

# Décomposition en termes bloc-bloc pour l'imagerie à valeur matricielle

Saulo CARDOSO BARRETO Julien FLAMANT Sebastian MIRON David BRIE

Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

**Résumé** – Cet article introduit une nouvelle décomposition tensorielle pour les tenseurs d'ordre 4, appelée décomposition en termes bloc-bloc (BBTD) et motivée par des applications en imagerie à valeur matricielle. Après avoir décrit les propriétés du modèle (ambiguïtés, complexité), nous établissons une condition nécessaire et une condition suffisante pour l'identifiabilité. Un algorithme de type ALS est également décrit et validé numériquement. Ce travail théorique ouvre des perspectives intéressantes pour l'utilisation de modèles tensoriels dans cette modalité d'imagerie.

**Abstract** – This article introduces a new tensor decomposition for 4th-order tensors, called block-block terms decomposition (BBTD) and motivated by applications in matrix-valued imaging. After describing the properties of the model (ambiguities, complexity), we establish conditions for identifiability. An ALS-type algorithm is also described and numerically validated. This theoretical work opens up interesting prospects for the use of tensor models in this imaging modality.

## 1 Introduction

De nombreuses applications reposent sur l'acquisition, l'estimation et l'analyse d'images matricielles, où chaque pixel est associé à une matrice encodant des informations physiques d'intérêt. On citera notamment l'imagerie polarimétrique, tant optique (imagerie de Stokes et de Mueller) [1] que radar (PolSAR) [2]. Un autre exemple important concerne l'IRM de diffusion (Diffusion Tensor Imaging, DTI), où en chaque pixel une matrice symétrique décrit l'anisotropie du milieu [3]. Enfin, l'imagerie des matrices émission-excitation de fluorescence (MEEF) permet de caractériser les propriétés spatiales de fluorescence d'un milieu [4].

Une image à valeurs matricielles peut être naturellement représentée sous la forme d'un tableau multidimensionnel en 4 dimensions, aussi appelée *tenseur d'ordre 4*, où les deux premières dimensions (*modes*) correspondent aux variables d'espace et où les deux dernières encodent la valeur matricielle des pixels de l'image. Si l'intérêt des approches tensorielles pour le traitement de données en grandes dimensions n'est plus à établir [5], notamment en raison de la faible complexité des modèles et des garanties d'unicité, leur utilisation s'est majoritairement concentrée sur les tenseurs d'ordre 3, en particulier pour le traitement et le démixage de cubes hyperspectraux [6]. Des tenseurs de plus haut ordre sont également considérés dans d'autres domaines tels que la chimométrie, la neuroimagerie. Toutefois, à notre connaissance, aucun travail ne traite explicitement le cas des tenseurs d'ordre 4 dans un cadre d'imagerie où chaque pixel est associé à une matrice.

Cet article considère une nouvelle décomposition tensorielle pour les tenseurs d'ordre 4, appelée décomposition en termes bloc-bloc (BBTD). Elle peut être vue comme une extension du modèle de mélange linéaire classique (utilisé en imagerie hyperspectrale, notamment) au cas de l'imagerie matricielle. Ce travail porte sur l'analyse des propriétés du modèle BBTD, incluant ses ambiguïtés triviales et sa complexité. Nous présentons une condition nécessaire et une condition suffisante pour l'identifiabilité du modèle, ainsi qu'un premier algorithme pour la résolution du problème d'approximation. La présentation, plutôt théorique, sert de préambule à une prépublication [7], dans laquelle les contraintes spécifiques liées à l'application en imagerie à valeur matricielle sont détaillées.

## 2 Préliminaires

**Notations** Soit  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les vecteurs et matrices sont représentés respectivement par  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{M}$ . Les tenseurs d'ordre supérieurs, ou simplement tenseurs, sont notés  $\mathcal{T}$ . Le symbole  $\mathbf{1}_N$  désigne un vecteur colonne de « 1 » de taille  $N$ . La norme de Frobenius d'un vecteur, matrice ou tenseur est notée  $\|\cdot\|_F$ . Les notations  $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$  et  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  désignent respectivement les produits extérieur, de Khatri-Rao et de Kronecker de deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . Enfin, on désigne par  $\mathcal{T}_{(n)}$  le dépliement matriciel d'un tenseur  $\mathcal{T}$  suivant son  $n^{\text{ème}}$  mode, où l'arrangement des coefficients suit la convention de [8].

