

# Détection d'anomalies magnétiques sous contraintes physiques

Clément CHENEVAS-PAULE<sup>1,2,3,4</sup>, Steeve ZOZOR<sup>1,4</sup>, Laure-Line ROUVE<sup>2,4</sup>, Olivier MICHEL<sup>1,4</sup>, Olivier PINAUD<sup>2,4</sup>,  
Romain KUKLA<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, GIPSA-Lab, 38000 Grenoble, France

<sup>2</sup>Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, G2Elab, 38000 Grenoble, France

<sup>3</sup>Centre d'Expertise pour la Maîtrise de l'Information et des Signatures, Naval Group, 83100 Ollioules, France

<sup>4</sup>Naval Electromagnetism Laboratory, 21 avenue des Martyrs, 38000 Grenoble, France

**Résumé** – Les aimantations induite et permanente d'une source ferromagnétique engendrent une anomalie locale du champ terrestre pouvant être exploitée à des fins de détection dans le cadre de la « détection d'anomalies magnétiques ». Dans cette étude, un magnétomètre en mouvement capte un signal, combinaison linéaire inconnue de fonctions d'une base connue. Le schéma de détection classique reposant sur l'estimation des coefficients de la combinaison est revisité en prenant en compte la dépendance de ces coefficients avec la source et la physique du problème. Les performances de détection s'améliorent de manière significative.

**Abstract** – The induced and permanent magnetisations of a ferromagnetic source generate a local anomaly in the Earth's field that can be exploited for detection purposes in the context of magnetic anomaly detection. In this study, a moving magnetometer captures a signal, an unknown linear combination of functions of a known basis. The classical detection scheme based on the coefficients estimation is revisited, taking into account the dependence of these coefficients on the source and the physics of the problem. Detection performance improves significantly.

## 1 Introduction

Une masse ferromagnétique plongée dans un champ inducteur s'aimante et produit à son tour un champ qui perturbe le champ local. La détection de ces perturbations est exploitée notamment dans la recherche de câbles immergés, d'épaves ou de sous-marins. Les méthodes développées à cette fin sont désignées par l'acronyme MAD (Magnetic Anomaly Detection).

Dans le schéma de détection classique [1, 4] un capteur scalaire est considéré, se déplaçant selon une trajectoire rectiligne uniforme à altitude constante, et la cible est supposée immobile et suffisamment éloignée du capteur pour être modélisée comme un dipôle magnétique. Dans une telle configuration, le signal recherché vit dans l'espace vectoriel engendré par la base de fonctions d'Anderson [8]. Ce schéma reste également valide dans le cas d'un signal vectoriel [6]<sup>1</sup>. En présence d'un bruit additif, ce signal paramétrique peut être détecté grâce à un test de rapport de vraisemblance généralisé [7].

La base d'Anderson permet de représenter l'ensemble des signaux issus d'une source dipolaire; l'espace vectoriel engendré est cependant parfois plus vaste que l'espace dans lequel vit le signal, tout vecteur n'étant pas un signal physique possible. Cela est en particulier le cas si le signal est vectoriel. Après avoir défini formellement l'espace de ces coefficients vectoriels, nous proposons de l'exploiter pour construire un test du rapport de vraisemblance généralisé intégrant ces contraintes, plus adapté à la nature physique d'un scénario MAD. Dans le cas vectoriel, les performances de détection obtenues tirent partie de cette nouvelle approche et sont supérieures à l'état de l'art; dans le cas scalaire, nous établissons qu'aucune contrainte ne lie les coefficients, ne laissant pas place à une amélioration de [1, 4].

<sup>1</sup>Un capteur vectoriel mesure les trois composantes spatiales du champ magnétique; un capteur scalaire en mesure la norme.

