

# Performances Optimales Pour Le Modèle Harmonique Multidimensionnelle, Multicanal Avec Couplage

Clémence PRÉVOST<sup>1</sup> Maxence GIRAUD<sup>1</sup> Vincent ITIER<sup>2,3</sup> Rémy BOYER<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Univ. Lille, UMR 9189 CRIStAL, F-59000 Lille, France

<sup>2</sup>IMT Nord Europe, Institut Mines-Télécom, Centre for Digital Systems, F-59000 Lille, France

<sup>3</sup>Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, Institut Mines-Télécom, UMR 9189 CRIStAL, F-59000 Lille, France

**Résumé** – Ce travail présente la généralisation multicanal couplé du modèle en somme d’Harmoniques Multidimensionnelles. En tant que nouveau modèle, il fait sens de caractériser les performances optimales en estimation paramétrique. Pour ce faire, nous dérivons et analysons la borne de Cramer-Rao sous contraintes (CCRB) pour l’estimation des fréquences communes du modèle pour  $N$  canaux. Deux résultats sont formulés concernant les ratios de la CCRB et de la FIM (Fisher Information Matrix) pour des modèles à  $N$  et  $N + 1$  canaux. Nous démontrons l’idée contre-intuitive que pour un grand nombre de canaux ( $N \rightarrow \infty$ ), la précision de l’estimation des fréquences communes est saturée. Les simulations réalisées illustrent les résultats théoriques.

**Abstract** – This work presents the coupled multichannel generalization of the multidimensional harmonic model. As a new model, it makes sense to characterize the optimal performance in terms of parametric estimation. To this end, we derive and analyze the Constraint Cramer-Rao bound (CCRB) for the estimation of the shared frequencies of the model for  $N$  channels. Two results are formulated regarding the ratios of the CCRB and the FIM (Fisher Information Matrix) for models with  $N$  and  $N + 1$  channels. We demonstrate the counterintuitive idea that for a large number of channels ( $N \rightarrow \infty$ ), the accuracy of the estimation of shared frequencies is saturated. The simulations conducted illustrate the theoretical results.

## 1 Introduction

L’estimation paramétrique du modèle en somme d’Harmoniques Multidimensionnelles (EHM) [2, 1] est un problème standard en traitement du signal, avec par exemple des applications en traitement d’antenne [5] et en communication MIMO [6]. En s’inspirant de [8], ce travail généralise le modèle harmonique multidimensionnelle en une version à  $N$  canaux, où chaque observation se décompose selon un modèle Canonique Polyadique (CP) avec une information couplée entre les canaux. Bien qu’il existe des estimateurs exploitant ce couplage [11], les performances optimales pour l’estimation des fréquences communes du modèle multidimensionnel et multicanal nécessitent une évaluation. Ce travail se concentre sur l’impact du nombre de canaux  $N$  sur ces performances, en utilisant les bornes de Cramér-Rao contraintes (CCRB) [10, 9] comme outil d’évaluation.

## 2 Modèles CP couplés

La décomposition CP (CPD) [3] d’un tenseur  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{T_1 \times \dots \times T_Q}$  s’écrit

$$\mathcal{X} = \mathcal{I}_{Q,R} \times_1 \mathbf{F}_1 \times_2 \dots \times_Q \mathbf{F}_Q = \left[ \mathcal{I}_{Q,R}; \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_Q \right] \quad (1)$$

où  $\mathbf{F}_q \in \mathbb{C}^{T_q \times R}$  ( $q \in \{1, \dots, Q\}$ ) est le  $q$ -ième facteur de la décomposition. Le plus petit entier  $R$  satisfaisant (1) est appelé le rang canonique. Soit le modèle CP multicanal composé de  $N$  tenseurs  $\mathcal{X}_n \in \mathbb{C}^{T_1 \times \dots \times T_K \times T_{K+1}^{(n)} \times \dots \times T_Q^{(n)}}$  ( $n \in \{1, \dots, N\}$ ) d’ordre  $Q$  tels que

$$\mathcal{X}_n = \left[ \mathcal{I}_{Q,R}; \mathbf{F}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{F}_Q^{(n)} \right], \quad (2)$$

sous contraintes

$$\mathbf{F}_q^{(1)} = \dots = \mathbf{F}_q^{(N)} = \mathbf{F}_q \quad \forall q \in \{1, \dots, K\}. \quad (3)$$