**Décomposition CP** Un tenseur  $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  d'ordre  $N \geq 3$  admet une décomposition de type Canonique Polyadique (CPD) de rang  $R$  s'il s'écrit comme la somme de tenseurs de rang 1 ( $R$  étant minimal)

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^R \mathbf{z}_r^{(1)} \circ \mathbf{z}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{z}_r^{(N)}. \quad (1)$$

Par concaténation, on définit traditionnellement  $N$  matrices facteurs  $\mathbf{Z}^{(n)} = [\mathbf{z}_1^{(n)} \dots \mathbf{z}_R^{(n)}] \in \mathbb{F}^{I_n \times R}$ , d'où l'écriture compacte de (1) comme  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{Z}^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}^{(N)} \rrbracket_{\text{CPD}}$ . Le dépliement matriciel selon le mode- $n$  est la matrice  $\mathcal{T}_{(n)}$  de taille  $I_n \times I_1 \cdots I_{n-1} I_{n+1} \cdots I_N$ :

$$\mathcal{T}_{(n)} = \mathbf{Z}^{(n)} (\mathbf{Z}^{(N)} \odot \dots \odot \mathbf{Z}^{(n+1)} \odot \mathbf{Z}^{(n-1)} \odot \dots \odot \mathbf{Z}^{(1)})^\top. \quad (2)$$

Une propriété fondamentale du modèle CP réside dans l'existence de garanties d'unicité de la décomposition (1) sous des conditions très relaxées. Au delà des ambiguïtés triviales (facteurs d'échelle et permutation des colonnes des matrices facteurs), la décomposition (1) est unique si la condition de Kruskal est vérifiée [9], i.e.  $\sum_{n=1}^N k_{\mathbf{Z}^{(n)}} \geq 2R + (N - 1)$ , où  $k_{\mathbf{Z}^{(n)}}$  dénote le  $k$ -rang de  $\mathbf{Z}^{(n)}$ , le plus grand entier  $r$  tel que tout sous-ensemble de  $r$  colonnes forme une famille libre. On notera que, contrairement au cas matriciel, le rang  $R$  peut excéder une ou plusieurs dimensions du tenseur.

**Modèle BTD-LL1** Dans le cas particulier d'un tenseur d'ordre 3, une décomposition populaire est le modèle BTD-

LL1, qui décompose un tenseur en somme de termes de rang- $(L_r, L_r, 1)$  [10]. Explicitement, pour  $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  :

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{Z}_r^{(1)} \mathbf{Z}_r^{(2)\top}) \circ \mathbf{z}_r^{(3)}, \quad (3)$$

où  $R$  est le rang de la décomposition. Pour  $1 \leq r \leq R$ , on a  $\mathbf{Z}_r^{(1)} \in \mathbb{F}^{I_1 \times L_r}$ ,  $\mathbf{Z}_r^{(2)} \in \mathbb{F}^{I_2 \times L_r}$ , et  $\mathbf{z}_r^{(3)} \in \mathbb{F}^{I_3}$ . Le modèle BTD-LL1 est particulièrement utile en imagerie, où les deux premiers modes correspondent aux dimensions spatiales et où le dernier encode une signature physique (hyperspectrale, polarimétrique, etc.). Le modèle BTD-LL1 permet alors, par des contraintes physiques supplémentaires, de garantir l'unicité des reconstructions par la modélisation rang faible (3) [6], [11]. L'identifiabilité du modèle BTD-LL1 est basée sur l'extension au cas de matrices facteurs partitionnées [10] des outils utilisés pour la CPD. Ainsi, (3) est *identifiable* si

$$I_1 I_2 \geq \sum_{r=1}^R L_r^2 \quad \text{et} \quad k'_{\mathbf{Z}^{(1)}} + k'_{\mathbf{Z}^{(2)}} + k_{\mathbf{Z}^{(3)}} \geq 2R + 2, \quad (4)$$

où le  $k'$ -rang ( $k'_{\mathbf{Z}^{(n)}}$ ), est, pour une partition donnée, l'entier  $r$  le plus grand pour lequel tout ensemble de colonnes de  $r$  sous-matrices de  $\mathbf{Z}^{(n)}$  forme une famille libre. Pour d'autres conditions suffisantes, voir [10].

