Composition De Fonctions Généralisées A Valeurs Tensorielles

Rémy BOYER[1]

[1]Université de Lille, UMR 9189 CRIStAL, F-59000 Lille, France
remy.boyer@univ-lille.fr

Résumé – Les fonctions sont fondamentales en mathématiques car elles offrent un cadre analytique pour modéliser les relations entres variables. Bien que les fonctions à valeurs matricielles, notamment pour des matrices rectangulaires, appelées fonctions généralisées, soient bien établies, les fonctions à valeurs tensorielles n'ont pas été explorées de manière aussi approfondie. Les tenseurs, qui généralisent les matrices à plus de deux dimensions, sont intensivement exploités en sciences et dans le domaine de l'ingénierie. Cependant, les fonctions appliquées aux tableaux multi-linéaires basés sur les modèles de Tucker ou CP (Canonical Polyadic) font encore défaut. Ce travail propose la définition de fonctions à valeurs tensorielles adaptées à la riche structure multi-linéaire d'un tenseur d'ordre Q. Le formalisme proposé s'appuie sur les notions de composition de fonctions généralisées, combinant des opérations de dépliement et de repliement de tenseurs. Nous montrons que la HOSVD (Higher-Order Singular Value Decomposition) pour les tenseurs jouit de la même propriété que la SVD pour les matrices en termes de 'propagation' de la fonction sur le 'noyau' de la décomposition. Enfin, les aspects computationnels sont discutés.

Abstract – Functions are fundamental in mathematics as they provide an analytical framework to model relations between variables. While matrix-valued functions, particularly for rectangular matrices, known as generalized functions, are well established, tensor-valued functions have not been explored as thoroughly. Tensors, which generalize matrices to more than two dimensions, are intensively used in sciences and engineering fields. However, functions dedicated to multi-linear arrays based on Tucker or CP (Canonical Polyadic) models are still lacking. This work proposes the definition of tensor-valued functions tailored to the rich multi-linear structure of a tensor of order Q. The proposed formalism relies on the notions of composition of generalized functions, combining operations of unfolding and folding of tensors. We show that the HOSVD (Higher-Order Singular Value Decomposition) for tensors enjoys the same property as SVD for matrices in terms of 'propagation' of the function over the 'core' of the decomposition. Finally, computational aspects are discussed.