## 2 Anomalies magnétiques

### 2.1 Modélisation du problème

Considérons une paire de magnétomètres vectoriels dont les axes sont parfaitement alignés. Un des magnétomètres est supposé suffisamment éloigné de la source pour servir de référence de mesure du champ magnétique local; l'autre, situé en un point noté  $P$ , effectue la mesure de l'anomalie après soustraction du champ de référence mesuré par le premier magnétomètre. Le capteur, repéré par  $P$ , se déplace de manière rectiligne uniforme à altitude et vitesse  $V$  constantes. La distance entre le centre  $O$  de la cible et le point de rapprochement maximal (CPA pour Closest Point of Approach) est appelée  $D$ . Le CPA est atteint à l'instant  $t_0$ . L'angle entre l'axe vertical et la droite  $(O, CPA)$  est noté  $\beta$ . Dans cette étude, l'axe des  $x$  dans le repère choisi est aligné avec un des axes du capteur, et colinéaire à la trajectoire. Un des axes restant du capteur est aligné avec l'axe vertical (voir figure 1). Cela définit le repère  $\mathcal{R}$  centré en  $O$  et dirigé par les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  mais aussi  $\mathcal{R}'$  issu d'une rotation autour de l'axe des  $x$  d'un angle  $\beta$ . A l'extérieur de la sphère de Brillouin (la plus petite sphère contenant la source) le champ magnétique généré par la cible peut être modélisé par une décomposition multipolaire décroissante [9, Sec. 3.12]. La trajectoire est supposée rester en tout point assez loin du capteur pour que seule la composante dipolaire soit à considérer. En tout point  $P$  de coordonnées  $\mathbf{r}' = [x' \ y' \ z']^\top$  exprimées dans  $\mathcal{R}'$ , la valeur du champ est donnée par :

$$\mathbf{B}'(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}'^\top \mathbf{r}') \mathbf{r}' - r'^2 \mathbf{m}'}{r'^5}, \quad \mathbf{m}' = \begin{bmatrix} m'_x \\ m'_y \\ m'_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

où  $r' = \|\mathbf{r}'\|$ ,  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide,  $\mathbf{m}'$  est le moment dipolaire dans  $\mathcal{R}'$  et peut a priori prendre

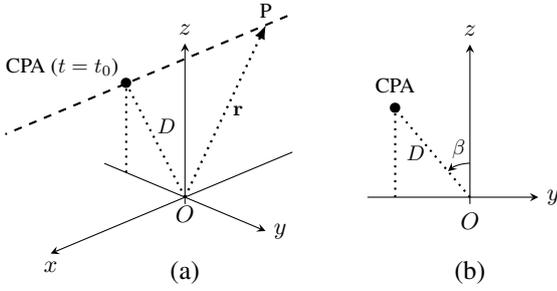


FIGURE 1 : Géométrie du problème. Le centre de la cible est localisé en  $O$  et le centre du magnétomètre  $P$  se déplace le long de la ligne en pointillés.  $D$  désigne la distance entre le centre de la source et le CPA, atteint à l'instant  $t_0$ . (a) vue en perspective et (b) projection sur le plan  $yOz$

n'importe quelle valeur dans  $\mathbb{R}^3$ . L'utilisation du repère  $\mathcal{R}'$  pour certaines grandeurs, notamment le moment dipolaire, permettra de simplifier les expressions mathématiques; il faudra néanmoins exprimer le champ dans le repère lié au capteur,  $\mathcal{R}$ .

Dans toute la suite, la distance  $D$  ainsi que l'instant  $t_0$  sont supposés connus. Dans un scénario réaliste, ces quantités sont à estimer (voir [1, 5]).

## 2.2 Base de fonctions orthonormales

À partir de l'équation (1), la signature magnétique de la cible mesurée par le capteur, exprimée dans  $\mathcal{R}'$  peut être calculée en notant que  $\mathbf{r}'$  s'exprime le long de la trajectoire sous la forme  $\mathbf{r}' = [V(t - t_0) \ 0 \ D]$ . La signature  $\mathbf{s}(\cdot)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  s'en déduit en appliquant une rotation d'angle  $\beta$  et d'axe  $x$  et s'exprime, calculs faits, sous la forme :