## 3 Modèle BBTD

### 3.1 Définition et propriétés

**Définition** Soit un tenseur  $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{I \times J \times K \times L}$  d'ordre 4. On dit que  $\mathcal{T}$  admet une représentation en termes bloc-bloc (BBTD) s'il peut s'exprimer comme une somme de  $R$  termes, où chaque terme s'écrit comme un produit extérieur  $\mathbf{U}_r \circ \mathbf{V}_r$ , où  $\mathbf{U}_r \in \mathbb{F}^{I \times J}$  et  $\mathbf{V}_r \in \mathbb{F}^{K \times L}$  sont de rang faible. Formellement,  $\mathcal{T}$  suit un modèle BBTD si

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^R \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^\top \circ \mathbf{C}_r \mathbf{D}_r^\top = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rrbracket_{\text{BBTD}}, \quad (5)$$

où les blocs satisfont<sup>1</sup>  $\text{rang } \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^\top = L_1 \leq \min(I, J)$  et  $\text{rang } \mathbf{C}_r \mathbf{D}_r^\top = L_2 \leq \min(K, L)$ . La définition (5) introduit 4 matrices facteurs  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  partitionnées par blocs; on a par exemple  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_R] \in \mathbb{F}^{I_1 \times L_1 R}$ , la définition des autres matrices facteurs suivant naturellement. En imagerie, le modèle (5) s'interprète comme un mélange linéaire de  $R$  termes, où le bloc  $\mathbf{U}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^\top$  encode une activation spatiale de la matrice (source) élémentaire  $\mathbf{V}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{D}_r^\top$ . Les *a priori* de rang faible permettent : (i) de réduire grandement le nombre de variables à estimer; (ii) d'encoder des informations physiques sur la source  $\mathbf{V}_r$ , *e.g.*, en imagerie Stokes polarimétrique, choisir  $L_2 = 1$  force une décomposition en états totalement polarisés; (iii) d'assurer l'identifiabilité du modèle

**Ambiguïtés triviales** Le modèle BBTD (5), comme toute décomposition tensorielle, admet des ambiguïtés dites triviales liées aux éventuelles permutations et facteurs d'échelles entre matrices facteurs. Supposons que  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rrbracket_{\text{BBTD}}$  et considérons une décomposition alternative  $\mathcal{T} = \llbracket \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}} \rrbracket_{\text{BBTD}}$ . Les deux décompositions sont

<sup>1</sup>La définition la plus générale considère des rangs dépendant de  $r$ , *i.e.*,  $\{L_{1r}\}$  et  $\{L_{2r}\}$ , cas que nous omettons ici par souci de simplification.

dites *trivialement reliées* si les facteurs peuvent être reliés par la composition d'une ou plusieurs des transformations suivantes : 1) permutation des termes blocs-blocs; 2) facteur d'échelle inter-bloc; 3) indétermination de sous-espace associé à chaque bloc. Plus précisément, soit  $\mathbf{U}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^\top$  et  $\mathbf{V}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{D}_r^\top$  les deux blocs du  $r^{\text{ème}}$  terme bloc-bloc de  $\mathcal{T}$ . L'ambiguïté 1) correspond à l'existence d'une permutation  $\sigma$  telle que  $(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{V}}_r) = \sigma((\mathbf{U}_r, \mathbf{V}_r))$ , pour tout  $1 \leq r \leq R$ . L'ambiguïté 2) stipule qu'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_R \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$  tels que  $\tilde{\mathbf{U}}_r = \lambda_r \mathbf{U}_r$  et  $\tilde{\mathbf{V}}_r = \lambda_r^{-1} \mathbf{V}_r$ , pour tout  $1 \leq r \leq R$ . Enfin, 3) stipule qu'il existe, pour chaque  $r$ , deux matrices inversibles  $\mathbf{P}_r \in \mathbb{F}^{L_1 \times L_1}$  et  $\mathbf{Q}_r \in \mathbb{F}^{L_2 \times L_2}$  telles que  $\tilde{\mathbf{A}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{P}_r$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_r = \mathbf{B}_r (\mathbf{P}_r^\top)^{-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{Q}_r$  et  $\tilde{\mathbf{D}}_r = \mathbf{D}_r (\mathbf{Q}_r^\top)^{-1}$ . Cette dernière ambiguïté montre que seuls les sous-espaces engendrés par les colonnes des matrices facteurs peuvent être identifiés par le modèle BBTD. Enfin, si toute décomposition BBTD alternative peut être trivialement reliée à la décomposition initiale, alors le modèle BBTD (5) est dit *identifiable*; cette notion est détaillée en Section 3.2.