1 Introduction

Les fonctions à valeurs scalaires, notées $f(x)$, ou matricielles, représentées par $f(X)$, sont fondamentales en mathématiques et ont des applications dans de nombreux domaines, comme par exemple en théorie des graphes [2], dans le cadre des équations différentielles partielles [11], ou encore dans le contexte des métriques log-euclidiennes [9]. Pour les matrices carrées, la décomposition en blocs de Jordan (JBD) est adaptée [10] ; cependant, cette approche ne peut être appliquée aux matrices rectangulaires. Dans [5], les auteurs introduisent un nouveau cadre appelé "fonctions généralisées" qui permet le calcul de fonctions pour des matrices rectangulaires.
Les tenseurs [4] sont essentiels dans les domaines de la science et de l'ingénierie, en particulier dans l'analyse de données [7], l'apprentissage automatique, la vision par ordinateur et les mathématiques computationnelles. Les tenseurs généralisent les matrices à plus de deux dimensions. Un tenseur d'ordre Q noté $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{N_1 \times \cdots \times N_Q}$ se compose d'entrées à valeurs réelles $\mathcal{X}(n_1, \ldots, n_Q)$, où $n_q \in \{1, \ldots, N_q\}$ pour $1 \leq q \leq Q$. Ils fournissent un cadre mathématique efficace pour modéliser et analyser des phénomènes complexes. Le concept de fonctions à valeurs tensorielles est relativement récent et a été développé pour des tenseurs d'ordre 3 dans le contexte du t-algèbre [6]. Dans [8], les auteurs définissent la notion de t-fonction comme une fonction à valeurs matricielles d'une matrice bloc-circulante associée aux tranches frontales d'un tenseur d'ordre 3 et la calcule en utilisant la décomposition en valeurs singulières tubaires (t-SVD). Malgré le caractère novateur de ces travaux, une limitation est que la t-fonction est seulement restreinte à la troisième dimension d'un tenseur d'ordre 3.
Étant donné les nombreuses généralisations tensorielles de la SVD [10], il n'y a aucune garantie qu'une fonction à valeurs tensorielles définie en utilisant une décomposition donnée sera équivalente à une seconde basée sur une généralisation différente. Dans cette optique, notre objectif est de proposer une définition naturelle pour une fonction à valeurs tensorielles, $f(\mathcal{X})$. Plus précisément, le repliement et le dépliement jouent un rôle crucial en algèbre multi-linéaire et sont les opérations fondamentales afin de manipuler des tenseurs d'ordre supérieur. Le dépliement d'un tenseur $\mathcal{X}$ d'ordre Q consiste à le réorganiser en Q matrices rectangulaires, c'est-à-dire, $\texttt{unfold}_q(\mathcal{X})$ pour $1 \leq q \leq Q$. Par conséquent, la définition proposée dans ce travail doit tirer pleinement parti de deux aspects : (i) le caractère multi-linéaire de $\mathcal{X}$, c'est-à-dire que Q dépliements du tenseur sont disponibles et (ii) chaque dépliement a des dimensions de lignes et de colonnes déséquilibrées, ce qui la rend rectangulaire. En conséquence, le point (i) suggère Q fonctions $\{f_1(\mathcal{X}), \ldots, f_Q(\mathcal{X})\}$; chacune agissant sur une dimension donnée du tenseur $\mathcal{X}$. Le second point implique que notre définition doit être basée sur le concept de fonction généralisée, notée $\bar{f}_q(\cdot)$. Par conséquent, nous proposons la définition suivante $\bar{f}_q(\mathcal{X}) = \texttt{fold}_q \bar{f}_q(\texttt{unfold}_q(\mathcal{X}))$. Autrement dit, on déplie le tenseur par rapport à une dimension donnée, on applique la fonction généralisée correspondante à la matrice rectangulaire et on retourne dans le formalisme tensoriel par l'opération de repliement. Nous concluons notre

définition par la composition de ces fonctions généralisées, c'est-à-dire, $\bar{f}_Q \circ \cdots \circ \bar{f}_1(\mathcal{X})$ qui est intrinsèquement liée à la structure tensorielle. Enfin, nous établissons le lien avec la HOSVD [3] et discutons des aspects computationnels.

2 Fonction à valeurs matricielles

La notion de fonction pour les matrices rectangulaires [1,5] est introduite ici car, comme nous le verrons plus tard, ce concept est consubstantiel à la notion de fonction à valeurs matricielles du dépliement d'un tenseur. Dans cette section, nous omettons les démonstrations faute de place.

Définition 1 *Considérons une fonction $f(\cdot)$ à valeurs matricielles. La fonction généralisée de $A \in \mathbb{R}^{N\times K}$ induite par $f(\cdot)$ est*

$$\bar{f}(A) = f\left(\sqrt{AA^T}\right)\sqrt{AA^T}^{\dagger} A \in \mathbb{K}^{N\times K} \tag{1}$$

où $(\cdot)^{\dagger}$ représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose [10].

Propriété 1 *Définissons une décomposition en valeurs singulières (SVD) tronquée de rang-R de la matrice $A \in \mathbb{R}^{N\times K}$ selon $A = UDV^T$ où U et V sont des matrices orthonormales de tailles $N \times R$ et $K \times R$, respectivement, avec un rang $R < \min(N,K)$ et D est une matrice diagonale composée de R valeurs singulières non nulles et ordonnées par valeurs décroissantes. La fonction généralisée de la matrice A est donnée par $\bar{f}(A) = Uf(D)V^T$ où $f(D) = \mathtt{diag}\{f(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_R)\}$.*

La propriété ci-dessus montre que la fonction généralisée d'une matrice rectangulaire peut être calculée grâce à sa décomposition en valeurs singulières et à la fonction scalaire induite des valeurs singulières. Il s'agit donc d'une généralisation de la JBD pour les matrices rectangulaires.