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{c}_i f_i(u), \quad f_i(u) = \frac{u^i}{(1 + u^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad u = \frac{V(t - t_0)}{D}$$

où  $u$  est une grandeur sans unité et les  $f_i$  forment la base dite d'Anderson. Les coefficients  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^3$  sont inconnus, et dépendent de la source (moment  $\mathbf{m}$ , angle  $\beta$ ). Un procédé de Gram-Schmidt permet d'orthonormaliser cette base dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  et d'obtenir la base de fonctions orthonormées  $\mathbf{g} = [g_0 \ g_1 \ g_2]^\top$  :

$$\mathbf{g}(u) = \frac{1}{(1 + u^2)^{\frac{5}{2}}} \mathbf{P} [1 \ u \ u^2]^\top, \quad (2)$$

avec

$$\mathbf{P} = 2\sqrt{\frac{2}{35\pi}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{7} & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & 7\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (3)$$

la matrice de passage de la base d'Anderson vers la base orthonormée. Le signal s'exprime dans cette base sous la forme compacte  $\mathbf{s}(u) = \mathbf{A} \mathbf{g}(u)$  avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . L'originalité de la démarche proposée dans cette communication réside dans le fait de considérer que la matrice  $\mathbf{A}$  ne peut pas physiquement prendre toute valeur dans  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . En effet, les coefficients de  $\mathbf{A}$  s'expriment en fonction de  $\mathbf{m}'$  et  $\beta$  sous la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{m}', \beta) = \frac{\mu_0}{4\pi D^3} \mathbf{R}(\beta) \begin{bmatrix} -m'_x & 3m'_z & 2m'_x \\ -m'_y & 0 & -m'_y \\ 2m'_z & 3m'_x & -m'_z \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (4)$$

où  $\mathbf{R}(\beta)$  désigne la matrice de rotation d'angle  $\beta$  et d'axe  $x$ . Il est important de noter que le moment  $\mathbf{m}'$  est ici exprimé dans  $\mathcal{R}'$  repère associé à la cible.

Dans un scénario réel, le signal est naturellement discrétisé sur une fenêtre de durée finie. L'ensemble des échantillons du signal peut être exprimé sous forme vectorielle  $\mathbf{s} = \mathbf{A} \mathbf{G}$  où  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{3 \times K}$  est la matrice dont les lignes sont les fonctions de base  $g_i$  échantillonnées et  $K$  est le nombre d'échantillons.

## 3 Le problème de détection

### 3.1 Test du rapport de vraisemblance

Le problème de détection, classique, s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{x} = \mathbf{b} & \text{(cible absente)} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{b} & \text{(cible présente)} \end{cases}$$

où  $\mathbf{x}$  est la mesure,  $\mathbf{b}$  est le bruit et  $\mathbf{s}$  le signal d'intérêt.  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{s}$  sont trois matrices de  $\mathbb{R}^{3 \times K}$ . Le bruit est supposé blanc spatialement et temporellement, gaussien, de variance  $\sigma^2$  connue. Dans ce cadre, le test d'hypothèse binaire ci dessus, conduit à comparer le rapport de vraisemblance  $\Lambda = \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{s}, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_0)}$  à un seuil [7], dont la valeur dépend de la stratégie adoptée. Dans le cas présent, la nécessité de contrôler la probabilité de fausse alarme ( $P_{fa}$ ) conduit à développer un test de Neyman-Pearson. De plus les coefficients de  $\mathbf{s}$  dans la base orthonormée doivent être remplacés dans le contexte MAD présent, par leur valeur estimée au sens du maximum de vraisemblance. Le test proposé est alors un test du rapport de vraisemblance généralisé.

### 3.2 Estimateur du maximum de vraisemblance

Le signal étant engendré par la base  $\mathbf{G}$ , l'espace vectoriel associé est :

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{s} = \mathbf{A} \mathbf{G}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}\} \quad (5)$$

Dans ce contexte, l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\mathbf{A}$  s'exprime explicitement sous la forme  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{x} \mathbf{G}^\top$ , i.e.,

$$\hat{\mathbf{s}}_{\mathcal{G}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{s} \in \mathcal{G}} \mathcal{L}(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mathbf{G}^\top) \mathbf{G} \quad (6)$$

où  $\mathcal{L}(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{s}, \mathcal{H}_1)$  est la fonction de vraisemblance.