**Complexité du modèle** Le modèle BBTD s'avère particulièrement intéressant dès lors qu'il s'agit de *compresser* l'information présente dans le tenseur. En effet, un tenseur  $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{I \times J \times K \times L}$  encode  $n_{\text{tenseur}} = IJKL$  variables, ce qui donne par exemple pour  $I = J = K = L = 100$  un nombre  $n_{\text{tenseur}} = 10^8$  variables! Le modèle BBTD, comme décomposition tensorielle, permet de combattre cette malédiction de la dimension en rendant le nombre d'inconnues dans  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rrbracket$  linéaire en ses dimensions. Une analyse minutieuse du nombre d'inconnues du modèle BBTD (voir [7]), mène à

$$n_{\text{BBTD}} = R[L_1(I + J - L_1) + L_2(K + L - L_2) - 1]. \quad (6)$$

On notera qu'un calcul naïf de  $n_{\text{BBTD}}$  donnerait  $R[(I + J)L_1 + (K + L)L_2]$ . La différence avec (6) s'explique par la prise en compte explicite des ambiguïtés triviales du modèle BBTD, qui réduit de plus la valeur  $n_{\text{BBTD}}$ . Pour l'exemple ci-dessus, avec  $I = J = K = L = 100$  et  $(L_1, L_2) = (10, 10)$ , on obtient ainsi  $n_{\text{BBTD}} = 3799R$ , où  $R$  est le nombre de termes bloc-bloc. Cela correspond à un taux de compression égal à  $c = n_{\text{BBTD}} / (n_{\text{tenseur}} R) \approx 3.8 \times 10^{-5}$ , soit une division par plus de 5000 du nombre de variables indépendantes pour  $R = 5$  termes bloc-bloc. La Table 1 donne des exemples additionnels, en particulier pour un tenseur de taille  $100 \times 100 \times 4 \times 4$ , correspondant à une application typique d'imagerie de matrice de covariance (telle que l'imagerie de Mueller).

### 3.2 Identifiabilité

On s'intéresse à présent à l'identifiabilité du modèle BBTD (5), c'est-à-dire sous quelles conditions toute décomposition alternative peut être reliée trivialement à l'originale, sans autres ambiguïtés. L'étude du nombre de paramètres indépendants dans BBTD, détaillée précédemment, permet de donner une première condition *nécessaire* d'identifiabilité.

**Proposition 1** (Condition nécessaire). *Supposons  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rrbracket_{\text{BBTD}}$  identifiable. Alors  $n_{\text{BBTD}} \leq n_{\text{tenseur}}$ .*

Autrement dit, pour qu'un modèle BBTD soit identifiable, on doit choisir les paramètres  $(R, L_1, L_2)$  de telle sorte à ce que le nombre de variables indépendantes soit inférieur

dimensions de $\mathcal{T}$	100 × 100 × 100 × 100			100 × 100 × 4 × 4		
paramètres BBTD ( $L_1, L_2$ )	(5, 8)	(12, 4)	(10, 10)	(10, 1)	(10, 2)	(20, 2)
taux de compression $c$ $n_{\text{BBTD}} = c \times n_{\text{tensor}} \times R$	$2.5 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-5}$	$3.8 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-2}$
rang maximal ( $\mathcal{T}^{1:2}, \mathcal{T}^{3:4}$ ) cf. Proposition 2	(22, 38)	(48, 14)	(18, 18)	(6, 17)	(2, 17)	(2, 8)

TABLE 1 : Propriétés de compression et d'identifiabilité du modèle BBTD (5) pour différentes dimensions et paramètres ( $L_1, L_2$ ).

