb{H}$  (i.e. une partie géométrique qui contient une information s'apparentant à de la polarisation). Ici, nous proposons l'identification des composantes d'un tel mélange grâce à une approximation de rang faible de type SLRA (Structured Low-Rank Approximation) [10] spécialement construite pour identifier les ellipses amorties du modèle (1).

## 3 L'algorithme SONATA

L'approche proposée consiste à estimer les paramètres géométriques  $\mathbf{q}$  et dynamiques  $\boldsymbol{\mu}$  du modèle (2) à partir d'observations bruitées d'un plongement quaternionique  $\mathbf{y}$ . Sous hypothèse de bruit additif gaussien non-polarisé, l'estimation de ces paramètres peut être formulée comme le problème d'optimisation suivant :

$$(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \underset{\mathbf{q} \in \mathbb{H}^{1 \times R}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}_j^{1 \times R}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{q}\mathcal{V}(\boldsymbol{\mu})\|_2^2. \quad (3)$$

Nous proposons de résoudre (3) avec une approche itérative alternée. Premièrement, la  $(k+1)$ -ème mise à jour de  $\mathbf{q}$ , notée  $\mathbf{q}^{(k+1)}$ , est obtenue. Ensuite, la mise à jour de  $\boldsymbol{\mu}$  notée  $\boldsymbol{\mu}^{(k+1)}$  est calculée. Nous décrivons dans les sections suivantes les différentes étapes de SONATA, résumées dans l'Algorithme 1.

### 3.1 Mise à jour des paramètres géométriques

Mettre à jour  $\mathbf{q}$  revient à résoudre le sous-problème d'optimisation suivant :

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \underset{\mathbf{q} \in \mathbb{H}^{1 \times R}}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathbf{y} - \mathbf{q}\mathcal{V}(\boldsymbol{\mu}^{(k)}) \right\|_2^2, \quad (4)$$

qui est en fait un problème des moindres carrées à valeurs dans  $\mathbb{H}$  dont la solution explicite est connue [7, Table II] :

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{y}\mathcal{V}(\boldsymbol{\mu}^{(k)})^\dagger$$

où la notation  $\mathbf{V}^\dagger$  dénote une pseudo-inverse de  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}_j^{R \times N}$ .

### 3.2 Mise à jour des paramètres dynamiques

Pour estimer les paramètres dynamiques, nous proposons d'estimer alternativement chacune des entrées  $\mu_r$  de  $\boldsymbol{\mu}$ . En effet, les  $R$  composantes dynamiques ne peuvent pas être obtenues

directement du fait de la présence des coefficients  $q_r$  qui ne sont pas les mêmes pour chaque composante. En considérant chaque  $\mu_r$  séparément, il est possible de se ramener à un sous-problème d'optimisation dans  $\mathbb{C}_j$ . Pour ce faire, soit  $\tilde{y}_r$  le signal résiduel défini comme :

$$\tilde{y}_r[n] = y[n] - \sum_{s < r} q_s^{(k+1)} \mu_s^{(k+1)^n} - \sum_{s > r} q_s^{(k+1)} \mu_s^{(k)^n}. \quad (5)$$

Le signal résiduel suit alors un modèle d'ellipse amortie bruitée. En effet, si on admet que tous les paramètres de (1) sont connus sauf  $\mu_r$  (c'est-à-dire  $\mathbf{q}$  et  $\{\mu_s\}_{s \neq r}$ ), les équations (1) et (5) donnent :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_r = q_r \begin{bmatrix} 1 & \mu_r & \cdots & \mu_r^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

c'est-à-dire que  $\tilde{\mathbf{Y}}_r$  correspond à une seule ellipse amortie lorsque tous les autres paramètres sont connus.

Cette observation suggère la stratégie de reconstruction suivante. Soit  $\tilde{\mathbf{Y}}_r \in \mathbb{H}^{L \times K}$  la matrice Hankel du signal résiduel telle que pour  $L > 0$  et  $K = N - L + 1$  ses anti-diagonales soient constantes

$$\tilde{\mathbf{Y}}_r = \begin{bmatrix} \tilde{y}_r[0] & \tilde{y}_r[1] & \cdots & \tilde{y}_r[L-1] & \cdots & \tilde{y}_r[K-1] \\ \tilde{y}_r[1] & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_r[L-1] & \cdots & \cdots & \tilde{y}_r[K-1] & \cdots & \tilde{y}_r[N-1] \end{bmatrix}$$

Dans un cas idéal, l'équation (6) garantit que la matrice  $q_r^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}_r$  soit  $\mathbb{C}_j$ -complexe et de rang 1 puisqu'elle représente une relation linéaire de récurrence d'ordre 1 [11]. Nous proposons alors de mettre à jour  $\mu_r$  par la résolution d'un problème de SLRA de rang 1 complexe :

$$\min_{\mathbf{H} \in \mathbb{C}_j^{L \times K}} \left\| \mathbf{H} - P_{\mathbb{C}_j} \left\{ q_r^{(k+1)} \tilde{\mathbf{Y}}_r \right\} \right\|_F^2 \quad (7)$$

tel que  $\mathbf{H}$  est une matrice Hankel de rang 1.

