

Estimation en ligne des paramètres de phase et de polarisation pour les ondes gravitationnelles.

Pierre-Olivier AMBLARD Olivier J.J. MICHEL

CNRS/Grenoble INP/GIPSA-Lab, Grenoble, France

Résumé – Cet article présente un travail préliminaire concernant l’estimation en ligne des paramètres de polarisation dans des signaux bivariés, avec une application particulière à l’analyse d’ondes gravitationnelles. Nous adoptons un formalisme de Jones, bien connu en optique et en mécanique quantique, pour décrire les signaux observés. Pour modéliser les paramètres, nous adoptons une analogie mécanique en utilisant une équation différentielle ordinaire stochastique linéaire du second ordre pour décrire la dynamique de chaque paramètre d’intérêt. La version discrète en est utilisée comme un modèle d’espace d’état dans un cadre de filtrage non linéaire. Nous limitons la présentation au filtre de Kalman étendu qui permet d’illustrer la puissance de la modélisation adoptée.

Abstract – This paper presents preliminary work on the online estimation of polarization parameters in bivariate signals, with particular application to the analysis of gravitational waves. We adopt a Jones formalism, well known in optics and quantum mechanics, to describe the observed signals. To model the parameters, we adopt a mechanical analogy, using a second-order linear stochastic ordinary differential equation to describe the dynamics of each parameter of interest. The discrete version is used as a state-space model in a nonlinear filtering framework. We limit the presentation to the extended Kalman filter, which illustrates the power of the modeling adopted.

1 Introduction

La polarisation¹ est un concept clé des signaux oscillants multivariés. Bien connue en optique, elle décrit l’interaction instantanée des différentes composantes du champ. Elle peut également être observée par exemple pour des ondes géophysiques ou des ondes gravitationnelles, comme l’illustre la figure (1). Pour l’exemple du tremblement

d’intérêt comme des processus gaussiens. Le filtre de Kalman étendu utilisé et son étalonnage sont décrits en section III. Le comportement de l’algorithme est décrit sur un exemple synthétique puis sur l’exemple GW, d’abord avec un bruit blanc synthétique additif, puis avec un bruit réaliste tel qu’il est observé dans les interféromètres d’ondes gravitationnelles.

2 Modèles

Nous détaillons ici l’équation d’observation (vraisemblance) et la description de l’espace d’état (*a priori*) des paramètres à estimer.

2.1 Equation d’observation

Le signal reçu est considéré comme un signal bidimensionnel associé aux ondes analysées, dont les composantes sont mesurées dans le plan orthogonal à la direction de propagation. L’estimation des paramètres de fréquence, de phase et de polarisation, est conduite sur le signal analytique. La transformation de s_t en sa version analytique $z_t = s_t + i\mathcal{H}(s_t)$ s’appuie sur transformée de Hilbert \mathcal{H} appliquée à chaque composante. Chaque composante satisfait les hypothèses du théorème de Bedrosian de sorte que les notions d’amplitude et de fréquence instantanées sont bien fondées [9].

Nous adoptons le formalisme de Jones pour l’analyse de la polarisation [4]. z_t est alors décrit comme un vecteur de polarisation situé sur la sphère unitaire tridimensionnelle (sphère de Poincaré) dont l’amplitude est modulée par un signal de phase :

$$z_t = a_t e^{i\psi_t} \begin{pmatrix} \cos(\theta_t/2) \\ \sin(\theta_t/2) e^{i\varphi_t} \end{pmatrix} + \mathbf{n}_t \quad (1)$$

Les paramètres de polarisation θ_t et φ_t sont les coordonnées sphériques de l’état de polarisation sur la sphère de Poincaré; a_t est l’amplitude instantanée et ψ_t la phase commune instantanée. Le bruit d’observation est supposé blanc, de composantes complexes circulaires non corrélées. Si ce n’est pas le cas, il peut être blanchi comme cela est le cas dans le pipeline de traitement des signaux GW : les caractéristiques du bruit sont apprises lorsqu’aucune onde n’est détectée, de sorte que le bruit est blanchi par blocs.