Les premiers  $K$  facteurs<sup>1</sup>  $\{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_K\}$  sont communs aux  $N$  canaux. Le modèle (2)–(3) est donc dit couplé. Les facteurs  $\{\mathbf{F}_{K+1}^{(n)}, \dots, \mathbf{F}_Q^{(n)}\}$  sont spécifiques à la  $n$ -ième observation ( $n \in \{1, \dots, N\}$ ) et ne sont pas soumis aux contraintes (3).

## 3 Modèle Harmonique Multidimensionnel et Multicanal (HMM)

### 3.1 Définition

Dans le modèle HMM, les  $N$  observations  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N\}$  suivent  $N$  modèles harmoniques multidimensionnelles. Chaque canal est la superposition de  $R$  sources complexes  $\alpha_{r,n}$  ( $r \in \{1, \dots, R\}$ ) échantillonnées uniformément aux instants  $t_q$  ( $q \in \{1, \dots, Q\}$ ) avec  $0 \leq t_q \leq T_q^{(n)} - 1$  sur une grille à  $Q$  dimensions :

$$\mathcal{X}_n(t_1, \dots, t_Q) = \sum_{r=1}^R \alpha_{r,n} \prod_{q=1}^Q z_{r,q,n}^{t_q}, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}. \quad (4)$$

La grandeur  $z_{r,q,n} = \exp(i\omega_{r,q,n})$  contient le pôle associé à la  $r$ -ième fréquence  $\omega_{r,q,n}$  dans la  $q$ -ième dimension du  $n$ -ième canal.

<sup>1</sup>à une permutation d’indices près, sans perte de généralité.

### 3.2 Couplage fréquentiel

Avec  $K$  fréquences communes à tous les canaux, le modèle (4) est dit multicanaux<sup>2</sup>, à l'instar de (2)–(3), avec

$$\omega_{r,q,1} = \dots = \omega_{r,q,N} = \omega_{r,q}, \forall q \in \{1, \dots, K\}. \quad (5)$$

Les dimensions des observations deviennent donc  $T_q^{(1)} = \dots = T_q^{(N)} = T_q$  for  $q \in \{1, \dots, K\}$ . Ainsi, il est possible de réécrire (4) tel que

$$\mathcal{X}_n(t_1, \dots, t_Q) = \sum_{r=1}^R \alpha_{r,n} \left( \prod_{q=1}^K z_{r,q}^{t_q} \prod_{q=K+1}^Q z_{r,q,n}^{t_q} \right), \quad (6)$$

avec  $z_{r,q} = \exp(i\omega_{r,q})$  le pôle associé à la  $r$ -ième fréquence commune.

### 3.3 Reformulation sous forme de modèles CP structurés

La  $n$ -ième observation  $\mathcal{X}_n$  in (6) admet une CPD structurée [7] de la forme

$$\mathcal{X}_n = \left[ \mathcal{A}_n; \mathbf{V}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{V}_Q^{(n)} \right] \quad (7)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{V}_q^{(1)} = \dots = \mathbf{V}_q^{(N)}, \forall q \in \{1, \dots, K\}, \quad (8)$$

avec  $\mathcal{A}_n$  un tenseur diagonal de rang  $R$  nul partout sauf en  $\mathcal{A}_n(r, \dots, r) = \alpha_{r,n}$ . Les facteurs  $\mathbf{V}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{V}_Q^{(n)}$  sont des matrices de Vandermonde. En notant

$$\mathbf{v}_N(z) = [1 \quad z \quad z^2 \quad \dots \quad z^{N-1}]^T, \quad (9)$$

les  $K$  premiers facteurs partagés  $\mathbf{V}_q \in \mathbb{C}^{T_q \times R}$  ( $q \in \{1, \dots, K\}$ ) sont tels que

$$\mathbf{V}_q = [\mathbf{v}_{T_q}(z_{1,q}) \quad \dots \quad \mathbf{v}_{T_q}(z_{R,q})]. \quad (10)$$