Lemme 1 *La composition de deux fonctions généralisées pour une matrice rectangulaire $A \in \mathbb{R}^{N\times K}$ admet l'expression suivante :*

$$\bar{f}_1 \circ \bar{f}_2(A) = f_1 \circ f_2\left(\sqrt{AA^T}\right)\sqrt{AA^T}^{\dagger} A \ \in \mathbb{R}^{N\times K}.$$

Ce résultat peut être facilement étendu par induction à la composition de Q fonctions généralisées.

2.1 Composition de fonctions généralisées pour les tenseurs d'ordre Q

Dans cette section, une définition *ad-hoc* est proposée, dédiée à l'essence multidimensionnelle du tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{N_1\times\cdots\times N_Q}$. Un pseudo-code dit "plain-vanilla" explicite l'approche proposée.

2.1.1 Fonction généralisée à valeurs tensorielles

La structure multi-linéaire du tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{N_1\times\cdots\times N_Q}$ implique essentiellement Q transformations linéaires. Gardant cela à l'esprit, il fait sens de considérer pour chaque dimension q une fonction spécifique $f_q(\cdot)$, *c'est-à-dire*, $\{f_1(\cdot),\ldots,f_Q(\cdot)\}$. Ce faisant, la notion de composition de fonctions émerge naturellement, *c'est-à-dire*, $f_Q \circ \cdots \circ f_1(\mathcal{X})$. Cela peut être considéré comme une généralisation de l'idée de la t-fonction, où celle-ci agit uniquement sur la troisième dimension d'un tenseur d'ordre 3. Ainsi, la définition suivante est proposée.

Définition 2 *Soient les fonctions induites $\{f_1(\cdot),\ldots,f_Q(\cdot)\}$. Pour assurer que ces fonctions soient composables, on considérera les ensembles imbriqués suivants :*

$$\mathbb{K}_Q^{N_1\times\cdots\times N_Q} \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{K}_1^{N_1\times\cdots\times N_Q} \subseteq \mathbb{R}^{N_1\times\cdots\times N_Q}.$$

La q-ième fonction généralisée (voir l'eq. (1)) du tenseur $\mathcal{X}' \in \mathbb{K}_{q-1}^{N_1\times\cdots\times N_Q}$ est définie selon :

$$\bar{f}_q(\mathcal{X}') = \mathtt{fold}_q\left(\bar{f}_q\left(\mathtt{unfold}_q\mathcal{X}'\right)\right) \ \in \mathbb{K}_q^{N_1\times\cdots\times N_Q}.$$

La définition proposée est alors conclue par la composition suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{N_1\times\cdots\times N_Q} &\to \mathbb{K}_Q^{N_1\times\cdots\times N_Q}\\ \mathcal{X} &\mapsto \bar{f}(\mathcal{X}) = \bar{f}_Q \circ \cdots \circ \bar{f}_1(\mathcal{X}).\end{aligned}$$

Quelques propriétés intéressantes sont listées ci-dessous.

- La fonction $\bar{f}(\mathcal{X})$ est associative, ce qui signifie que $(\bar{f}_{q+1} \circ \bar{f}_q) \circ \bar{f}_{q-1}(\mathcal{X}) = \bar{f}_{q+1} \circ (\bar{f}_q \circ \bar{f}_{q-1})(\mathcal{X})$.
- La fonction $\bar{f}_Q(\mathcal{X})$ n'est généralement pas commutative, ce qui signifie qu'un ordre de composition différent conduit généralement à un résultat différent.
- Si $\forall q$, $\bar{f}_q(\mathcal{X})$ est bijective, alors la composition $\bar{f}(\mathcal{X})$ est également bijective.
- Si $\forall q$, $\bar{f}_q(\mathcal{X}) = \bar{g}(\mathcal{X})$ où $\bar{g}(\cdot)$ représente une fonction induite par la fonction $g(\cdot)$, alors la fonction puissance est donnée par $\bar{f}(\mathcal{X}) = \bar{g}^Q(\mathcal{X})$.
- **Lemme 2** *Étant donnée $\bar{f}(\mathcal{X})$, sa fonction généralisée inverse satisfait $\bar{f}^{-1} \circ \bar{f}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ et est donnée par $\bar{f}^{-1}(\mathcal{X}) = \bar{f}_1^{-1} \circ \cdots \circ \bar{f}_Q^{-1}(\mathcal{X})$ si $\forall q$, $\bar{f}_q^{-1}(\mathcal{X})$ existe.*

2.1.2 Pseudo-code de l'algorithme

Dans l'algorithm 1, le pseudo-code du calcul de la composition de fonctions généralisées pour un tenseur d'ordre Q est présenté.

