# Effet de la paramétrisation sur le filtrage de Kalman et le lissage

Paul CHAUCHAT

Aix-Marseille Univ, CNRS, LIS, 52 av de l'escadrille Normandie Niemen, 13013, Marseille, France

**Résumé –** Cet article s'intéresse à l'estimation d'état sur variété, en étudiant l'effet, observé dans la littérature, que peut avoir le choix de paramétrisation. Plus précisément, on considère le cas de deux paramétrisations localement linéairement reliées. On montre d'une part que les filtres de Kalman associés se dissocient lors de la mise à jour, si aucune correction n'est apportée. D'autre part, on obtient un résultat analogue en lissage dès que de la marginalisation est mise en place.

**Abstract –** This paper studies on manifold state estimation, and in particular the impact, observed in the literature, of the choice of parametrisation. The case of two linearly linked parametrisations is considered. It is first shown that the associated Kalman filters dissociate at the update step. As for smoothing, a similar result is obtained as soon as marginalisation occurs.

## 1 Introduction

L'estimation d'état sur variété est un sujet qui a pris beaucoup d'importance récemment en navigation, du fait de la présence de rotations [2, 3, 12, 16]. La grande majorité des méthodes proposées se basent sur des modèles de probabilité définis sur la variété (en particulier les gaussiennes "concentrées" [3, 8, 18]), et/ou sur des approches itératives de problèmes d'optimisation [12, 7]. Dans les deux cas, une paramétrisation doit être choisie, c'est-à-dire une manière d'exprimer un état $\chi$ comme la combinaison d'un estimé $\hat{\chi}$ et d'une perturbation.

Le filtrage invariant [2], par exemple, définit deux filtres distincts, chacun se basant sur une représentation spécifique. Passer d'une représentation à l'autre est aisé [17]. Il a pourtant été montré et observé qu'il fallait favoriser l'un ou l'autre suivant le type de mesure [2, 16]. Pour autant, l'origine de ces différences reste mal comprise. De même, plusieurs paramétrisations existent pour les systèmes évoluant sur $SE(3)$ : pour un estimé donné $(\hat{R}, \hat{p})$, on peut écrire une perturbation comme $(\hat{R}\delta_R, \hat{p} + \delta_p)$ [12], ou bien $(\hat{R}\delta_R, \hat{p} + \hat{R}\delta_p)$ [10]. Le second choix serait à privilégier, mais la différence n'est pas expliqué non plus.

Ces deux exemples motivent le présent article, qui vise à apporter un premier éclairage sur l'origine de ces différences. Il est bien connu que l'initialisation d'un filtre doit prendre en compte la paramétrisation [17, 16, 6], et, dans le cas du filtrage linéaire, certains liens entre jacobiens de propagation et mesure sont connus [15]. Mais la récursion n'a pas été étudiée. Cet article amène une première réponse dans le cadre du filtrage de Kalman sur variété, et du lissage, en considérant deux paramétrisations liées par une matrice de passage (dépendante de l'état).

Le reste de l'article a la structure suivante : la Section 2 rappelle les principes du filtrage et du lissage dans le cas euclidien, puis introduit la paramétrisation dans le cas non euclidien. L'effet de cette paramétrisation sur le filtrage est étudié dans la Section 3. L'effet sur le lissage est étudié dans la Section 4. La Section 5 vient conclure cet article.

**Notations :** Une lettre indicée représente une grandeur rattachée à un instant, e.g. $X_i, \chi_i$. Une lettre non indicée est une trajectoire : $X = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour une fonction à valeurs matricielles $A(X_i) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, on note $A(X) = \mathtt{blockdiag}(A(X_i), 1 \leq i \leq n)$.