Les facteurs  $\mathbf{V}_q^{(n)} \in \mathbb{C}^{T_q^{(n)} \times R}$  ( $q \in \{K+1, \dots, Q\}$ ) spécifiques à la  $n$ -ième observation ( $n \in \{1, \dots, N\}$ ) sont tels que

$$\mathbf{V}_q^{(n)} = [\mathbf{v}_{T_q^{(n)}}(z_{1,q,n}) \quad \dots \quad \mathbf{v}_{T_q^{(n)}}(z_{R,q,n})]. \quad (11)$$

De fait, le modèle HMM est un modèle CP couplé dont les facteurs possèdent une structure de Vandermonde.

## 4 Bornes pour le modèle HMM

Le problème d'EHM Multicanaux (EHMM) a pour but d'estimer les fréquences angulaires à partir de  $N$  observations bruitées. Cette section est dédiée au calcul de la CCRB associée au modèle (7).

### 4.1 Modélisation statistique

Soient  $N$  observations bruitées  $\mathcal{Y}_n \in \mathbb{C}^{T_1^{(n)} \times \dots \times T_Q^{(n)}}$  telles que

$$\mathcal{Y}_n = \mathcal{X}_n + \mathcal{E}_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}. \quad (12)$$

<sup>2</sup>L'égalité des fréquences équivaut à l'égalité des facteurs CP.

Les éléments des termes de bruit  $\mathcal{E}_n$  sont indépendants et identiquement distribués (*i.i.d.*) et suivent des lois normales complexes de variances  $\sigma_n^2$ , *i.e.*,  $\mathcal{E}_n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathcal{I})$ . Les paramètres d'intérêt du modèle  $\boldsymbol{\psi}_n \in \mathbb{R}^{RK}$  et  $\boldsymbol{\theta}_n \in \mathbb{R}^{R(Q-K)}$  contiennent respectivement les fréquences communes et spécifiques présentes dans le  $n$ -ième canal :

$$\boldsymbol{\psi}_n = [\omega_{1,1,n}, \dots, \omega_{R,K,n}]^\top, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\theta}_n = [\omega_{1,K+1,n}, \dots, \omega_{R,Q,n}]^\top. \quad (14)$$

Ces fréquences sont regroupées dans un méta-paramètre  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{NRQ}$  :

$$\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\psi}_1^\top, \boldsymbol{\theta}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\psi}_N^\top, \boldsymbol{\theta}_N^\top]^\top. \quad (15)$$

Le problème d'EHMM vise donc à estimer  $\boldsymbol{\phi}$  à partir des  $N$  observations  $\{\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_N\}$ .

### 4.2 Matrice d'information de Fisher

Le modèle (7)–(8) est dit couplé, de par les contraintes d'égalité sur les  $K$  premiers facteurs de chaque canal. La borne associée à ce modèle pour l'estimation de  $\boldsymbol{\phi}$  est la CCRB. Pour calculer cette quantité, il faut tout d'abord évaluer la FIM découplée, *i.e.*, dans le cas où les  $\{\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_N\}$  suivent le modèle (7) et les contraintes (8) sont ignorées. Chaque observation est alors

$$\mathcal{Y}_n \sim \mathcal{CN}(\mu_n(\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n), \mathcal{E}_n) \quad (16)$$

avec  $\mu_n(\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n) = \mathcal{X}_n$ , et  $\mathcal{E}_n = \sigma_n^2 \mathcal{I}$ . La FIM associée aux paramètres  $\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n$  du  $n$ -ième canal est donnée par [12] :