2.2 Equation d’état

La détection des ondes gravitationnelles actuellement mise en œuvre utilise essentiellement des banques de filtres adaptés conçus à partir de formes d’ondes théoriques résolvant les équations des GW [5]. La démarche proposée ici s’affranchit de ces *a priori* très précis sur

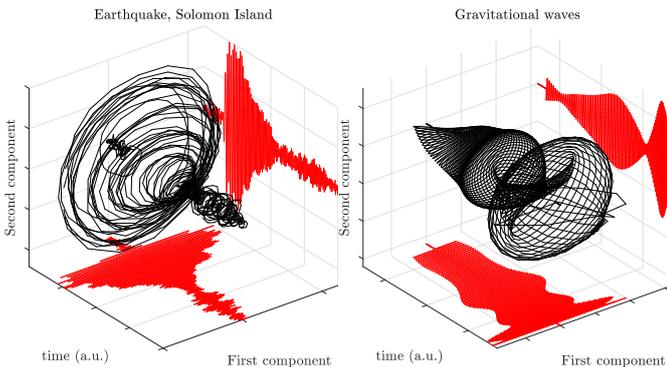


FIGURE 1 : Exemples d’évolution temporelle de signaux polarisés bivariés. A gauche : tremblement de terre de l’île de Salomon (voir [13]). A droite : composantes d’une onde gravitationnelle générée par deux trous noirs coalescents en précession, calculées par des solveurs numériques de la relativité générale.

de terre, la polarisation est constante dans le temps, car le vecteur $\mathbf{s}_t = (x_t \ y_t)^\top$ décrit des cercles (dont le rayon change avec le temps) : L’onde est polarisée circulairement. Dans l’exemple des ondes gravitationnelles (GW), la polarisation évolue avec le temps, révélée par l’étrange géométrie du tracé bidimensionnel. La polarisation est ici un traceur du comportement de la source de l’onde.

La caractérisation de la polarisation est un problème important pour la physique. Dans l’exemple GW, elle est directement liée au mouvement du plan d’orbite de deux trous noirs coalescents.

Nous proposons ici une première approche basée sur un modèle espace-état pour estimer les paramètres de polarisation.

L’équation d’observation repose sur le formalisme de Jones de la polarisation [4]; l’équation d’état ou *a priori* n’apporte presque aucune information physique, mais repose sur une analogie mécanique. D’un point de vue bayésien, cela revient à décrire les paramètres

¹Recherche effectuée dans le cadre du projet ANR RICOCHET ANR-21-CE48-0013.

l'évolution temporelle des signaux pour ne conserver que certaines caractéristiques générales connues des ondes. Par exemple [5], les binaires coalescents génèrent des trajectoires non linéaires de type chirps dans le plan temps-fréquence. Si le plan d'orbite est sujet à la précession, la polarisation de l'onde peut changer.

L'objectif est donc de suivre un chirp ($a_t \exp(i\psi_t)$) qui explose (en amplitude et en fréquence) conjointement avec deux paramètres de polarisation qui varient lentement. Dans ce document, nous nous limitons à un modèle simple pour ces paramètres variables.

Chaque variable d'intérêt est considérée comme une mesure de la position u_t d'une particule soumise à une accélération brownienne. Le vecteur d'état d'une variable est donc $\mathbf{S}_t = (u_t \ v_t)^\top$ où $dv_t = \sqrt{\alpha} dw_t$. Le mouvement brownien w_t est de variance unité. Alors, \mathbf{S}_t satisfait l'équation différentielle stochastique de Langevin [11]

$$d\mathbf{S}_t = \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{S}_t dt + \mathbf{G}_t dw_t \quad (2)$$

$$\text{où } \mathbf{F}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{G}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \quad (3)$$