## 4 Estimateur du maximum de vraisemblance physiquement contraint

### 4.1 Espace de représentation des coefficients

L'équation (4) donne l'expression de  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , comme fonction de  $(\mathbf{m}', \beta) \in \mathbb{R}^4$ . Ces dépendances entre les coefficients reflètent les contraintes physiques et rendent le système sous-déterminé. L'ensemble décrit par les coefficients physiquement réalisables

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \exists (\mathbf{m}', \beta) \in \mathbb{R}^3 \times [-\pi, \pi] \text{ t. q. (4)}\}$$

est un sous ensemble distinct de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Déterminer la nature de cet espace passe par l'étude de la géométrie semi-algébrique [2] :  $\mathcal{V}$  est un sous-espace semi-algébrique de  $\mathbb{R}^9$ . En effet, en exploitant l'égalité  $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$  et en

considérant  $\cos \beta$  et  $\sin \beta$  comme des variables distinctes l'ensemble des solutions de (4) apparaît comme un espace semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{14}$  (9 variables dans  $\mathbf{A}$ , 3 variables dans  $\mathbf{m}'$  et les variables  $\sin \beta$  et  $\cos \beta$ ).  $\mathcal{V}$  est la projection de cet espace sur les neuf premières variables.  $\mathcal{V}$  est également d'après le théorème de Tarski-Seidenberg [2], un espace semi-algébrique.

La relation  $\mathcal{V} \subsetneq \mathbb{R}^{3 \times 3}$  signifie qu'il existe des signaux de  $\mathcal{G}$  dont les coefficients estimés dans la base ne sont pas dans  $\mathcal{V}$ . Ces signaux n'ont aucune réalité physique; la méthode classique (6) ne les excluait pas. Afin de reconstruire un signal physique, nous proposons de contraindre l'estimateur du maximum de vraisemblance à choisir des coefficients dans  $\mathcal{V}$ , afin d'améliorer les performances du détecteur. Par construction, cela est rigoureusement équivalent à trouver directement le moment  $\mathbf{m}'$  et l'angle  $\beta$  qui maximisent la vraisemblance :

$$\hat{\mathbf{s}}_{\mathcal{V}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{s}=\mathbf{A}\mathbf{G} \mid \mathbf{A} \in \mathcal{V}} \mathcal{L}(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{s}=\mathbf{A}(\mathbf{m}', \beta)\mathbf{G} \mid (\mathbf{m}', \beta) \in \mathbb{R}^4} \mathcal{L}(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \quad (7)$$

## 4.2 Optimisation

Maximiser la vraisemblance revient à minimiser la fonction  $f : (\mathbf{m}', \beta) \mapsto \operatorname{Tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} - 2\mathbf{G}\mathbf{x}^\top \mathbf{A})$ . La hessienne de  $f_\beta = f(\cdot, \beta)$ , restriction de  $f$  à  $\mathbf{m}'$ , fonction quadratique en  $\mathbf{m}'$ , est strictement définie positive.  $f_\beta$  est donc strictement convexe quelle que soit la valeur de  $\beta$  et  $f_\beta$  admet par conséquent un minimum global atteint lorsque son gradient s'annule. Soit alors l'application :

$$\mathbf{m}^* : \beta \mapsto \operatorname{argmin}_{\mathbf{m}' \in \mathbb{R}^3} f_\beta(\mathbf{m}') \quad (8)$$

dont la forme explicite peut être facilement trouvée,

$$\mathbf{m}^*(\beta) = \frac{32D^3}{63\mu_0} \sum_{i=1}^3 \mathbf{K}_i \mathbf{J}_3^{i+1} \mathbf{R}(-\beta) \mathbf{x} \mathbf{G}^\top \mathbf{P}^{-t} \mathbf{1}_i \quad (9)$$

avec  $\mathbf{K}_1 = \operatorname{diag}(-14, -21, 12)$ ,  $\mathbf{K}_2 = \operatorname{diag}(42, 0, 18)$ ,  $\mathbf{K}_3 = \operatorname{diag}(28, -21, -6)$ ,  $\mathbf{1}_i = [\delta_{1,i}, \delta_{2,i}, \delta_{3,i}]^\top$ ,  $\mathbf{P}^{-t} = (\mathbf{P}^{-1})^\top$  et  $\mathbf{J}_3$  est la matrice d'échange de dimension 3 (1 sur son anti-diagonale et nulle ailleurs). Cette solution est continue. Soit

$$\beta^* = \operatorname{argmin}_{\beta \in [-\pi, \pi]} f(\mathbf{m}^*(\beta), \beta). \quad (10)$$

$\beta^*$  existe car  $\beta \mapsto f(\mathbf{m}^*(\beta), \beta)$  est continue (composition de fonctions continues) sur un compact, elle est donc bornée et atteint ses bornes (théorème de Weierstrass). La fonction  $f$  atteint donc son minimum global en  $(\mathbf{m}^*(\beta^*), \beta^*)$ .