Dans (7),  $P_{\mathbb{C}_j}\{\cdot\}$  projette chaque entrée d'une matrice sur  $\mathbb{C}_j$ , soit  $P_{\mathbb{C}_j}\{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}\} = a + c\mathbf{j}$ . Cette projection permet de restreindre la mise à jour de  $\mu_r$  (un  $\mathbb{C}_j$ -complexe) à un problème dans  $\mathbb{C}_j$ . Pour terminer, le problème (7) est résolu en appliquant les itérations de Cadzow [11], qui consistent à alterner entre une SVD tronquée et une projection sur l'espace des matrices de Hankel (par moyennage des anti-diagonales).

L'Algorithme 1 présente un résumé des étapes de SONATA.

---

#### Algorithme 1 : SONATA

**Entrée :**  $\mathbf{y}$ ,  $R$ ,  $L$

**Initialisation :**  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}_j^{1 \times R}$  aléatoire

**Tant que** la convergence n'est pas atteinte

$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{y} \mathcal{V}(\boldsymbol{\mu})^\dagger \rightarrow$  Moindres carrés quaternioniques (4)

**Pour**  $r \in \llbracket 1, R \rrbracket$  :

$\tilde{y}_r[n] = y[n] - \sum_{s \neq r}^R q_s \mu_s^n \rightarrow$  Signal résiduel

$\mu_r \leftarrow$  Itérations de Cadzow (7)

**Résultat :**  $\mathbf{q}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$

---

## 4 Expériences numériques

### 4.1 Données synthétiques

Pour illustrer le comportement de SONATA, 200 mélanges d'ellipses (2) sont générés pour des rangs  $R \in \{1, 2, 3, 5, 10\}$

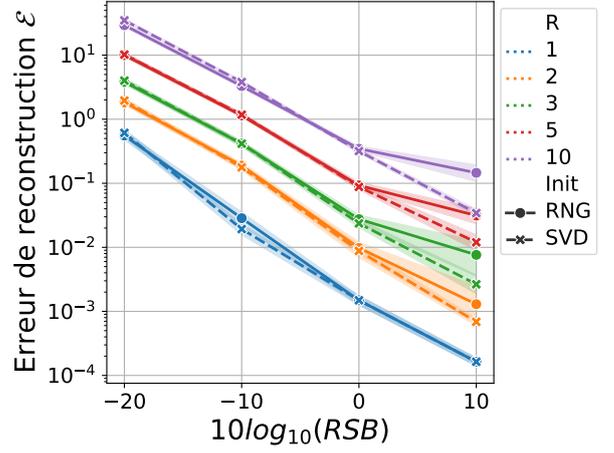


FIGURE 3 : Erreur de reconstruction  $\mathcal{E}$  (9) de SONATA avec initialisation aléatoire (RNG) et  $\mathbb{H}$ -SVD en fonction du RSB pour différentes valeurs de  $R$ .

et différentes valeurs de *Rapport Signal à Bruit*  $\text{RSB}_{\text{dB}} \in \{-20, -10, 0, 10\}$ , défini ici par  $\text{RSB} = \|\mathbf{q} \mathcal{V}(\boldsymbol{\mu})\|_2^2 / \|\mathbf{b}\|_2^2$ , avec  $\mathbf{b}$  un bruit additif gaussien non-polarisé. Les séries temporelles considérées sont de taille  $N = 512$ , et les paramètres géométriques et dynamiques (voir le modèle (1)) des signaux sont tirés aléatoirement et uniformément sur les intervalles suivants :  $\rho_r \in [0.2, 2]$ ,  $\theta_r \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\chi_r \in [-\pi/4, \pi/4]$ ,  $\phi_r \in [0, 2\pi]$ ,  $d_r \in [1, 10]$  et  $\omega \in [8, 64]$  (on considère ici des pulsations réduites).