Algorithme 1 : Calcul de $\bar{f}(\mathcal{X})$

Param. d'entrée : $\mathcal{X}$, $\{f_1(\cdot),\ldots,f_Q(\cdot)\}$
Param. de sortie : $\mathcal{Y} = \bar{f}(\mathcal{X})$
$\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ % initialisation
for $1 \le q \le Q$ **do**
  % boucle récursive sur le tenseur
  $X_q = \mathtt{unfold}_q\mathcal{Y}$
  $\bar{f}_q(X_q) = f_q\left(\sqrt{X_qX_q^T}\right)\sqrt{X_qX_q^T}^{\dagger} X_q$ % eq. (1)
  $\mathcal{Y} = \mathtt{fold}_q\bar{f}_q(X_q)$
end for

3 Lien avec la HOSVD

3.1 Fonction des valeurs singulières de la HOSVD

Définition 3 ([3]) *La HOSVD de rang-$(R_1, \ldots, R_Q)$ du tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{N_1 \times \cdots \times N_Q}$ est donnée par*

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \times_1 L_1 \times_2 \cdots \times_Q L_Q \tag{2}$$

où $\forall q, R_q \leq N_q$, la matrice L_q de dimensions $N_q \times R_q$ est orthonormale et le tenseur coeur $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{R_1 \times \cdots \times R_Q}$ est dit "all-orthogonal". Cette propriété signifie

$$\sum_{n_1 \ldots n_{q-1}} \sum_{n_{q+1} \ldots n_Q} \mathcal{G}(\ldots, n_q, \ldots)\mathcal{G}(\ldots, n'_q, \ldots) = \delta_{n_q - n'_q} \sigma^{(q)}_{n_q}$$

où $\delta_.$ est le symbole de Kronecker et $\sigma^{(q)}_1 \geq \cdots \geq \sigma^{(q)}_{R_q} \geq 0 = \sigma^{(q)}_{R_q+1} = \cdots = \sigma^{(q)}_{N_q}$. Les valeurs singulières généralisées de $\mathcal{X}$ sont définies selon $\sigma^{(q)} = \sum_{n_q=1}^{R_q} \left(\sigma^{(q)}_{n_q}\right)^2 = \|G_q\|_F^2 = |\mathcal{G}\|_F^2$.

Lemme 3 *Considérons la HOSVD de $\mathcal{X}$ de rang-$(R_1, \ldots, R_Q)$ selon la definition 3, alors sa q-ième fonction généralisée est donnée par*

$$\bar{f}_q(\mathcal{X}) = \bar{f}_q(\mathcal{G}) \times_1 L_1 \times_2 \cdots \times_Q L_Q.$$

Preuve : Rappelons que la q-ième matrice de dépliement associée à la HOSVD est donnée par [3] :

$$X_q = L_q G_q \left(\bigotimes_{q'=Q, q' \neq q}^{1} L_{q'}^T \right) \tag{3}$$

où G_q est la q-ième matrice de dépliement du tenseur coeur $\mathcal{G}$. En nous basant sur l'eq. (3)*, en utilisant la distributivité du produit de Kronecker et l'orthonormalité de L_q, nous avons $\sqrt{X_q X_q^T} = \sqrt{L_q G_q G_q^T L_q^T}$. En utilisant l'expression ci-dessus dans la définition de la q-ième fonction généralisée (*cf. *eq.* (1)*), nous obtenons*

$$\bar{f}_q(X_q) = L_q \underbrace{f_q\left(\sqrt{G_q G_q^T}\right) \sqrt{G_q G_q^T}^{\dagger} G_q}_{\bar{f}_q(G_q)} \left(\bigotimes_{q'=Q, q' \neq q}^{1} L_{q'}^T \right)$$

Considérons maintenant la q-ième opération de repliement de l'expression ci-dessus, le résultat est alors établi.