Finalement la résolution de l'Eq. (7) revient à minimiser  $[\cos \beta \ \sin \beta] \mathbf{Q} [\cos \beta \ \sin \beta]^\top + 2 [\cos \beta \ \sin \beta] \mathbf{q}$  où  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{q}$  sont définis par :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} \mathbf{H} \mathbf{T}^\top - (\mathbf{1}_2^\top \mathbf{H} \mathbf{1}_2) \mathbf{I}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{H} = -\mathbf{x} \mathbf{G}^\top \begin{bmatrix} \frac{275}{588} & 0 & \frac{41\sqrt{5}}{147} \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ \frac{41\sqrt{5}}{147} & 0 & \frac{10}{147} \end{bmatrix} \mathbf{G} \mathbf{x}^\top$$

et

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^\top \mathbf{x} \mathbf{G}^\top \begin{bmatrix} 0 & \frac{65}{14} & 0 \\ -\frac{25}{6} & 0 & \frac{4\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{7} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{G} \mathbf{x}^\top \mathbf{1}_1$$

Nous pouvons reformuler le problème sous sa forme contrainte en notant  $\boldsymbol{\varrho} = [\cos \beta \ \sin \beta]^\top$  :

$$\boldsymbol{\varrho}^* = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{R}^2} (\boldsymbol{\varrho}^\top \mathbf{Q} \boldsymbol{\varrho} + 2\mathbf{q}^\top \boldsymbol{\varrho}) \quad \text{t. q.} \quad \|\boldsymbol{\varrho}\|^2 = 1$$

La formulation Lagrangienne du problème conduit à

$$\beta^* = \arccos(\mathbf{1}_1^\top \boldsymbol{\varrho}^*), \quad \boldsymbol{\varrho}^* = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q} \quad (11)$$

avec le facteur de Lagrange  $\lambda$  déterminé pour satisfaire la contrainte  $\|\boldsymbol{\varrho}^*\|^2 = 1$ , facteur qui se trouve être racine d'une équation quartique<sup>2</sup> que nous calculons par la méthode de Ferrari [3, § 3.8.3].

Ainsi, nous avons développé une méthode d'optimisation sur les paramètres physiques de la source  $\mathbf{m}'$  et  $\beta$  afin d'estimer le signal : cela revient in fine à « identifier » et « localiser » la source. Cette méthode permet en particulier d'améliorer les performances de détection avec les estimées de  $\mathbf{m}'$ ,  $\beta$  des Eq. (9)-(11) dans le test du rapport de vraisemblance généralisé, comme cela est illustré dans la section suivante.

## 5 Résultats de simulations

Nous nous proposons dans cette section d'évaluer les performances du test lorsque l'estimateur du maximum de vraisemblance est effectué via l'approche (7) notée  $\hat{\mathbf{s}}_{\mathcal{V}}$ , et de la comparer à l'approche classique (6) notée  $\hat{\mathbf{s}}_{\mathcal{G}}$ . Pour cela, une source dipolaire  $\mathbf{m}$  et une trajectoire  $\beta$  sont tirées aléatoirement dont les valeurs sont reportées dans le tableau 1. Les ap-

$V$	$85 \text{ m.s}^{-1}$
$D$	$100 \text{ m}$
$K$	$1000 \text{ échantillons}$
$u$	$[-10, 10]$
$\beta$	$0.52 \text{ rad}$
$\mathbf{m}$	$[-0.25, -1.02, -0.55]^\top \text{ A.m}^2$

TABLE 1 : Paramètres de simulation

proches sont testées pour différentes valeurs de rapport signal sur bruit (RSB) défini par  $\text{RSB (dB)} = 10 \log_{10} \left( \frac{\|\mathbf{s}\|_F^2}{3K\sigma^2} \right)$ .