La matrice de covariance $\mathbf{Q}_t = E[\mathbf{S}_t \mathbf{S}_t^\top]$ satisfait une équation différentielle issue de l'équation de Fokker-Planck [11] dont l'intégration entre t_0 et t avec des conditions initiales nulles donne

$$\mathbf{Q}_{t-t_0} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^3}{3} & \frac{(t-t_0)^2}{2} \\ \frac{(t-t_0)^2}{2} & (t-t_0) \end{pmatrix}$$

L'équation d'état équivalente à temps discret (période d'échantillonnage δ), s'obtient donc en utilisant les résultats continus ci-dessus pour $\delta = t - t_0$. Elle s'écrit

$$\begin{cases} u_t = u_{t-1} + v_{t-1}\delta + \varepsilon_t^u \\ v_t = v_{t-1} + \varepsilon_t^v \end{cases}$$

avec

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_t^\top] = \mathbf{Q}_\delta, \quad \delta = (t - t_0) \text{ et } \varepsilon_t = (\varepsilon_t^u \ \varepsilon_t^v)^\top \quad (4)$$

2.3 Synthèse

Chacun des paramètres $p \in \{a, \psi, \theta, \varphi\}$ est associé à un vecteur d'état bidimensionnel $(u_p \ v_p)^\top$ et un paramètre de variance α_p . Cela conduit finalement à considérer un vecteur d'état 'global' dans \mathbb{R}^8 qui suit une équation linéaire dynamique discrète issue du modèle stochastique décrit ci-dessus. L'équation d'observation relie \mathbf{z}_t à \mathbf{x}_t à chaque instant et introduit un bruit d'observation.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1} + \varepsilon_t \\ \mathbf{z}_t = \mathbf{H}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{n}_t \end{cases} \text{ où } \begin{cases} \mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{J}, \mathbf{J}, \mathbf{J}, \mathbf{J}) \\ \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

\mathbf{M} ne dépend pas du temps et $\mathbf{H}(\cdot)$ est une fonction non linéaire de \mathbf{x}_t implicitement définie par (1) avec $x_1 = a, x_3 = \psi, x_5 = \theta, x_7 = \varphi$. Le bruit dynamique est blanc gaussien, centré et de covariance

$$\mathbf{Q}_{tot} = \text{diag}(\alpha_a \mathbf{Q}_\delta, \alpha_\psi \mathbf{Q}_\delta, \alpha_\theta \mathbf{Q}_\delta, \alpha_\varphi \mathbf{Q}_\delta) \quad (6)$$

La covariance du bruit d'observation est notée \mathbf{R}_t .

3 Algorithme et calibration

L'équation d'observation est non linéaire; nous ne présentons dans cette communication que les résultats obtenus pour le filtre de Kalman étendu.

3.1 Filtre de Kalman étendu (EKF)

L'EKF requiert une linéarisation de \mathbf{H} autour du vecteur d'état courant [2]. Soit $\nabla \mathbf{H}(\mathbf{x})$ le 4×8 jacobien de \mathbf{H} en \mathbf{x} , dont le calcul, lourd, ne présente pas de difficultés. Les équations de l'EKF sont classiques mais résumées par l'algorithme 1.

Pour calibrer l'algorithme, considérons l'hypothèse dans laquelle les fluctuations de la composante u_p d'une variable d'état $(u_p \ v_p)$, $p \in \{a, \psi, \theta, \varphi\}$, sur une période d'échantillonnage δ sont de l'ordre