## 2 Paramétrisation d'un problème d'estimaton sur variété

### 2.1 Filtrage non linéaire sur un espace euclidien

Considérons le système non linéaire suivant, avec $X \in \mathbb{R}^n$ :

$$X_{i+1} = f_i(X_i, w_i), \qquad y_{i+1} = h(X_{i+1}, v_{i+1}) \tag{1}$$

où $w_i \sim \mathcal{N}(0, Q_i)$ et $v_{i+1} \sim \mathcal{N}(0, N_{i+1})$ représentent les bruits de modèle et de mesure respectivement. Le filtre de Kalman étendu (EKF) cherche à calculer $\hat{X}_i$ et $P_i$ tels que

$$X_i \sim \mathcal{N}(\hat{X}_i, P_i) \tag{2}$$

On peut réécrire cela en fonction de l'erreur d'estimation $\varepsilon_i$ :

$$X_i = \hat{X}_i + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, P_i) \tag{3}$$

La propagation de l'EKF cherche à "suivre" la distribution (au premier ordre) de $\varepsilon_i$ à travers la dynamique $f_i$. Puis, la mise à jour vient appliquer une correction additive à l'état estimé.

### 2.2 Lissage sur un espace euclidien

Le lissage [11, 13] est une autre méthode d'estimation non linéaire dont le but est d'estimer une trajectoire (ou un bout de trajectoire) par maximum a posteriori (MAP) :

$$X^* = (X_i^*)_{1 \leq i \leq n} = \underset{X}{\operatorname{argmax}}\, \mathbb{P}(z_1, \ldots, z_K | X) \tag{4}$$

où $z_1, \ldots, z_K$ représentent toutes les informations reçues, incluant le prior, les inputs et les mesures. Sous hypothèses de bruits indépendants et gaussiens,(4) se ramène à un problème de moindres carrés non linéaires.

$$X^* = \underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_k \|\psi_k(X)\|^2_{\Sigma_k} = \underset{X}{\operatorname{argmin}} \|\Psi(X)\|^2_{\Sigma} \tag{5}$$

où $\psi_k$ et $\Sigma_k$ sont les résidus et la covariance associés à $z_k$, $\Psi(X)$ est la concaténation des $\psi_k$, $\Sigma$ est la matrice diagonale par blocs obtenue des $\Sigma_k$, et $\|e\|_\Sigma = e^\top \Sigma^{-1} e$ représente la distance de Mahalanobis. $X^*$ est estimé par un algorithme de Gauss-Newton : une suite d'estimés $\hat{X}^{(n)}$ obtenus par perturbations du premier ordre

$$\hat{X}^{(n+1)} = \hat{X}^{(n)} + \varepsilon^{(n)} \tag{6}$$

$$\varepsilon^{(n)} = \underset{\varepsilon}{\operatorname{argmin}} \, \|\Psi(\hat{X}^{(n)} + \varepsilon)\|_\Sigma \tag{7}$$

$$\approx \underset{\varepsilon}{\operatorname{argmin}} \, \|\Psi(\hat{X}^{(n)}) + \hat{\Phi}\varepsilon\|_\Sigma \tag{8}$$

où $\hat{\Phi}$ est le jacobien de $\Psi$ en $\hat{X}^{(n)}$. Cette fois-ci, $\varepsilon$ sert à linéariser le problème, même si on peut la relier à une approximation gaussienne de la distribution de $\mathbb{P}(X|z_1, \ldots, z_K)$.

## 2.3 Paramétrisation pour une estimation sur variété

Dans les deux exemples présentés ci-dessus, l'erreur d'estimation $\varepsilon$ est définie de manière additive. On s'intéresse toujours à $\hat{X} + \varepsilon$. Considérons maintenant un système non linéaire où l'état $\chi$ évolue sur une variété $\mathcal{M}$ :

$$\chi_{i+1} = f_i(\chi_i, w_i), \qquad y_{i+1} = h(\chi_{i+1}, v_{i+1}) \tag{9}$$

Les méthodes de filtrage de Kalman sur variété cherchent à approximer la distribution de $\chi_i$ à travers une correction locale, gaussienne, $\xi_i$.

L'exemple le plus connu est le cas des groupes de Lie. Un choix naturel est de chercher à estimer une gaussienne "concentrée" $\chi_i = \hat{\chi}_i \exp(\xi_i)$, avec $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, P_i)$ [8, 4, 2]. Cependant, il est aussi possible d'estimer une autre gaussienne concentrée $\chi_i = \exp(\zeta_i)\hat{\chi}_i$, avec $\zeta_i \sim \mathcal{N}(0, \widetilde{P}_i)$ [2]. Ces deux approches sont à l'origine des filtres de Kalman invariants à gauche et à droite [2].