Une simulation de Monte-Carlo avec  $10^5$  réalisations de bruit est effectuée et permet d'obtenir les caractéristiques opérationnelles ( $P_{\text{fa}}, P_{\text{d}}$ ) des récepteurs basés sur  $\hat{\mathbf{s}}_{\mathcal{G}}$  et  $\hat{\mathbf{s}}_{\mathcal{V}}$  (figure 2). Ces courbes montrent que l'approche proposée améliore l'approche classique. Cette affirmation reste inchangée lorsque le RSB varie comme cela est illustré sur la figure 3. Cette expérience a été reconduite  $10^3$  fois avec de nouveaux tirages des paramètres  $(\mathbf{m}, \beta)$ . Il s'avère que les courbes gardent toutes la même allure, confortant les conclusions développées précédemment sur la base d'un cas particulier.

<sup>2</sup>Trois cas particuliers pour lesquels les valeurs propres de  $\mathbf{Q}$  peuvent être égaux à  $\lambda$  sont exclus, les occurrences de ces situations étant de mesure de probabilité nulle.

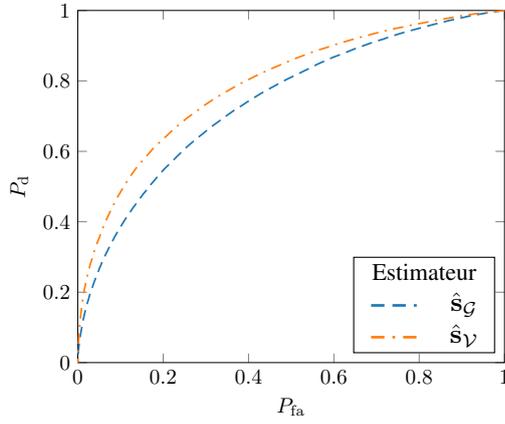


FIGURE 2 : Caractéristiques opérationnelles des récepteurs classique et « physique » pour un RSB de -28 dB et les paramètres de la table 1; simulations de Monte-Carlo avec  $10^5$  réalisations de bruit.

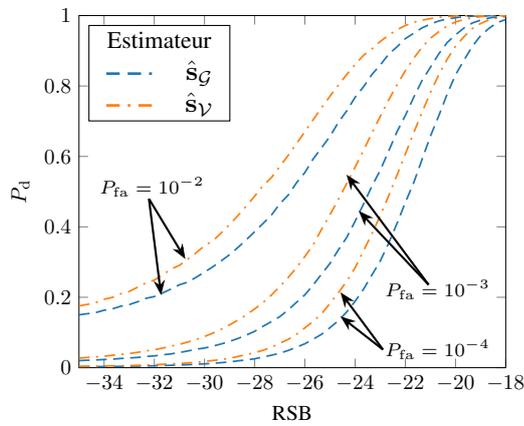


FIGURE 3 : Probabilité de détection en fonction du RSB pour  $P_{fa} = 10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  et les paramètres de la table 1; simulation de Monte-Carlo avec  $10^5$  réalisations de bruit.

## 6 Cas scalaire

Les capteurs scalaires étant très largement utilisés dans le contexte MAD, la question de pose de revisiter l'approche proposée dans ce cadre. Dans cette configuration, le champ terrestre  $\mathbf{H}_0$  est très grand en norme devant l'anomalie recherchée. Une fois la composante  $\|\mathbf{H}_0\|$  retirée, à l'ordre 1 la mesure se restreint à la projection de l'anomalie sur  $\mathbf{h}_0 = \frac{\mathbf{H}_0}{\|\mathbf{H}_0\|}$ , supposé connu. Contrairement au cas vectoriel pour lequel le problème d'estimation est sous-déterminé, le cas scalaire conduit à la résolution d'un système sur-déterminé. Une analyse dimensionnelle ne permet alors pas de mettre en évidence une dépendance entre les différents coefficients recherchés. La relation liant les coefficients à  $(\mathbf{m}', \beta)$  s'obtient en projetant  $\mathbf{A}$  sur  $\mathbf{h}_0$ ,  $\mathbf{a} \approx \mathbf{h}_0^\top \mathbf{A}$ . En introduisant  $\mathbf{h}_0'' = \mathbf{R}(-\beta) \mathbf{h}_0 = [\mathbf{h}_{0_x}'', \mathbf{h}_{0_y}'', \mathbf{h}_{0_z}'']^\top$  le champ dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on obtient de l'Eq. (4) :