de Δu_p . La forme de la matrice de covariance d'état \mathbf{Q}_δ (section 2.2) indique que l'écart-type du processus de diffusion stochastique est $\sqrt{\alpha_p \delta^3 / 3}$. Pour que le filtre soit à même de 'poursuivre' les fluctuations du vecteur d'état, il est nécessaire d'imposer $3|\Delta u_p|^2 / \delta^3 \lesssim \alpha_p$. Une valeur supérieure de α_p permettrait de suivre des fluctuations plus importantes, au prix d'une moindre qualité de la valeur estimée de l'état, puisque le rapport signal/bruit associé à l'équation d'état serait plus faible. Si la quantité u_p à estimer présente *a priori* des variations lentes (à l'échelle de temps δ), α_p doit être choisi petit. La quantité δ peut également être réglée; cela affecte la structure de la matrice de covariance \mathbf{Q}_{tot} , et donc le lissage des trajectoires estimées (eqs. (4),(6)). Cependant, cela crée un changement d'échelle de l'axe du temps, qui doit être pris en compte pour les paramètres de vitesse v_p . Dans le cas particulier et important de la porteuse ($\exp(i\psi_t)$), un raisonnement identique doit être conduit sur la fréquence instantanée $2\pi\nu_\psi\delta$.

Algorithme 1 : Kalman étendu

```

t = 0
pour t ≥ 1 faire
  Prédiction :
  x̂t/t-1 = Mx̂t-1/t-1
  Γt/t-1 = MΓt-1/t-1M⊤ + Qtot
  Estimation :
  ẑt/t-1 = H(x̂t/t-1)
  soit ∇Ht/t-1 = ∇H(x̂t/t-1)
  Kt = Γt/t-1∇Ht/t-1⊤(∇Ht/t-1Γt/t-1∇Ht/t-1⊤ + Rt)-1
  et = zt - ẑt/t-1
  x̂t/t = x̂t/t-1 + Ktet
  Γt/t = (I8 - ∇Ht/t-1)Γt/t-1
fin

```

4 L'algorithme en action

Le comportement de l'algorithme est illustré sur un exemple synthétique, puis sur des GW numériques générées par un modèle relativiste du signal émis par la coalescence de deux trous noirs.

4.1 Exemple synthétique.

Considérons le signal décrit par l'équation (1), observé sur $[0; T]$, échantillonné à 100 Hz. Les trajectoires temporelles des paramètres sont décrites par

$$\begin{cases} a_t = 1 + 0.1 \cos(2\pi 0.2t) \\ \theta_t = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi 0.05t)\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_t = 2\pi t \left(1 + 0.98 \frac{t^4}{T^4}\right) \\ \varphi_t = \pi \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi 0.1t + \xi)\right) \end{cases}$$

où ξ est une phase aléatoire. Le résultat de l'EKF appliqué au système d'état Eq. (5) est présenté sur la figure 2. Dans cet exemple le niveau de bruit ($\sigma_n = 1$) est important, de l'ordre de l'amplitude instantanée du signal. La fréquence porteuse $\dot{\psi}/2\pi$ est bien estimée comme le confirment le spectrogramme et le graphique supérieur droit. L'estimation des autres paramètres, tous liés à l'amplitude des composantes du signal, est moins satisfaisante. Une étude systématique doit être poursuivie sur cet exemple particulier, s'appuyant sur les valeurs de la matrice de covariance *a posteriori* $\Gamma_{t|t}$ pour quantifier ces affirmations.

4.2 Ondes gravitationnelles polarisées dans un bruit synthétique

Les signaux d'ondes gravitationnelles analysés sont ceux de la Fig. (1), auxquels est ajouté un bruit blanc gaussien (d'écart-type $\sigma_n = 0.3$ sur chaque composante). Ce signal est particulièrement délicat à exploiter, car la deuxième composante du signal a une amplitude très faible (presque nulle) au début et vers la fin de l'observation. Le rapport signal/bruit est donc localement très faible, et les paramètres liés à l'amplitude (a, θ, φ) deviennent difficiles à estimer. Cependant, la fréquence porteuse reste bien estimée, comme l'illustre la Fig. (3) où sont représentées de haut en bas, les composantes bruitées observées, le spectrogramme de la seconde composante, et ce dernier superposé à la trajectoire estimée de la fréquence porteuse. Sur la Fig.