au nombre d'éléments du tenseur. Toutefois, très souvent cette condition nécessaire n'est pas restrictive. Par exemple, pour un tenseur de taille  $100 \times 100 \times 4 \times 4$  on obtient pour  $(L_1, L_2) = (20, 2)$  un rang maximal  $R = 44$ , très au-dessus du rang maximal  $R = 8$  pour lequel les conditions suffisantes ci-après garantissent l'identifiabilité. L'obtention de conditions suffisantes d'identifiabilité pour le modèle BBTD repose sur son interprétation comme un modèle BTDD-LL1 par combinaison de 2 modes adjacents. Soit  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rrbracket_{\text{BBTD}}$ . En combinant les modes 1 et 2, on obtient un tenseur d'ordre 3, noté  $\mathcal{T}^{1:2} \in \mathbb{F}^{I \times J \times K \times L}$  qui s'exprime

$$\mathcal{T}^{1:2} = \sum_{r=1}^R \text{vec}(\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^\top) \circ \mathbf{C}_r \mathbf{D}_r^\top, \quad (7)$$

c'est-à-dire  $\mathcal{T}^{1:2}$  se décompose en une somme de  $R$  termes de rang- $(1, L_2, L_2)$ , soit une permutation triviale du modèle BTDD-LL1 (3). La combinaison des modes 3 et 4 donne quant à elle un tenseur d'ordre 3  $\mathcal{T}^{3:4} \in \mathbb{F}^{I \times J \times KL}$  tel que

$$\mathcal{T}^{3:4} = \sum_{r=1}^R \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^\top \circ \text{vec}(\mathbf{C}_r \mathbf{D}_r^\top), \quad (8)$$

soit la définition d'une décomposition en  $R$  termes de rang- $(L_1, L_1, 1)$ , une autre instance de modèle BTDD-LL1. La preuve de ces résultats est directe en explicitant les entrées du tenseur  $\mathcal{T}$ . Ces deux interprétations (7) et (8) permettent d'exploiter les résultats existants portant sur l'identifiabilité du modèle BTDD-LL1 [10]. Comme indiqué ci-dessous, ces deux points de vue sont complémentaires pour l'identifiabilité de BBTD.

**Proposition 2** (Condition suffisante). Soit  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rrbracket_{\text{BBTD}}$ . Si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée

1. le modèle BTDD-LL1 (7) de  $\mathcal{T}^{1:2}$  est identifiable;
2. le modèle BTDD-LL1 (8) de  $\mathcal{T}^{3:4}$  est identifiable;

alors le modèle BBTD de  $\mathcal{T}$  est identifiable.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rrbracket_{\text{BBTD}}$ . Par (7), la vectorisation partielle  $\mathcal{T}^{1:2}$  suit un modèle BTDD-LL1 en termes de rang- $(1, L_1, L_1)$ . Supposons que (7) soit identifiable au sens BTDD-LL1. Alors,  $\text{vec}(\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^\top)$  et  $(\mathbf{C}_r \mathbf{D}_r^\top)$  sont identifiables. Par suite, les blocs  $\mathbf{U}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^\top$  et  $\mathbf{V}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{D}_r^\top$  de BBTD peuvent être retrouvés de manière unique. Par conséquent, la BBTD de  $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rrbracket$  est identifiable. Un raisonnement similaire pour  $\mathcal{T}^{3:4}$  donne la seconde condition, et conclut la preuve.  $\square$

La proposition 2 permet d'exploiter les conditions d'identifiabilité connues pour la décomposition BTDD-LL1 [10]. L'utilisation de deux points de vue complémentaires (liés à  $\mathcal{T}^{1:2}$  et

$\mathcal{T}^{3:4}$ ) permet de « choisir », pour un même jeu de paramètres ( $L_1, L_2$ ), la condition suffisante (e.g., (4)) la plus favorable. La Table 1 présente ainsi les couples de rangs maximaux obtenus par application des conditions d'identifiabilité génériques dans [10]. Pour un tenseur  $100 \times 100 \times 100 \times 100$ , et choix de paramètres  $(L_1, L_2) = (5, 8)$ , le point de vue  $\mathcal{T}^{1:2}$  donne ainsi un rang maximal  $R = 22$ , tandis que  $\mathcal{T}^{3:4}$  donne  $R = 38$ . A l'inverse, pour un choix  $(L_1, L_2) = (12, 4)$ , c'est la condition sur  $\mathcal{T}^{1:2}$  qui est plus favorable ( $R = 48$  contre  $R = 14$  pour  $\mathcal{T}^{3:4}$ ). On notera que lorsque l'on traite des tenseurs dont les dimensions des deux blocs diffèrent de manière significative (typique de l'imagerie de matrices de covariance), le dépliement du bloc avec les dimensions les plus petites fournit généralement les meilleures conditions d'unicité. Par exemple, considérons un tenseur où  $I = J = 100$  et  $K = L = 4$ . Dans ce scénario, le dépliement  $\mathcal{T}^{3:4}$  atteint généralement le rang  $R$  le plus élevé possible, tandis que le dépliement  $\mathcal{T}^{1:2}$  n'est pertinent que lorsque  $L_2 = 1$  et  $L_1$  est grand.