$$\mathbf{a} \approx \text{diag} \left( -\sqrt{35}, 21\sqrt{5}, 4\sqrt{7} \right) \mathbf{M}(\mathbf{h}_0, \beta) \mathbf{m}'$$

avec

$$\mathbf{M}(\mathbf{h}_0, \beta) = \begin{bmatrix} 5\mathbf{h}_{0_x}'' & 8\mathbf{h}_{0_y}'' & -13\mathbf{h}_{0_z}'' \\ \mathbf{h}_{0_z}'' & 0 & \mathbf{h}_{0_x}'' \\ 2\mathbf{h}_{0_x}'' & -\mathbf{h}_{0_y}'' & -\mathbf{h}_{0_z}'' \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $\mathbf{a}$  sont liés si et seulement si le champ  $\mathbf{h}_0$  exprimé dans  $\mathcal{R}$  appartient à  $\{\mathbf{h}_0 \mid \forall \beta, \text{rg}(\mathbf{M}(\mathbf{h}_0, \beta)) \neq 3\}$ . Le rang de la matrice étant stable par combinaison de lignes, il est aisé de montrer que la matrice n'est pas de rang plein pour au moins une valeur de  $\beta$  si et seulement si  $\mathbf{h}_{0_y} = \mathbf{h}_{0_z} = 0$ ; ceci correspond au cas où la trajectoire du capteur est parallèle aux lignes de champ terrestre. En dehors de cette configuration, l'approche classique n'est donc pas améliorable. Il est possible cependant d'imaginer exploiter cette propriété pour laquelle l'espace des coefficients est strictement inclus dans  $\mathbb{R}^3$ , même si cela semble compliqué à nos latitudes où les lignes de champ plongent dans l'océan.

## 7 Conclusion

Dans le cadre de la détection d'anomalie magnétique par mesure vectorielle mobile pour laquelle l'anomalie mesurée se décompose sur une base connue, nous avons établi d'une part que l'espace des signaux physiques est inclus mais diffère de l'espace vectoriel engendré par la base, et d'autre part que la restriction du maximum de vraisemblance à ce sous-espace permet une amélioration notable des performances de détection. De plus cette méthode permet d'identifier et de localiser la cible (moment magnétique et angle  $\beta$  sont estimés,  $t_0$ ,  $D$  sont connus). Nous avons montré que dans le contexte scalaire, sauf cas très particulier, les signaux estimés par la méthode classique sont tous physiquement réalisables, de sorte que l'approche usuelle n'est pas améliorable.

## Références

- [1] R. BLANPAIN : *Traitement en temps réel du signal issu d'une sonde magnétométrique pour la détection d'anomalies magnétiques*. Phd thesis, INP Grenoble, 1979.
- [2] M. COSTE : *An introduction to semialgebraic geometry*, 2000.
- [3] Abramowitz et AL. : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publication, 10th édition, 1972.
- [4] Ginzburg et AL. : Processing of magnetic scalar gradiometer signals using orthonormalized functions. *Sensors and Actuators A : Physical*, 102(1-2):67–75, 2002.
- [5] Ginzburg et AL. : Investigation of advanced data processing technique in magnetic anomaly detection systems. *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems*, 1(1):110, 2008.
- [6] Zozor et AL. : Compared performances of MF-based and locally optimal-based magnetic anomaly detection. *In 2010 18th European Signal Processing Conference*, pages 149–153, 2010.
- [7] S. M. KAY : *Fundamentals for Statistical Signal Processing : Detection Theory*, volume 2. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1998.
- [8] E. P. LOANE : Speed and depth effects in magnetic anomaly detection. Rapport technique ADA081329, unclassified, Defense Technical Information Center, EPL Analysis, Ashton, MD, USA, 1976.
- [9] J. A. STRATTON : *Electromagnetic Theory*. Wiley-IEEE Press, Hoboken, NJ, USA, 2007.