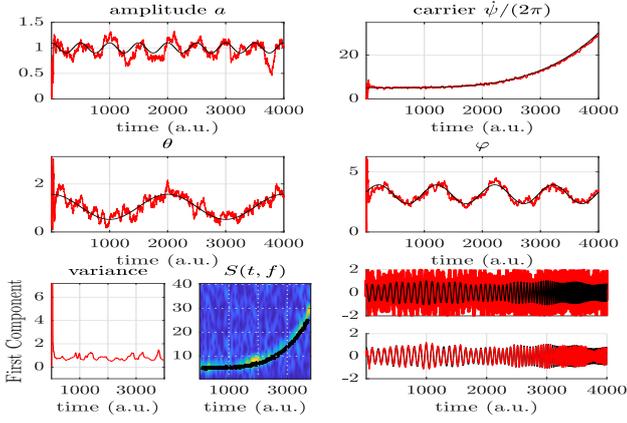


FIGURE 2 : Estimation ou poursuite des paramètres (en rouge) pour un bruit d'observation de $\sigma_n = 1$. Les valeurs exactes sont superposées en noir. La vignette inférieure gauche représente la trace de la covariance *a posteriori* pour la seule première composante et l'évolution de la fréquence estimée, superposée au spectrogramme de la composante observée. La vignette inf. droite représente la première composante non bruitée et le signal observé (en haut), puis ses valeurs estimées (en bas). Les paramètres de simulation sont $\sigma_b = 1, \delta = 0.1, \sigma_a = 10^{-4}, \sigma_\psi = 5.10^{-3}, \sigma_\theta = 10^{-3}, \sigma_\varphi = 10^{-3}$.

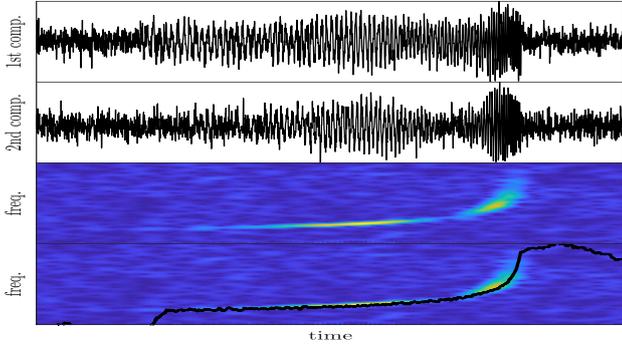


FIGURE 3 : Observation bruitée (bruit blanc gaussien, $\sigma_n = 0.3$) des deux composantes de l'onde gravitationnelle. Spectrogrammes de la 2ème composante, avec et sans superposition de la fréquence instantanée estimée.

(4) sont reportées les trajectoires estimées des différents paramètres pour un RSB plus favorable ($\sigma_n = 0.1$). Les 'vraies' trajectoires (estimées à partir des signaux sans ajout de bruit) figurent en noir. Le signal d'intérêt n'est présent que dans l'intervalle approximatif $t = [500; 2000](a.u.)$. En dehors de ce dernier, la trace de la matrice de covariance *a posteriori* $\Gamma_{t|t}$ (voir l'algorithme 1) est très élevée et fluctue beaucoup (dans l'EKF, la variance *a posteriori* dépend aussi de l'état estimé passé). Le filtre est cependant capable d'acquérir rapidement l'amplitude et les différentes phases, et de fournir de bonnes estimations. Il existe intrinsèquement des facteurs d'ambiguïté de π pour les phases, ce qui conduit à une ambiguïté de symétrie dans l'estimation du vecteur de Jones. La diminution de l'énergie du signal aux alentours de 800 et 1700 (*a.u.*), équivalente à une baisse considérable du RSB, amène notamment des glissements de cycle et des déverrouillages possibles, rendant l'estimation des paramètres de polarisation θ et φ très difficile. La fréquence instantanée reste néanmoins bien estimée même si une composante est très faible. Cela est dû à l'étalement du bruit dans le plan temps-fréquence (ou, de manière équivalente, la concentration du support du chirp dans ce plan).