Théorème 1 *Considérons la HOSVD du tenseur $\mathcal{X}$ de rang-$(R_1, \ldots, R_Q)$ selon l'eq.* (2)*, la composition des fonctions généralisées est donnée par*

$$\bar{f}(\mathcal{X}) = \bar{f}(\mathcal{G}) \times_1 L_1 \times_2 \cdots \times_Q L_Q \tag{4}$$

avec

$$\bar{f}(\mathcal{G}) = \bar{f}_Q \circ \ldots \circ \bar{f}_1(\mathcal{G}). \tag{5}$$

Preuve : Selon le lemma 3, on a pour $q = 1$: $\bar{f}_1(\mathcal{X}) = \bar{f}_1(\mathcal{G}) \times_1 L_1 \times_2 \cdots \times_Q L_Q$. En tant qu'hypothèse inductive, testons la véracité de la relation suivante :

$$\bar{f}_q \circ \cdots \circ \bar{f}_1(\mathcal{X}) = \bar{f}_q \circ \cdots \circ \bar{f}_1(\mathcal{G}) \times_1 L_1 \times_2 \cdots \times_Q L_Q. \tag{6}$$

Pour ce faire, considérons la $(q+1)$-ième fonction généralisée appliquée à l'eq. (6)*, nous obtenons alors l'eq.* (7)*. Cela valide l'hypothèse inductive. Ainsi, pour un tenseur d'ordre Q, il vient eq.* (4) *et eq.* (5).

Le résultat ci-dessus montre que la HOSVD pour les tenseurs jouit de la même propriété que la SVD pour les matrices en termes de 'propagation' de la fonction sur le 'noyau' de la décomposition.

Théorème 2 *Étant donnée une fonction induite $f_q(\cdot)$, la fonction généralisée de la q-ième valeur singulière généralisée est donnée par :*

$$\tilde{\sigma}^{(q)} = \sum_{n_q=1}^{R_q} \left(f_q\left(\sigma^{(q)}_{n_q}\right) \right)^2 = \left\| \bar{f}_q(G_q) \right\|_F^2.$$

Preuve : Définissons la SVD tronquée de rang-R_q du q-ième dépliement $G_q = U_q D_q V_q^T$ où U_q et V_q sont des matrices orthonormales de rang-R_q et $D_q(n_q, n_q) = \sigma^{(q)}_{n_q}$ représente la n_q-ième valeur singulière avec $n_q \in \{1, \ldots, R_q\}$. Ainsi, nous pouvons noter que $\sigma^{(q)}_{n_q}$ donné dans la definition 3 vérifie

$$\sigma^{(q)}_{n_q} = D_q(n_q, n_q) = ||\mathcal{G}(n_1, \ldots, n_q, \ldots, n_Q)||_F^2. \tag{8}$$

On en déduit que la fonction induite de la n_q-ième valeur singulière de la HOSVD est égale à $f\left(D_q(n_q, n_q)\right)$. Par conséquent, en vertu de l'eq. (8) *et de la SVD de G_q, il vient*

$$U_q^T \bar{f}_q(G_q) V_q = f_q(D_q) = \mathtt{diag}\left\{ f_q\left(\sigma^{(q)}_1\right), \ldots, f_q\left(\sigma^{(q)}_{R_q}\right) \right\}.$$

En utilisant l'invariance de la norme par transformations orthonormales, il vient $||\bar{f}_q(G_q)||_F^2 = ||f_q(D_q)||_F^2 = \sum_{n_q=1}^{R_q} f_q^2(\sigma^{(q)}_{n_q})$. Ainsi, le résultat cherché est prouvé.

3.2 Pseudo-code de l'algorithme

Le pseudo-code est fourni selon l'algorithm 2.