### 3.3 Interprétation PARALIND/ CONFAC

Le modèle BBTD (5) peut être vu comme une CPD d'ordre 4 avec colinéarités entre colonnes des matrices de facteurs. Ce cas particulier correspond au modèle PARALIND [12], encore appelée CONFAC [13]. Cette interprétation s'avère particulièrement utile pour établir un algorithme pratique pour le modèle BBTD (5), cf. Section 3.4. Plus précisément, la structure bloc-bloc dans (5) peut être imposée par deux matrices de contraintes  $\Phi$  et  $\Psi$  telles que

$$\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rrbracket_{\text{BBTD}} = \llbracket \mathbf{A}\Phi, \mathbf{B}\Phi, \mathbf{C}\Psi, \mathbf{D}\Psi \rrbracket_{\text{CPD}}, \quad (9)$$

où les matrices de contraintes sont données par

$$\Phi = \text{bdiag}(\mathbf{I}_{L_1} \otimes \mathbf{1}_{L_2}^\top, \dots, \mathbf{I}_{L_1} \otimes \mathbf{1}_{L_2}^\top), \quad (10)$$

$$\Psi = \text{bdiag}(\mathbf{1}_{L_1}^\top \otimes \mathbf{I}_{L_2}, \dots, \mathbf{1}_{L_1}^\top \otimes \mathbf{I}_{L_2}), \quad (11)$$

Pour le  $r$ ème terme bloc-bloc, la matrice de contrainte  $\Phi$  reproduit  $L_2$  fois les colonnes de  $\mathbf{A}_r$  et  $\mathbf{B}_r$ , tandis que la matrice de contrainte  $\Psi$  répète alternativement  $L_1$  fois les colonnes de  $\mathbf{C}_r$  et  $\mathbf{D}_r$  pour faire correspondre les deux blocs ensemble.

Lorsque  $L_1 = L_2 = 1$ , on obtient  $\Phi = \Psi = \mathbf{I}_R$ , le modèle BBTD dégénérant en une décomposition CP usuelle. L'interprétation (9) permet d'écrire directement les déploiements matriciels du modèle BBTD :

$$\mathbf{T}_{(1)} = \mathbf{A}\Phi(\mathbf{D}\Psi \circ \mathbf{C}\Psi \circ \mathbf{B}\Phi)^\top \in \mathbb{F}^{I \times JKL}, \quad (12)$$

$$\mathbf{T}_{(2)} = \mathbf{B}\Phi(\mathbf{D}\Psi \circ \mathbf{C}\Psi \circ \mathbf{A}\Phi)^\top \in \mathbb{F}^{J \times IKL}, \quad (13)$$

$$\mathbf{T}_{(3)} = \mathbf{C}\Psi(\mathbf{D}\Psi \circ \mathbf{B}\Phi \circ \mathbf{A}\Phi)^\top \in \mathbb{F}^{K \times IJL}, \quad (14)$$

$$\mathbf{T}_{(4)} = \mathbf{D}\Psi(\mathbf{C}\Psi \circ \mathbf{B}\Phi \circ \mathbf{A}\Phi)^\top \in \mathbb{F}^{L \times IJK}. \quad (15)$$

Notons qu'il n'est pas possible d'utiliser les conditions d'identifiabilité CONFAC existantes pour le modèle BBTD, car celles-ci requièrent l'absence de colinéarités dans une matrice facteur – ce qui n'est pas le cas ici.