D'autres paramétrisations sont aussi possibles, basées sur différentes rétractions [1]. Sur $SE(d)$ par exemple, on peut écrire $(\hat{R}\delta_R, \hat{p} + \delta_p)$ [12], ou bien $(\hat{R}\delta_R, \hat{p} + \hat{R}\delta_p)$ [10].

Cet article explore les liens entre les méthodes d'estimation basées sur deux paramétrisations d'un même problème. Ces paramétrisations sont toutes basées sur la composition entre un élément de la variété $\hat{\chi}_i \in \mathcal{M}$ et un vecteur. On adopte les notations de la communauté robotique : ces opérateurs de composition sont notés $\boxplus$ et $\oplus$. Les vecteurs associés respectifs sont $\xi_i$ et $\zeta_i$, de sorte qu'on aura à tout instant

$$\chi_i = \hat{\chi}_i \boxplus \xi_i = \hat{\chi}_i \oplus \zeta_i \tag{10}$$

**Hypothèse sur les paramétrisations** On suppose dans cet article qu'il existe un lien linéaire local entre $\boxplus$ et $\oplus$, c'est-à-dire qu'il existe $A : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que

$$\xi_i = A(\hat{\chi}_i)\zeta_i \implies \hat{\chi}_i \oplus \zeta_i = \hat{\chi}_i \boxplus \xi_i \tag{11}$$

Cette hypothèse englobe les deux exemples ci-dessous :

- Le filtrage invariant, où $\chi_i \boxplus \xi_i = \chi_i \exp(\xi_i)$, et $\chi_i \oplus \zeta_i = \exp(\zeta_i)\chi_i$, ce qui implique, en notant $Ad_{(\cdot)}$ l'opérateur adjoint [8]
$$\xi_i = Ad_{\chi_i^{-1}} \zeta_i$$
- Les rétractions proposées dans [12] et [10] : $(R_i, p_i) \boxplus (\rho_i, u_i) = (R_i \exp(\rho_i), p_i + u_i)$ et $(R_i, p_i) \oplus (\rho'_i, u'_i) = (R_i \exp(\rho'_i), p_i + R_i u'_i)$, ce qui implique
$$(\rho_i, u_i) = (\rho'_i, R_i u'_i)$$

**Notation** Dans cet article, l'exposant indiquera la paramétrisation à laquelle est associée une matrice. Par exemple, on écrira pour un jacobien

$$f(\chi \boxplus \xi) \approx f(\chi) \boxplus F^\xi \xi \tag{12}$$

$$f(\chi \oplus \zeta) \approx f(\chi) \oplus F^\zeta \zeta \tag{13}$$

# 3 Effet de la paramétrisation sur le filtrage de Kalman

On utilise la notation standard du filtrage de Kalman : l'estimé propagé est noté $\hat{\chi}_{i+1|i}$, celui mis à jour est noté $\hat{\chi}_{i+1|i+1}$.

Dans cette section, on étudie l'effet du choix de paramétrisation sur la mise en place d'un filtre de Kalman. Supposons que la distribution initiale de l'état est donnée par $\chi_0 = \hat{\chi}_{0|0} \oplus \zeta$, avec $\zeta \sim \mathcal{N}(0, P^\zeta_{0|0})$. Alors on a aussi $\chi_0 = \hat{\chi}_{0|0} \boxplus \xi$, avec $\xi \sim \mathcal{N}(0, A(\hat{\chi}_{0|0}) P^\zeta_{0|0} A(\hat{\chi}_{0|0})^\top)$, i.e., $P^\xi_{0|0} = A(\hat{\chi}_{0|0}) P^\zeta_{0|0} A(\hat{\chi}_{0|0})^\top$. La question posée est donc la suivante : **deux filtres basés sur les paramétrisations de** (10) **préservent-ils ce lien ? C'est-à-dire, a-t-on**

$$P^\xi_{i|i} = A(\hat{\chi}_{i|i}) P^\zeta_{i|i} A(\hat{\chi}_{i|i})^\top \tag{14}$$

$$\implies \begin{cases} P^\xi_{i+1|i} = A(\hat{\chi}_{i+1|i}) P^\zeta_{i+1|i} A(\hat{\chi}_{i+1|i})^\top \\ P^\xi_{i+1|i+1} = A(\hat{\chi}_{i+1|i+1}) P^\zeta_{i+1|i+1} A(\hat{\chi}_{i+1|i+1})^\top \end{cases} \quad ?$$