Pour les paramètres de SONATA, les matrices Hankel sont construites avec  $L = 128$  lignes ; un maximum de 5 itérations de Cadzow est fixé ainsi qu'un critère d'arrêt  $\varepsilon_{\text{in}} = 10^{-4}$  sur les mises à jours de  $\mu_r$ . SONATA s'arrête soit lorsque  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\mathbf{q}$  ont convergé pour  $\varepsilon_{\text{out}} = 10^{-6}$  soit après 50 itérations. Dans cette expérience,  $R$  est considéré connu. Le problème du choix de  $R$  est laissé pour de futurs travaux. Enfin, nous proposons d'étudier deux initialisations pour  $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$  dans SONATA : une première aléatoire et une seconde utilisant la  $\mathbb{H}$ -SVD [12]. Après avoir calculé la  $\mathbb{H}$ -SVD de la matrice Hankel  $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{L \times K}$  du signal  $\mathbf{y}$ ,  $R$  composantes  $\{y_r\}_{r=1}^R$  sont obtenues comme les vecteurs singuliers gauches de  $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{L \times K}$ . Leur expression, comme vecteurs à valeurs dans  $\mathbb{H}$  est donnée par :

$$y_r[n] = a_r[n] e^{i\theta_r[n]} e^{-\mathbf{k}\chi_r[n]} e^{\mathbf{j}\phi_r[n]}. \quad (8)$$

Il est ensuite possible d'obtenir une estimation initiale  $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$  grâce aux paramètres de l'expression (8) comme :

$$\mu_r^{(0)} = \frac{a_r[1]}{a_r[0]} e^{\mathbf{j}(\phi_r[1] - \phi_r[0])}, \quad r = 1, \dots, R.$$

L'utilisation de cette valeur pour initialiser SONATA est comparée à une initialisation aléatoire sur la Figure 3. L'erreur de reconstruction utilisée est la suivante :

$$\mathcal{E} = \|\mathbf{q} \mathcal{V}(\boldsymbol{\mu}) - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{V}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\|_2^2. \quad (9)$$

Les courbes d'erreur de reconstruction de la Figure 3 sont données en fonction du RSB. On y constate l'apport de l'initialisation par  $\mathbb{H}$ -SVD, et ce particulièrement à haut RSB, ainsi qu'une meilleure reconstruction dans le cas des mélanges avec rangs  $R$  faibles. Ces caractéristiques démontrent l'intérêt de SONATA pour les mélanges d'ellipses amorties.

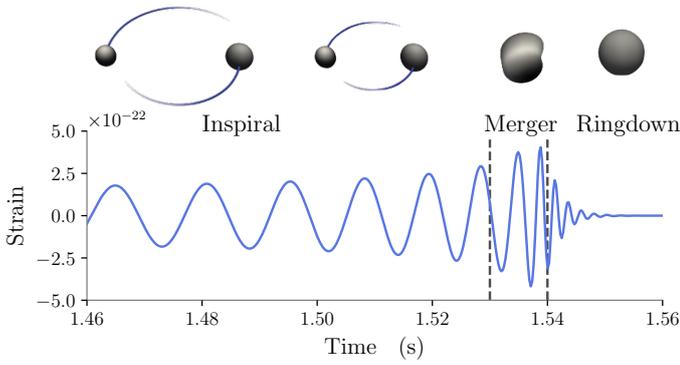


FIGURE 4 : Les différentes phases d’une fusion de deux trous noirs et l’onde gravitationnelle associée. Premièrement, les trous noirs orbitent l’un sur l’autre pendant l’*inspiral*. Après la fusion, le trou noir résultant résonne et émet pendant le *ringdown*.

## 4.2 Application aux ondes gravitationnelles

La relativité générale prédit que les ondes gravitationnelles sont polarisées avec deux modes dénotés  $h_+$  et  $h_\times$ , formant le signal à valeurs complexes  $z[n] = h_+[n] - ih_\times[n]$ . La Figure 4 montre un exemple d’un de ces modes (seulement  $h_+$  ici) émis lors de la fusion de deux trous noirs. Les trois phases du processus sont : *inspiral*, *merger* et *ringdown*.

Ici, nous nous intéressons à la dernière phase où le trou noir rémanent “résonne” jusqu’à équilibre en émettant une onde gravitationnelle. Les signaux de *ringdown* peuvent être modélisés par des combinaisons linéaires d’ellipses amorties [3, Eq. (7)], d’une manière similaire au modèle (1). L’estimation et l’identification de tels modes sont centrales dans certains tests de validité de la métrique de l’espace-temps qui décrit la géométrie des trous noirs [3].