### 3.4 Algorithme ALS

L'interprétation du modèle BBTD comme un modèle PARALIND / CONFAC via les dépliements matriciels explicites (12) – (15) mène à un algorithme naturel de type *Alternating Least Squares (ALS)* pour l'estimation des matrices facteurs du modèle BBTD. Formellement, on résout le problème d'optimisation suivant

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}} \|\mathcal{T} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]_{\text{BBTD}}\|_F^2 \quad (16)$$

par une série de problèmes de type moindres carrés matriciels en minimisant par rapport à chacune des matrices facteurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ , les facteurs restant étant fixés. Il s'agit de l'approche classique pour les décompositions tensorielles sans contraintes [14]. Les itérations sont explicites : le  $(k+1)$ -ème cycle de minimisation est donné par

$$\mathbf{A}^{k+1} \leftarrow (\mathbf{T}_{(1)} \mathbf{M}_1^H) (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_1^H)^{-1},$$

où  $\mathbf{M}_1 = \Phi(\mathbf{D}^k \Psi \odot \mathbf{C}^k \Psi \odot \mathbf{B}^k \Phi)^\top$ , (17)

$$\mathbf{B}^{k+1} \leftarrow (\mathbf{T}_{(2)} \mathbf{M}_2^H) (\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_2^H)^{-1},$$

où  $\mathbf{M}_2 = \Phi(\mathbf{D}^k \Psi \odot \mathbf{C}^k \Psi \odot \mathbf{A}^{k+1} \Phi)^\top$ , (18)

$$\mathbf{C}^{k+1} \leftarrow (\mathbf{T}_{(3)} \mathbf{M}_3^H) (\mathbf{M}_3 \mathbf{M}_3^H)^{-1},$$

où  $\mathbf{M}_3 = \Psi(\mathbf{D}^k \Psi \odot \mathbf{B}^{k+1} \Phi \odot \mathbf{A}^{k+1} \Phi)^\top$ , (19)

$$\mathbf{D}^{k+1} \leftarrow (\mathbf{T}_{(4)} \mathbf{M}_4^H) (\mathbf{M}_4 \mathbf{M}_4^H)^{-1},$$

où  $\mathbf{M}_4 = \Psi(\mathbf{C}^{k+1} \Psi \odot \mathbf{B}^{k+1} \Phi \odot \mathbf{A}^{k+1} \Phi)^\top$ , (20)

jusqu'à convergence, un critère d'arrêt typique étant une amélioration insuffisante du coût global (16). En pratique, les mises à jour explicites ci-dessus sont remplacées par une résolution efficace des équations normales associées, par des solveurs de systèmes linéaires dédiés<sup>2</sup>.

**Validation numérique** La Figure 1 illustre les performances de reconstruction de l'algorithme ALS. On considère un tenseur bruité  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{B}$  de taille  $40 \times 40 \times 15 \times 15$ , tel que  $\mathcal{T}_0$  suive un modèle BBTD de paramètres  $L_1 = 10$ ,  $L_2 = 5$  et  $R = 3$ , et où  $\mathcal{B}$  est un tenseur d'entrées gaussiennes i.i.d. de variance  $\sigma^2$ . Cinq niveaux de SNR ont été testés, où  $\text{SNR} = \|\mathcal{T}_0\|_F^2 / (IJKL\sigma^2)$ . On s'intéresse à l'erreur de reconstruction  $\varepsilon_{\hat{\mathcal{T}}} = \|\hat{\mathcal{T}} - \mathcal{T}_0\|_F^2 / \|\mathcal{T}_0\|_F^2$  ainsi qu'à l'erreur d'estimation des blocs  $\varepsilon_{\hat{\mathbf{U}}} = \|\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}_0\|_F^2 / \|\mathbf{U}_0\|_F^2$  et  $\varepsilon_{\hat{\mathbf{V}}} = \|\hat{\mathbf{V}} - \mathbf{V}_0\|_F^2 / \|\mathbf{V}_0\|_F^2$ , où les matrices sont construites par vectorisation des deux blocs dans (5). Les valeurs affichées correspondent à la médiane de 50 simulations de Monte-Carlo. On observe que l'erreur de reconstruction reste satisfaisante, même dans des conditions très bruitées, ce qui témoigne de la robustesse de la méthode proposée, que ce soit pour l'estimation des blocs facteurs ou la reconstruction du tenseur.