## 3.1 Effet sur la propagation

On s'intéresse d'abord à l'effet de la paramétrisation sur la propagation. On a d'une part

$$f(\hat{\chi}_{i|i} \oplus \zeta) \approx \hat{\chi}_{i+1|i} \oplus F^\zeta_i \zeta \tag{15}$$

$$P^\zeta_{i+1|i} = F^\zeta_i P^\zeta_{i|i} (F^\zeta_i)^\top + Q^\zeta_i \tag{16}$$

où $\hat{\chi}_{i+1|i} = f(\hat{\chi}_{i|i})$ et $Q^\zeta_i$ une matrice de covariance. Pour la seconde paramétrisation, on a par hypothèse

$$f_i(\hat{\chi}_{i|i} \boxplus \xi) = f_i(\hat{\chi}_{i|i} \oplus A(\hat{\chi}_{i|i})^{-1}\xi) \tag{17}$$

$$\approx \hat{\chi}_{i+1|i} \oplus F^\zeta_i A(\hat{\chi}_{i|i})^{-1}\xi \tag{18}$$

$$= \hat{\chi}_{i+1|i} \boxplus A(\hat{\chi}_{i+1|i}) F^\zeta_i A(\hat{\chi}_{i|i})^{-1}\xi \tag{19}$$

On retrouve l'expression du Jacobien associé à cette paramétrisation $F^\xi_i = A(\hat{\chi}_{i+1|i})) F^\zeta_i A(\hat{\chi}_{i|i})^{-1}$ [15]. De plus, on a pour la covariance, en utilisant (14)

$$P^\xi_{i+1|i} = F^\xi_i P^\xi_{i|i} (F^\xi_i)^\top + Q^\xi_i \tag{20}$$

$$= A(\hat{\chi}_{i+1|i}) F^\zeta_i A(\hat{\chi}_{i|i})^{-1} P^\xi_{i|i} (A(\hat{\chi}_{i+1|i}) F^\zeta_i A(\hat{\chi}_{i|i})^{-1})^\top + Q^\xi_i$$

$$= A(\hat{\chi}_{i+1|i}) F^\zeta_i P^\zeta_{i|i} (F^\zeta_i)^\top A(\hat{\chi}_{i+1|i})^\top + Q^\xi_i \tag{21}$$

**Proposition 1.** *Si $Q^\xi_i = A(\hat{\chi}_{i+1|i}) Q^\zeta_i A(\hat{\chi}_{i+1|i})^\top$, alors on a bien $P^\xi_{i+1|i} = A(\hat{\chi}_{i+1|i}) P^\zeta_{i+1|i} A(\hat{\chi}_{i+1|i})^\top$.*

Cette définition de $Q^\xi_i$ était connue [2, 15], mais, à nouveau, le lien avec l'équivalence des filtres n'avait jamais été fait.

### 3.2 Effet sur la mise à jour

Pour simplifier l'étude, on suppose que la mesure est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Généraliser ne pose pas de difficulté majeure. On a d'une part la linéarisation

$$h(\hat{\chi}_{i+1|i} \oplus \zeta) \approx h(\hat{\chi}_{i+1|i}) + H^\zeta \zeta \tag{22}$$

On obtient alors

$$h(\hat{\chi} \boxplus \xi) = h(\hat{\chi} \oplus A(\hat{\chi}_{i+1|i})^{-1}\xi) \approx h(\hat{\chi}) + H^\zeta A(\hat{\chi}_{i+1|i})^{-1}\xi \tag{23}$$

et on retrouve l'expression de $H^\xi = H^\zeta A(\hat{\chi}_{i+1|i})^{-1}$ [15]. On peut ainsi comparer les gains de Kalman $K^\zeta$ et $K^\xi$. A noter que le choix de paramétrisation n'a pas d'impact sur la distribution de $v_{i+1}$, puisqu'il ne vit pas dans $\mathcal{M}$. On a donc

$$K^\xi = P^\xi_{i+1|i}(H^\xi)^\top \left(H^\xi P^\xi_{i+1|i}(H^\xi)^\top + N_{i+1}\right)^{-1} \tag{24}$$