$$\text{FIM}(\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n) = \frac{2}{\sigma_n^2} \Re \left( \left[ \frac{\partial \mu_n(\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n)}{[\boldsymbol{\psi}_n^\top, \boldsymbol{\theta}_n^\top]^\top} \right]^H \left[ \frac{\partial \mu_n(\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n)}{[\boldsymbol{\psi}_n^\top, \boldsymbol{\theta}_n^\top]^\top} \right] \right), \quad (17)$$

avec  $\frac{\partial \mu_n(\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n)}{[\boldsymbol{\psi}_n^\top, \boldsymbol{\theta}_n^\top]^\top}$  contenant les dérivées partielles de  $\mu_n(\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n)$  par rapport à  $\boldsymbol{\psi}_n$  et  $\boldsymbol{\theta}_n$ . Ainsi, la FIM relative au  $n$ -ième canal est la matrice par blocs

$$\text{FIM}(\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\psi}_n} & \mathbf{B}_{\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n} \\ \mathbf{B}_{\boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\theta}_n}^\top & \mathbf{B}_{\boldsymbol{\theta}_n, \boldsymbol{\theta}_n} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Ainsi, la FIM associée à  $\boldsymbol{\phi}$  est la matrice bloc-diagonale de termes diagonaux  $\{\text{FIM}(\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\theta}_1), \dots, \text{FIM}(\boldsymbol{\psi}_N, \boldsymbol{\theta}_N)\}$ .

### 4.3 Calcul de la CCRB

Dans le cas couplé, il convient de tenir compte des contraintes (5) sur les fréquences angulaires. Ces contraintes définissent  $N-1$  égalités sur les paramètres du modèle

$$\boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\psi}_1 - \boldsymbol{\psi}_n = \mathbf{0}, \forall n \in \{2, \dots, N\}. \quad (19)$$

La CCRB associée à (7)–(8) est telle que [4]

$$\text{CCRB}_N(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{U}_N \left( \underbrace{\mathbf{U}_N^H \text{FIM}_N(\boldsymbol{\phi}) \mathbf{U}_N}_{\text{FIM}_N^C(\boldsymbol{\phi})} \right)^{-1} \mathbf{U}_N^H, \quad (20)$$

où  $\text{FIM}_N(\boldsymbol{\phi})$  est tirée de (17). La matrice  $\text{FIM}_N^C(\boldsymbol{\phi})$  est appelée FIM contrainte et  $\mathbf{U}_N$  est une base de  $\ker(\mathbf{G})$ . La matrice

$\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{RK(N-1) \times RQN}$  est la jacobienne des contraintes (19).  $\mathbf{C}$  est une matrice par blocs de la forme

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1^\top \quad \mathbf{G}_2^\top \quad \cdots \quad \mathbf{G}_N^\top]^\top, \quad (21)$$

où

$$\mathbf{G}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \psi_N} & \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \theta_N} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

D'après (19), des dérivées partielles des  $\mathbf{g}_n$  sont telles que

$$\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \psi_1} = \mathbf{I}_{RK}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \psi_n} = -\mathbf{I}_{RK}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \theta_k} = \mathbf{0}_{RK \times R(Q-K)}, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \psi_k} = \mathbf{0}_{RK \times RK}, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, k \neq n. \quad (25)$$

Ainsi,  $\mathbf{G}$  peut s'écrire

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{RK} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{RK} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{RK} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{RK} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & & & \\ \mathbf{I}_{RK} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{RK} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Une base  $\mathbf{U}_N \in \mathbb{R}^{NRQ \times NR(Q-K) - RK}$  est telle que

$$\mathbf{U}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{RK} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{R(Q-K)} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{I}_{RK} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{R(Q-K)} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

La CCRB s'obtient finalement en combinant (27) et (17) dans l'expression (20).

#### 4.4 Influence du nombre $N$ de canaux

Cette sous-section contient deux théorèmes caractérisant l'évolution de la CCRB pour des modèles à  $N$  et  $N+1$  canaux. Faute d'espace, les preuves ne sont pas présentées. Soit la FIM contrainte associée au paramètre  $\psi_1$

$$\text{FIM}_N^C(\psi_1) = \mathbf{\Pi}^T \text{FIM}_N^C(\phi) \mathbf{\Pi}, \quad (28)$$

où  $\mathbf{\Pi}$  est une matrice de sélection inversible. En pratique,  $\text{FIM}_N^C(\psi_1)$  est contenue dans le premier bloc de  $\text{FIM}_N^C(\phi)$  de taille  $RK \times RK$ .