4.3 Ondes gravitationnelles polarisées dans le bruit réel

Nous disposons de données de bruit réel mesurées dans l'interféromètre Ligo/Virgo [1]. La densité spectrale de puissance (dsp) estimée de ce bruit (après un filtre passe-haut pour couper les très basses fré-

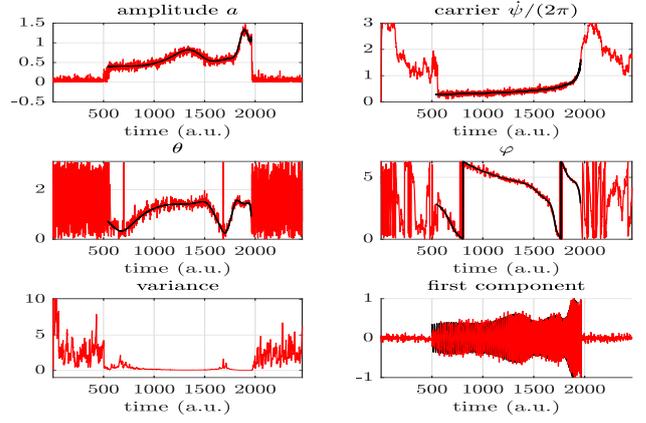


FIGURE 4 : Paramètres estimés (en rouge) pour une onde gravitationnelle numérique dans un bruit blanc gaussien, $\sigma_n = 0.1$. Les paramètres estimés sans bruit sont superposés en noir. $\sigma_b = 0.1, \delta = 0.9, \sigma_a = 0.01, \sigma_\psi = 0.015, \sigma_\theta = 0.001, \sigma_\varphi = 0.001$

quences) est représentée sur la figure (5). Le bruit apparaît composé d'une composante à large bande superposée à de nombreux pics à bande étroite. Dans le pipeline utilisé par le consortium Ligo/Virgo, la dsp estimée (en l'absence de signal) est utilisée pour blanchir le signal acquis. Si ce blanchiment n'est pas mis en oeuvre ici (cela sera fait dans des travaux futurs), un filtre passe bas de fréquence de coupure normalisée à 0,2 –les GW sont supposées de fréquence faible comparée à la fréquence d'échantillonnage–, ainsi que deux filtres réjecteurs de fréquence (filtres à encoches ou 'notch filters') centrés sur les fréquences normalisées 0,012 et 0,076. Les résultats d'estimation des

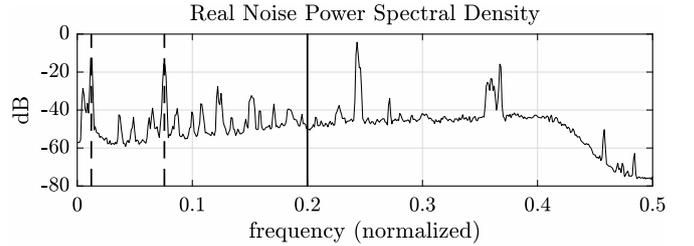


FIGURE 5 : Dsp (non filtrée) de la première composante du bruit, en fréquence normalisée. Les deux lignes en pointillé indiquent les fréquences des deux filtres 'notch' appliqués, la ligne noire verticale correspond à la fréquence de coupure du filtre passe-bas.