Algorithme 2 : $\bar{f}(\mathcal{X})$ basée sur la HOSVD

Param. d'entrée : $\mathcal{X}$, $\{f_1(\cdot), \ldots, f_Q(\cdot)\}$, $\{R_1, \ldots, R_Q\}$
Param. de sortie : $\mathcal{Y} = \bar{f}(\mathcal{X})$
for $1 \leq q \leq Q$ **do**
  $X_q = \mathtt{unfold}_q \mathcal{X}$
  $[L_q, \cdot, \cdot] \leftarrow \mathtt{SVD}(X_q, R_q)$ % R_q vecteurs gauches
end for
$\mathcal{G} = \mathcal{X} \times_1 L_1^T \times_2 \ldots \times_Q L_Q^T$ % tenseur coeur
$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$ % initialisation
for $1 \leq q \leq Q$ **do**
  % boucle récursive sur le tenseur coeur
  $\tilde{G}_q = \mathtt{unfold}_q \tilde{\mathcal{G}}$
  $[\tilde{U}_q, \tilde{D}_q, \tilde{V}_q] \leftarrow \mathtt{SVD}(\tilde{G}_q, R_q)$ % rang-R_q SVD
  $\tilde{\mathcal{G}} =$
  $$\mathtt{fold}_q \left(\tilde{U}_q \begin{bmatrix} f_q\left(\tilde{D}_q(1,1)\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_q\left(\tilde{D}_q(R,R)\right) \end{bmatrix} \tilde{V}_q^T \right)$$
end for
$\mathcal{Y} = \tilde{\mathcal{G}} \times_1 L_1 \times_2 \ldots \times_Q L_Q$

$$
\begin{aligned}
\bar{f}_{q+1}(\bar{f}_q \circ \cdots \circ \bar{f}_1(\mathcal{X})) &= \texttt{fold}_{q+1}\bar{f}_{q+1}\left(\texttt{unfold}_{q+1}(\bar{f}_q \circ \cdots \circ \bar{f}_1(\mathcal{G}) \times_1 L_1 \times_2 \cdots \times_Q L_Q)\right) \\
&= \texttt{fold}_{q+1}\left(\bar{f}_{q+1}\left(L_{q+1}\left(\texttt{unfold}_{q+1}\bar{f}_q \circ \cdots \circ \bar{f}_1(\mathcal{G})\right)\left(\bigotimes_{q'=Q,q'\neq q+1}^{1} L_{q'}^T\right)\right)\right) \\
&= \texttt{fold}_{q+1}\left(L_{q+1}\left(\texttt{unfold}_{q+1}\bar{f}_{q+1} \circ \bar{f}_q \circ \cdots \circ \bar{f}_1(\mathcal{G})\right)\left(\bigotimes_{q'=Q,q'\neq q+1}^{1} L_{q'}^T\right)\right) \\
&= \bar{f}_{q+1} \circ \bar{f}_q \circ \cdots \circ \bar{f}_1(\mathcal{G}) \times_1 L_1 \times_2 \cdots \times_Q L_Q.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

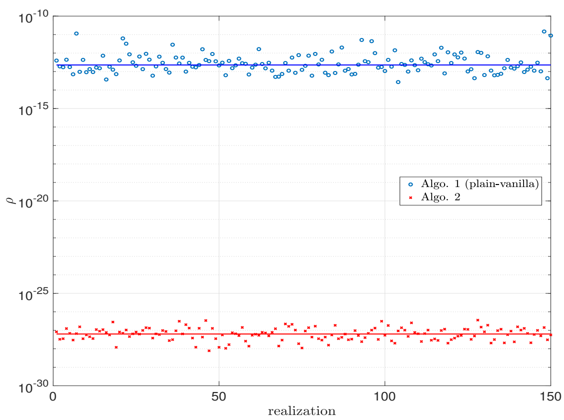

FIGURE 1 : ρ (en échelle logarithmique) *v.s.* la réalisation. $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_+^{30\times30\times30\times30}$ suit un modèle de Tucker de rang multilinéaires $(10, 10, 10, 10)$ et $f_1(x) = \log(x)$, $f_2(x) = f_3(x) = x^2$.

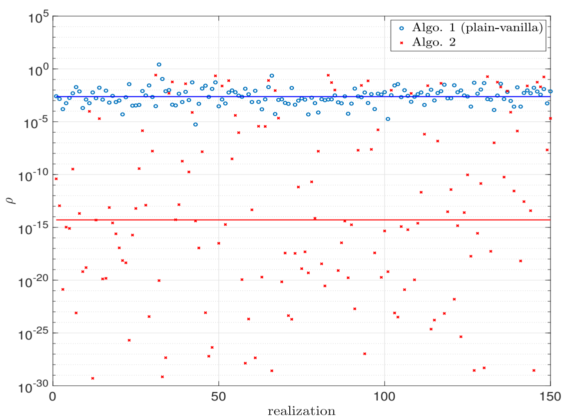

FIGURE 2 : ρ (en échelle logarithmique) *v.s.* la réalisation. $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_+^{50\times50\times50}$ suit un modèle de Tucker de rangs $(10, 10, 10)$ et $f_1(x) = \log(x)$, $f_2(x) = f_3(x) = x$.