##### **Théorème 1 (Ratio des traces des FIM contraintes)**

Le ratio des traces des FIM contraintes pour des modèles à  $N$  et  $N+1$  canaux est donné par

$$\frac{\text{Tr}\{\text{FIM}_{N+1}^C(\psi_1)\}}{\text{Tr}\{\text{FIM}_N^C(\psi_1)\}} = \frac{N+1}{N}. \quad (29)$$

##### **Théorème 2 (Ratio des CCRB uniformes)**

Soit  $\text{CCRB}_N(\psi_1) \in \mathbb{R}^{RK \times RK}$  (resp.  $\text{CCRB}_{N+1}(\psi_1)$ ) le bloc de  $\text{CCRB}_N(\phi)$  (resp.  $\text{CCRB}_{N+1}(\phi)$ ) relatif à l'estimation de  $\psi_1$ . Le ratio des traces de la CCRB est donné par

$$\frac{1}{\kappa_N} \frac{N}{(N+1)} \leq \frac{\text{Tr}\{\text{CCRB}_{N+1}(\psi_1)\}}{\text{Tr}\{\text{CCRB}_N(\psi_1)\}} \leq \kappa_{N+1} \frac{N}{N+1} \quad (30)$$

où  $\kappa_N$  (resp.  $\kappa_{N+1}$ ) est le conditionnement de  $\text{CCRB}_N(\psi_1)$  (resp. de  $\text{CCRB}_{N+1}(\psi_1)$ ).

Dans le cas où les CCRBs sont parfaitement conditionnées ( $\kappa_N = \kappa_{N+1} = 1$ ), le ratio des CCRB est exactement celui des FIM contraintes. On observe alors que le gain tend vers 1 pour  $N \rightarrow \infty$ .

## 5 Simulations

### 5.1 Paramètres des expériences

Les  $N$  observations non bruitées de référence sont générées selon (6). Les fréquences angulaires  $\omega_{r,q,n}$  sont prises aléatoirement dans  $]0; \pi[$ . Seules  $K = 2$  fréquences sont communes à tous les canaux. Les observations possèdent  $Q = 6$  dimensions de taille  $I_q = 6$  et  $R = 2$  sources sont considérées. Le SNR (en dB) sur le  $n$ -ième canal est donné par  $\text{SNR}_n = 10 \log_{10} (\|\mathcal{Y}_n\|_F^2 / \|\mathcal{E}_n\|_F^2)$ , ( $n \in \{1, \dots, N\}$ ) et varie<sup>3</sup> entre 20 et 30dB. Il est considéré égal sur tous les canaux.

La CRB et la CCRB uniformes sont évaluées d'après (17) (resp. (20)) en prenant la trace de ces matrices.

### 5.2 Comportement de la borne

La CRB uniforme est comparée à la CCRB uniforme obtenue pour des modèles à  $N$  canaux,  $N$  variant de 5 à 30. La Figure 1 affiche en échelle semi-log scale les bornes relatives à  $\psi_1$  en fonction du SNR.