$$= \frac{P^\xi_{i+1|i} A(\hat{\chi}_{i+1|i})^{-\top}(H^\zeta)^\top \cdot}{\left(H^\zeta A(\hat{\chi}_{i+1|i})^{-1} P^\xi_{i+1|i} A(\hat{\chi}_{i+1|i})^{-\top}(H^\zeta)^\top + N_{i+1}\right)^{-1}} \tag{25}$$

$$= A(\hat{\chi}_{i+1|i}) P^\zeta_{i+1|i}(H^\zeta)^\top \left(H^\zeta P^\zeta_{i+1|i}(H^\zeta)^\top + N_{i+1}\right)^{-1} \tag{26}$$

$$= A(\hat{\chi}_{i+1|i}) K^\zeta \tag{27}$$

On en déduit que la mise à jour de l'état est identique pour les deux paramétrisations :

$$\hat{\chi}_{i+1|i} \oplus K^\zeta z = \hat{\chi}_{i+1|i} \boxplus K^\xi z \tag{28}$$

où $z = y_{i+1} - h(\hat{\chi}_{i+1|i})$ est l'innovation. Cependant, si la mise à jour de l'état est identique, une différence apparaît au niveau de la covariance. En effet, on obtient

$$P^\xi_{i+1|i+1} = A(\hat{\chi}_{i+1|i}) P^\zeta_{i+1|i+1} A(\hat{\chi}_{i+1|i})^\top \tag{29}$$

$$\implies \mathbf{P}^\xi_{\mathbf{i+1|i+1}} \neq \mathbf{A}(\hat{\chi}_{\mathbf{i+1|i+1}}) \mathbf{P}^\zeta_{\mathbf{i+1|i+1}} \mathbf{A}(\hat{\chi}_{\mathbf{i+1|i+1}})^\top \tag{30}$$

**Proposition 2.** *Un changement de paramétrisation crée un nouveau filtre, si aucune correction n'est appliquée à la covariance après mise à jour.*

Cette proposition explique la différence observée entre les deux filtres de Kalman invariants [2], et justifie qu'ils ne soient pas adaptés aux mêmes mesures. La différence disparaît si on s'assure que (30) soit vérifiée. Certaines approches proposent d'aplliquer du transport parallèle aux matrices de covariance après mise à jour afin de prendre en compte la courbure de l'espace [3, 18, 14]. L'effet de la paramétrisation sur une telle étape additionnelle sort du cadre de ce papier.

## 4 Effet de la paramétrisation sur le lissage

On s'intéresse maintenant à l'impact de la paramétrisation sur le lissage. Le lissage vise à estimer non plus l'état courant mais une trajectoire du système, à partir de toutes les mesures reçues. L'estimation peut se faire sur la trajectoire complète, ou bien sur une fenêtre glissante.

### 4.1 Estimation de la trajectoire complète

L'estimé est défini comme dans le cas euclidien par le MAP, qui amène à un moindre carré non linéaire :

$$\chi^* = \underset{\chi}{\operatorname{argmin}} \|\Psi(\chi)\|^2_\Sigma \tag{31}$$

Ce problème d'optimisation est classiquement résolu par une méthode de Gauss-Newton sur variété [1, 12, 5, 7]. Dans notre cas, étant donné un estimé $\hat{\chi}^{(n)}$, on peut obtenir la prochaine itération de deux manières :

$$\hat{\chi}^{(n+1)} = \hat{\chi}^{(n)} \boxplus \xi^{(n)}, \text{ OU}, \ \hat{\chi}^{(n+1)} = \hat{\chi}^{(n)} \oplus \zeta^{(n)} \tag{32}$$

$$\xi^{(n)} = \underset{\xi}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\chi}^{(n)} \boxplus \xi\|_\Sigma \tag{33}$$

$$\zeta^{(n)} = \underset{\zeta}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\chi}^{(n)} \oplus \zeta\|_\Sigma \tag{34}$$