Nous proposons d’analyser ce type de signaux avec SONATA avec pour objectif à long terme de permettre une identification des modes sur des données réelles. Les résultats présentés dans la suite sont obtenus sur données simulées. À l’aide d’un modèle numérique de la relativité, nous avons généré un signal de *ringdown* et sa reconstruction obtenue avec SONATA est donnée en Figure 5. Pour appliquer SONATA au cas réel,  $(h_+, h_\times)$  doivent être préalablement estimés à partir des données des interféromètres LIGO/Virgo. Même si les bruits de ces détecteurs ne sont pas gaussiens, nous considérons ici le cas où SONATA est appliqué après l’étape de reconstruction de  $(h_+, h_\times)$ . De ce fait, l’hypothèse de bruit gaussien non polarisé est valable et un tel bruit est ajouté avec  $RSB_{dB} = 15dB$ . Ce bruit modélise alors le bruit lié à l’estimation des modes de polarisation. Comme le montre la Figure 5, la reconstruction est plus fidèle avec  $R = 3$  ellipses comparé à  $R = 1$  ellipse : respectivement 0.5% contre 3.8% d’erreur relative de reconstruction  $(\|q\mathcal{V}(\mu) - \hat{q}\mathcal{V}(\hat{\mu})\|^2 / \|q\mathcal{V}(\mu)\|^2)$ .

Ces résultats sont encourageants même si, dans une perspective d’interprétabilité astrophysique, il est nécessaire de pouvoir lier les composantes du modèle gravitationnel avec les paramètres obtenus par SONATA. Ce travail de mise en correspondance des modes obtenus par notre algorithme avec ceux des simulations de gravité numérique fait partie des perspectives de ces travaux.

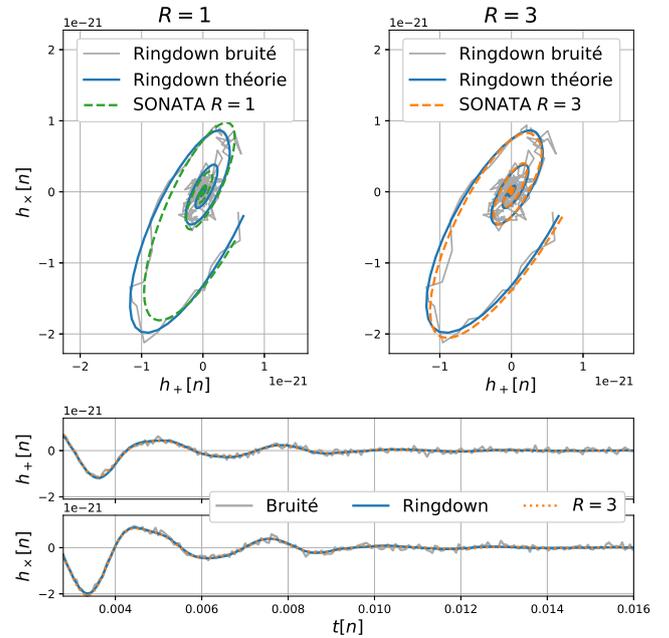


FIGURE 5 : Signal synthétique de *ringdown* reconstruit par SONATA pour  $RSB_{dB}$ . **En haut** : représentation du *ringdown*  $(h_+, h_\times)$  dans le plan complexe pour des valeurs de rang de  $R = 1$  et  $R = 3$ . **En bas** : séries temporelles  $(h_+, h_\times)$ .

## Références

- [1] S. Anderson et al., “Analysis of a polarized seismic wave model,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 2, pp. 379–386, 1996.
- [2] C. Brosseau, *Fundamentals of polarized light : a statistical optics approach*. Wiley, 1998.
- [3] LIGO/Virgo Collaboration, “Tests of general relativity with binary black holes from the second LIGO-Virgo gravitational-wave transient catalog,” *Physical Review D*, 2021.
- [4] J. Flamant et al., “Time-frequency analysis of bivariate signals,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2019.
- [5] S. Miron et al., “Quaternion-MUSIC for vector-sensor array processing,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006.
- [6] X. Gong et al., “Quaternion ESPRIT for direction finding with a polarization sensitive array,” in *2008 9th IEEE ICSP*, 2008.
- [7] S. Miron et al., “Quaternions in Signal and Image Processing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 26–40.
- [8] S. Journé et al., “Polarized signal singular spectrum analysis with complex SSA,” in *IEEE ICASSP*, 2023.
- [9] J. Gonella, “A rotary-component method for analysing meteorological and oceanographic vector time series,” in *Deep sea research and oceanographic abstracts*. Elsevier, 1972.
- [10] F. Andersson et al., “Frequency estimation based on Hankel matrices and the ADMM,” in *EUSIPCO*, 2013.
- [11] J. Gillard, “Cadzow’s basic algorithm, alternating projections and singular spectrum analysis,” *Statistics and its Interface*, 2010.
- [12] N. Le Bihan and J. Mars, “Singular value decomposition of quaternion matrices : a new tool for vector-sensor signal processing,” *Signal processing*, vol. 84, no. 7, pp. 1177–1199, 2004.