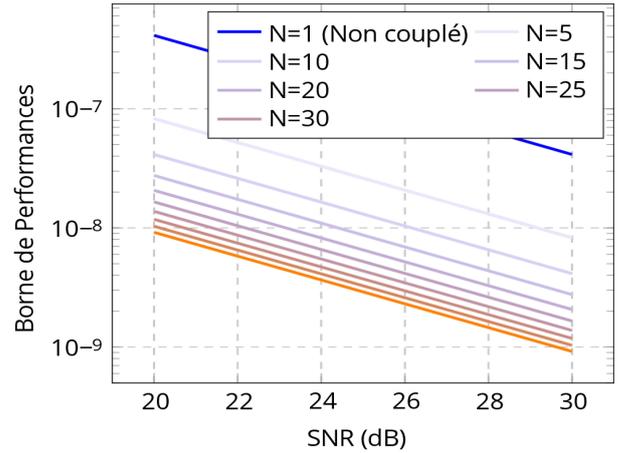


FIGURE 1 : CRB et CCRB pour  $\psi_1$  avec  $N \in \{5, \dots, 30\}$

La valeur de la CCRB uniforme décroît quand  $N$  augmente. Cette valeur tend à se stabiliser pour les plus grandes valeurs de  $N$  considérées. En d'autres termes, il est intéressant pour l'estimation de considérer un modèle multicanaux (même avec  $N$  petit) plutôt qu'un modèle classique. Pour vérifier le comportement pratique de la CCRB pour l'estimation de  $\psi_1$ , la Figure 2 illustre le ratio des traces de la CCRB en fonction de  $N$ . Cette valeur est comparée à l'inverse du ratio présenté dans le Théorème 1, i.e.  $\frac{N}{N+1}$ .

On observe que le ratio des traces de la CCRB coïncide avec l'inverse du ratio proposé dans le Théorème 1 en ce qui concerne la FIM contrainte. En considérant un modèle HMM couplé, plutôt qu'un modèle non-couplé, nous pouvons espérer des gains de performances dans l'estimation des paramètres communs. Remarquons également, que ce gain décroît avec le

<sup>3</sup>Il est à noter que la CCRB est linéaire en fonction du SNR.

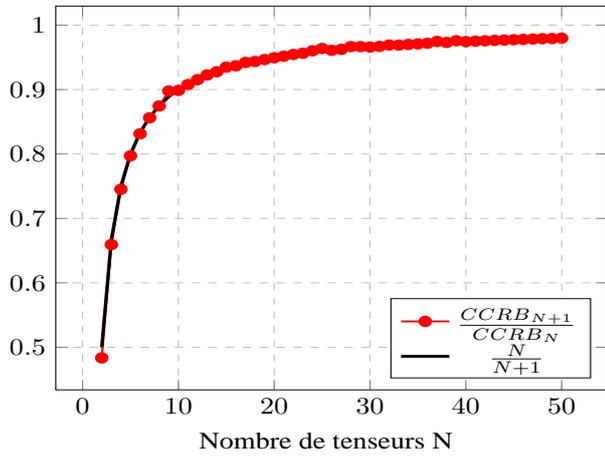


FIGURE 2 : Ratio des traces de la CCRB en fonction de  $N$  (en rouge) avec le ratio théorique de référence  $\frac{N}{N+1}$  (en noir).

nombre  $N$  de tenseurs couplés considérés, par exemple entre  $N = 30$  et  $N = 40$ . Dans la Figure 3, les bornes théoriques haute et basse, dérivées dans le Théorème 2, sont affichées ainsi que le ratio des traces de la CCRB.

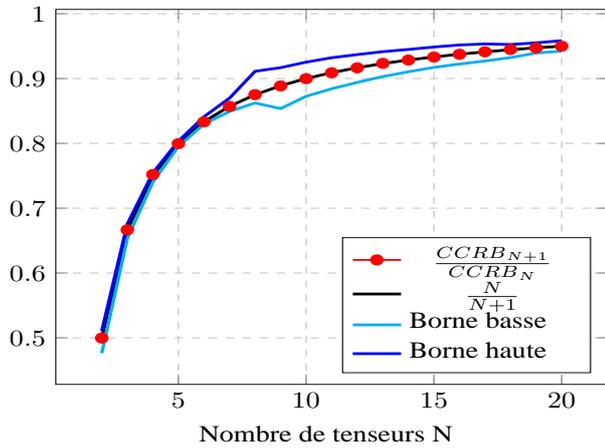


FIGURE 3 : Ratio des traces de la CCRB en fonction de  $N$  pour l'estimation de  $\psi_1$ .