De par leur définition théorique, on est censés avoir le même $\hat{\chi}^{(n+1)}$ dans les deux cas. En pratique, $\xi^{(n)}$ et $\zeta^{(n)}$ sont obtenus en linéarisant le problème, on doit donc vérifier si cette équivalence tient toujours. On a plus précisément, d'une part :

$$\xi^{(n)} \approx \underset{\xi}{\operatorname{argmin}} \|\Psi(\hat{\chi}^{(n)}) + \Psi^\xi \xi\|_\Sigma \tag{35}$$

$$= ((\Psi^\xi)^\top \Sigma^{-1} \Psi^\xi)^{-1} (\Psi^\xi)^\top \Sigma^{-1} \Psi(\hat{\chi}^{(n)}) \tag{36}$$

Et d'autre part

$$\zeta^{(n)} \approx \underset{\zeta}{\operatorname{argmin}} \|\Psi(\hat{\chi}^{(n)}) + \Psi^\zeta \zeta\|_\Sigma \tag{37}$$

$$= ((\Psi^\zeta)^\top \Sigma^{-1} \Psi^\zeta)^{-1} (\Psi^\zeta)^\top \Sigma^{-1} \Psi(\hat{\chi}^{(n)}) \tag{38}$$

Or, comme pour le cas de la mesure du filtrage (22), (23), on montre que

$$\Psi^\xi = \Psi^\zeta A(\hat{\chi}^{(n)})^{-1} \tag{39}$$

En injectant dans (36) et (38), on obtient que $\xi^{(n)} = A(\hat{\chi}^{(n)})\zeta^{(n)}$, et on a donc

$$\hat{\chi}^{(n)} \boxplus \xi^{(n)} = \hat{\chi}^{(n)} \oplus \zeta^{(n)} \tag{40}$$

**Proposition 3.** *Le lissage, pour une trajectoire complète, n'est pas impacté par le choix de paramétrisation.*

### 4.2 Fenêtre glissante, marginalisation et relinéarisation

La raison principale pour laquelle le lissage, contraitement au filtrage, n'est pas affecté par la paramétrisation est la relinéarisation. En effet, l'égalité (39) est valable si le point de linéarisation, auquel les jacobiens sont calculés, est l'estimé courant $\hat{\chi}^{(n)}$.

Or, pour des raisons de complexité de calcul, le lissage est souvent implémenté sous forme de fenêtre glissante, en marginalisant l'état le plus ancien [9, 7]. La marginalisation conduit à la formation d'un prior linéaire $\psi_0^{(\cdot)}$, dépendant de la paramétrisation choisie, et s'écrivant :

$$\psi_0^\xi(\hat{\chi} \boxplus \xi) = \|\Psi_0^\xi \xi - a_0^\xi\|, \quad \psi_0^\zeta(\hat{\chi} \oplus \zeta) = \|\Psi_0^\zeta \zeta - a_0^\zeta\| \tag{41}$$

Soit $\hat{\chi}^{(n_0)}$ la trajectoire estimée au moment de la marginalisation. On a alors, d'après (39) et la formule du complément de Schur utilisée pour la marginalisation :

$$\Psi_0^\xi = \Psi_0^\zeta A(\hat{\chi}^{(n_0)})^{-1} \tag{42}$$

Etant obtenues par marginalisation, ces deux matrices sont figées. Cela signifie que, après la prochaine itération, (42) restera vraie. En particulier, on aura $\Psi_0^\xi \neq \Psi_0^\zeta A(\hat{\chi}^{(n)})^{-1}$ pour $n \geq n_0$. Et ainsi

$$\forall n \geq n_0,\ \xi^{(n)} \neq \zeta^{(n)} \tag{43}$$

**Proposition 4.** *La marginalisation crée une différence entre les lissages sur variété utilisant des paramétrisations différentes.*

On retrouve ici un résultat analogue à celui obtenu pour le filtrage, où l'impact du choix de paramétrisation venait du fait de ne pas relinéariser. Ce résultat éclaire aussi, sans l'expliquer totalement, la différence entre les paramétrisations de [12] et [10]. Enfin, il permet d'étendre aux filtres itérés :

**Corollaire 1.** *Un filtre de Kalman sur variété itéré correspond à une fenêtre glissante de taille 1, et est donc confronté au même phénomène.*

# 5 Conclusion

Dans cet article, on a étudié l'effet du choix de paramétrisation sur l'estimation d'état sur variété. On a montré qu'une implémentation "naïve" produit une différence d'estimation, au moment de la mise à jour de la covariance pour le filtrage, et après marginalisation pour le lissage par fenêtre glissante. Ces résultats éclairent les différences de performance observées dans la littérature. Ils ouvrent aussi la voie à l'ajout de potentielles corrections, mais le "bon choix" de paramétrisation reste à étudier.