## 4 Discussion

Ce travail étudie le modèle BBTD, une nouvelle décomposition de rang faible pour les tenseurs d'ordre 4 et motivée par des

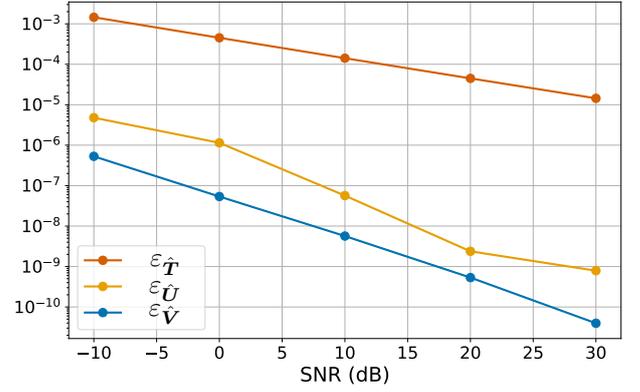


FIGURE 1 : Performances reconstruction de l'algorithme ALS.

applications en imagerie à valeurs matricielles. Les travaux futurs porteront sur l'utilisation de cette décomposition pour cette modalité d'imagerie non-conventionnelle. Cela implique la prise en compte de contraintes physiques sur les facteurs (non-négativité, symétrie, etc.) pour garantir l'interprétabilité des analyses et traitements, et par suite, le développement d'une méthodologie dédiée et détaillée dans [7].

## Références

- [1] R. M. AZZAM, "Stokes-vector and Mueller-matrix polarimetry", *Journal of the Optical Society of America A*, t. 33, n° 7, p. 1396-1408, 2016.
- [2] J.-S. LEE et E. POTTIER, *Polarimetric radar imaging : from basics to applications*. CRC press, 2017.
- [3] J.-D. TOURNIER et al., "Diffusion tensor imaging and beyond", *Magnetic resonance in medicine*, t. 65, n° 6, p. 1532, 2011.
- [4] O. KATZ et al., "Fluorescence Excitation-Emission-Matrix Imaging", *Analytical Chemistry*, t. 95, n° 34, p. 12 631-12 639, 2023.
- [5] N. D. SIDIROPOULOS et al., "Tensor decomposition for signal processing and machine learning", *IEEE Transactions on signal processing*, t. 65, n° 13, p. 3551-3582, 2017.
- [6] M. DING et al., "Hyperspectral super-resolution via interpretable block-term tensor modeling", *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, t. 15, n° 3, p. 641-656, 2020.
- [7] S. CARDOSO BARRETO et al., *Tensor Block-Block Terms Decomposition for Covariance Matrix Imaging Applications*, prépublication, hal-05059862, 2025.
- [8] T. G. KOLDA et B. W. BADER, "Tensor Decompositions and Applications", en, *SIAM Review*, t. 51, n° 3, p. 455-500, août 2009, ISSN : 0036-1445, 1095-7200.
- [9] N. D. SIDIROPOULOS et R. BRO, "On the uniqueness of multilinear decomposition of N-way arrays", *Journal of Chemometrics : A Journal of the Chemometrics Society*, t. 14, n° 3, p. 229-239, 2000.
- [10] L. DE LATHAUWER, "Decompositions of a higher-order tensor in block terms—Part II : Definitions and uniqueness", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, t. 30, n° 3, p. 1033-1066, 2008.
- [11] C. PRÉVOST et al., "Hyperspectral super-resolution accounting for spectral variability : Coupled tensor LL1-based recovery and blind unmixing of the unknown super-resolution image", *SIAM Journal on Imaging Sciences*, t. 15, n° 1, p. 110-138, 2022.
- [12] R. BRO et al., "Modeling multi-way data with linearly dependent loadings", *Journal of Chemometrics : A Journal of the Chemometrics Society*, t. 23, n° 7-8, p. 324-340, 2009.
- [13] A. L. de ALMEIDA et al., "A constrained factor decomposition with application to MIMO antenna systems", *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 56, n° 6, p. 2429-2442, 2008.
- [14] P. COMON et al., "Tensor decompositions, alternating least squares and other tales", *Journal of Chemometrics : A Journal of the Chemometrics Society*, t. 23, n° 7-8, p. 393-405, 2009.

<sup>2</sup>tels qu'inclus dans la fonction Python `numpy.linalg.solve`.