4 Exemples numériques illustratifs

Soit $\hat{\mathcal{X}} = \bar{f}^{-1} \circ \bar{f}(\mathcal{X})$ où $\mathcal{X}$ suit un modèle de Tucker à valeurs non négatives. Pour la i-ème réalisation, le tenseur coeur $\mathcal{G}_i$ et les trois/quatre matrices de facteurs $L_{q,i}$ sont générés aléatoirement selon la valeur absolue d'une distribution identiquement et indépendamment gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire. Les figures sont tracées en fonction de 150 tirages aléatoires. La métrique de performance pour la i-ème réalisation est

$$
\rho_i = \frac{||\hat{\mathcal{X}}_i - \mathcal{X}_i||_F^2}{||\mathcal{X}_i||_F^2} = \frac{||\bar{f}^{-1} \circ \bar{f}(\mathcal{X}_i) - \mathcal{X}_i||_F^2}{||\mathcal{X}_i||_F^2}.
$$

La valeur médiane est ajoutée au graphique. Nous pouvons observer sur les fig. 1 et fig. 2 que les performances de l'Algo. 1 sont clairement améliorées dans le cadre de l'Algo. 2.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous proposons une définition pour la fonction d'un tenseur d'ordre Q en utilisant la notion de composition de fonctions généralisées, combinée aux opérations de dépliement et de repliement. Les fonctions généralisées $\bar{f}_q(\cdot)$ associées aux fonctions induites $f_q(\cdot)$ correspondent naturellement aux dimensions non équilibrées des matrices de dépliement. Pour épouser la nature multidimensionnelle d'un tenseur d'ordre Q, nous considérons Q compositions de fonctions ce qui fournit à notre sens un cadre *ad-hoc*. Ensuite, nous montrons que la HOSVD pour les tenseurs jouit de la même propriété que la SVD pour les matrices en termes de 'propagation' de la fonction sur le 'noyau' de la décomposition. Enfin, nous abordons l'aspect computationnel par la proposition d'algorithmes.

Références

[1] Francesca ARRIGO, Michele BENZI et Caterina FENU : Computation of generalized matrix functions. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 37(3):836–860, 2016.

[2] Can CHEN et Indika RAJAPAKSE : Tensor entropy for uniform hypergraphs. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 7(4):2889–2900, 2020.

[3] L. DE LATHAUWER, B. DE MOOR et J. VANDEWALLE : A multilinear singular value decomposition. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21:1253–1278, 2000.

[4] Gérard FAVIER : *Matrix and Tensor Decompositions in Signal Processing, Volume 2*. John Wiley & Sons, 2021.

[5] John B HAWKINS et Adi BEN-ISRAEL : On generalized matrix functions. *Linear and Multilinear Algebra*, 1(2):163–171, 1973.

[6] Misha E KILMER, Karen BRAMAN, Ning HAO et Randy C HOOVER : Third-order tensors as operators on matrices : A theoretical and computational framework with applications in imaging. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 34(1):148–172, 2013.

[7] Yipeng LIU : *Tensors for data processing : theory, methods, and applications*. Academic Press, 2021.

[8] Kathryn LUND : The tensor t-function : A definition for functions of third-order tensors. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 27(3):e2288, 2020.

[9] Xavier PENNEC, Pierre FILLARD et Nicholas AYACHE : A riemannian framework for tensor computing. *International Journal of computer vision*, 66:41–66, 2006.

[10] Robert PIZIAK et Patrick L ODELL : *Matrix theory : from generalized inverses to Jordan form*. Chapman and Hall/CRC, 2007.

[11] Pavel ŠOLÍN : *Partial differential equations and the finite element method*. John Wiley & Sons, 2005.