Il est à noter que la distribution des fréquences angulaires détermine la compacité des bornes. En effet, si les fréquences sont échantillonnées de façon uniforme sur  $]0; \pi[$ , alors les valeurs de conditionnement  $\kappa_N$  et  $\kappa_{N+1}$  sont proches de 1. Par conséquent, dans cette condition, les bornes sont égales à  $\frac{N}{N+1}$ . Dans le cas où les fréquences sont proches les unes des autres, les conditionnements  $\kappa_N$  et  $\kappa_{N+1}$  sont moins bons et les bornes s'écartent plus. Ces résultats suggèrent que l'utilisation d'un modèle multicanaux pour le problème MMHR est intéressante. De plus, elle fournit des lignes directrices pour la conception du système de mesures. En effet, le nombre d'observation peut être faible, e.g.,  $N = 10$ , tout en améliorant significativement les performances d'estimation par rapport à un modèle non-couplé. En outre, il n'y a pas de perte importante de performances par rapport à l'utilisation d'un plus grand nombre d'observations.

## 6 Conclusion

Ce travail présente une extension multicanal du modèle Harmonique Multidimensionnelle. Ce modèle intègre une information couplée entre les canaux. Les performances optimales pour l'estimation des fréquences communes de ce nouveau modèle sont évaluées à l'aide de la bornes de Cramér-Rao contrainte. Une expression quasi-analytique de cette bornes est fournie. L'influence du nombre de canaux sur l'estimation des paramètres communs est discutée. Un résultat contre-intuitif est que l'estimation des harmoniques couplées tire parti de l'augmentation du nombre de canaux, mais ce bénéfice s'estompe lorsque le nombre de canaux tend vers l'infini.

## Références

- [1] R. BOYER : Deterministic asymptotic Cramer-Rao bound for the multidimensional harmonic model. *Signal Processing*, 88(12):27 P, 2008.
- [2] M. HAARDT, F. ROEMER et G. DEL GALDO : Higher-order SVD-based subspace estimation to improve the parameter estimation accuracy in multidimensional harmonic retrieval problems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(7):3198–3213, 2008.
- [3] F. L. HITCHCOCK : The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products. *Journal of Mathematics and Physics*, 6(1-4):164–189, 1927.
- [4] A. K. JAGANNATHAM et B. D. RAO : Cramér-Rao lower bound for constrained complex parameters. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(11):875–878, 2004.
- [5] S. MIRON, Y. ZNIYED, R. BOYER, A. L. F. de ALMEIDA, G. FAVERIER, D. BRIE et P. COMON : Tensor methods for multisensor signal processing. *IET signal processing*, 14(10):693–709, 2020.
- [6] D. NION et N. D. SIDIROPOULOS : Tensor algebra and multidimensional harmonic retrieval in signal processing for MIMO radar. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(11):5693–5705, 2010.
- [7] J.-M. PAPY, L. DE LATHAUWER et S. VAN HUFFEL : Exponential data fitting using multilinear algebra : the single-channel and multi-channel case. *Numerical linear algebra with applications*, 12(8):809–826, 2005.
- [8] J.-M. PAPY, L. DE LATHAUWER et S. VAN HUFFEL : Common pole estimation in multi-channel exponential data modeling. *Signal Processing*, 86(4):846–858, 2006.
- [9] C. PRÉVOST, K. USEVICH, M. HAARDT, P. COMON et D. BRIE : Constrained Cramér-Rao bounds for reconstruction problems formulated as coupled canonical polyadic decompositions. *Signal Processing*, 198:108573, 2022.
- [10] C. REN, R. C. FARIAS, P.-O. AMBLARD et P. COMON : Performance bounds for coupled models. In *2016 IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM)*, pages 1–5. IEEE, 2016.
- [11] M. SØRENSEN et L. DE LATHAUWER : Multidimensional harmonic retrieval via coupled canonical polyadic decomposition—Part I : Model and identifiability. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65(2):517–527, 2016.
- [12] A. VAN DEN BOS : A Cramér-Rao lower bound for complex parameters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(10):2859–, 1994.