# Références


[1] Pierre-Antoine ABSIL, Robert MAHONY et Rodolphe SEPULCHRE : *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[2] Axel BARRAU et Silvère BONNABEL : The invariant extended kalman filter as a stable observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4):1797–1812, April 2017.

[3] Guillaume BOURMAUD, Rémi MÉGRET, Marc ARNAUDON et Audrey GIREMUS : Continuous-Discrete Extended Kalman Filter on Matrix Lie Groups Using Concentrated Gaussian Distributions. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 51(1):209–228, 2015.

[4] Guillaume BOURMAUD, Rémi MÉGRET, Audrey GIREMUS et Yannick BERTHOUMIEU : Discrete extended Kalman filter on Lie groups. *In Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2013 Proceedings of the 21st European*, pages 1–5. IEEE, 2013.

[5] Guillaume BOURMAUD, Rémi MÉGRET, Audrey GIREMUS et Yannick BERTHOUMIEU : From intrinsic optimization to iterated extended kalman filtering on lie groups. *J. Math. Imaging Vis.*, 55(3):284–303, juillet 2016.

[6] Lubin CHANG et Yarong LUO : Log-linear error state model derivation without approximation for ins. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 59(2):2029–2035, 2023.

[7] Paul CHAUCHAT, Axel BARRAU et Silvere BONNABEL : Invariant Smoothing on Lie Groups. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS 2018*, Madrid, Spain, octobre 2018.

[8] Gregory S. CHIRIKJIAN : *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups, Volume 1 : Classical Results and Geometric Methods*. Applied and numerical harmonic analysis. Birkhäuser, 2009.

[9] Han-Pang CHIU, Stephen WILLIAMS, Frank DELLAERT, Supun SAMARASEKERA et Rakesh KUMAR : Robust vision-aided navigation using sliding-window factor graphs. *In 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 46–53. IEEE, 2013.

[10] Frank DELLAERT : The new imu factor. URL `https://raw.githubusercontent.com/borglab/gtsam/develop/doc/ImuFactor.pdf`. [Online ; accessed 05-March-2025].

[11] Frank DELLAERT et Michael KAESS : Square root sam : Simultaneous localization and mapping via square root information smoothing. *The International Journal of Robotics Research*, 25(12):1181–1203, 2006.

[12] Christian FORSTER, Luca CARLONE, Frank DELLAERT et Davide SCARAMUZZA : On-manifold preintegration for real-time visual–inertial odometry. *IEEE Transactions on Robotics*, 33(1):1–21, Feb 2017.

[13] Michael KAESS, Hordur JOHANNSSON, Richard ROBERTS, Viorela ILA, John J. LEONARD et Frank DELLAERT : iSAM2 : Incremental smoothing and mapping using the Bayes tree. *The International Journal of Robotics Research*, 31:217–236, 2012.

[14] Robert MAHONY, Pieter VAN GOOR et Tarek HAMEL : Observer design for nonlinear systems with equivariance. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, 5(1):221–252, 2022.

[15] Easton R. POTOKAR, Randal W. BEARD et Joshua G. MANGELSON : An introduction to the invariant extended kalman filter [lecture notes]. *IEEE Control Systems*, 44(6):50–71, 2024.

[16] Jun TANG, Hongwei BIAN, Heng MA et Rongying WANG : Initialization of sins/gnss error covariance matrix based on error states correlation. *IEEE Access*, 11:94911–94917, 2023.

[17] Niels van DER LAAN, Mitchell COHEN, Jonathan ARSENAULT et James Richard FORBES : The invariant rauch-tung-striebel smoother. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 5(4):5067–5074, 2020.

[18] Josip ĆESIĆ, Ivan MARKOVIĆ, Mario BUKAL et Ivan PETROVIĆ : Extended information filter on matrix lie groups. *Automatica*, 82:226 – 234, 2017.