différents paramètres de l'onde gravitationnelle noyée dans le bruit réel, obtenus par l'EKF proposé après application des filtres discutés précédemment, sont décrits sur la figure (6). Les trajectoires temporelles estimées des paramètres $\{a, \theta, \psi/2\pi, \phi\}$ sont représentées en rouge. Les trajectoires représentées en noir sont les trajectoires estimées en absence de bruit. Les hypothèses sous-jacentes à l'approche de Kalman ne sont plus valables ici, puisque le bruit de l'observation n'est pas blanc (le blanchiment n'est pas appliqué ici, comme souligné précédemment). Les résultats restent cependant satisfaisants. Il est difficile de donner une notion de RSB ici puisque les signaux ont une enveloppe variable dans le temps. La représentation de la seconde composante bruitée (en rouge) et non bruitée (en noir) sur la vignette inférieure droite permet néanmoins d'en avoir une idée. La partie inférieure de cette même vignette montre la reconstruction obtenue de cette composante. Si la connaissance ou l'acquisition de réalisation du bruit sont exploitées pour définir des filtres de pré-traitement, il est important de souligner qu'aucune connaissance physique *a priori* sur les signaux n'est utilisée dans la méthode décrite. La dynamique de la représentation d'état est une simple diffusion brownienne. Ces premiers résultats sont donc très encourageants.

Remarquablement, comme dans le cas du bruit blanc gaussien,

la méthode est capable d'estimer correctement la porteuse, même après l'application des filtres à encoches, l'estimation par EKF s'appuyant alors sur la régularité du modèle d'état (donné par la diffusion brownienne). Ceci est illustré par les spectrogrammes de la vignette inférieure gauche de la figure (6) ; le spectrogramme de l'observation filtrée est représenté à gauche, celui du signal initial superposé à l'estimation de la fréquence instantanée est à droite. Le filtre à encoches centré sur 0,075 traverse le chirp sans que la trajectoire estimée ne soit affectée.

Les paramètres d'amplitude et de polarisation s'avèrent plus difficiles à estimer. Les temps d'acquisition (verrouillage) sont plus longs pour θ et φ , et ces deux paramètres subissent de nombreux glissements de cycle (changements dans la détermination de la phase). Nous avons également constaté des probabilités d'accrochage pour ces deux paramètres d'autant plus faible que le bruit est puissant.

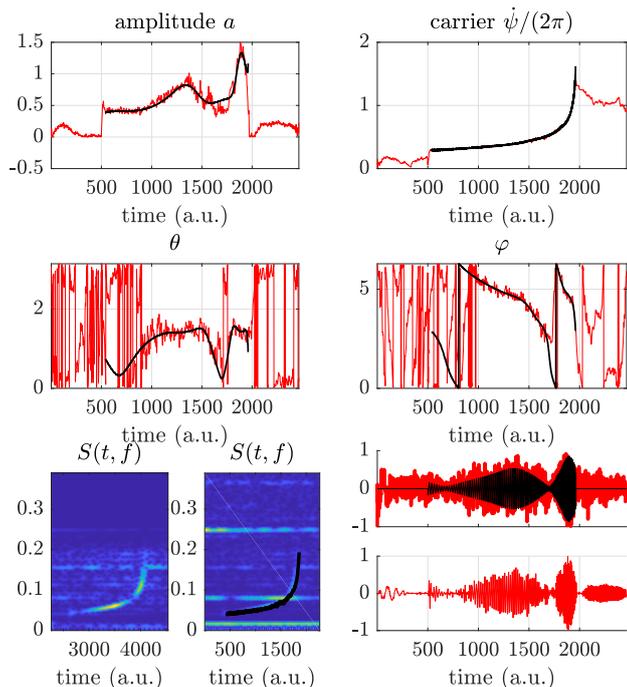


FIGURE 6 : Paramètres estimés (en rouge) pour une onde gravitationnelle numérique dans un bruit réel mesuré dans les interféromètres LIGO/VIRGO. L'observation est filtrée en passe-bas à la fréquence normalisée 0.2, et passe à travers deux filtres coupe-bande aux fréquences normalisées 0.012 et 0.075. Chaque composante du bruit est normalisée par la valeur maximale du bruit sur les deux observations. Le bruit est ajouté à l'onde gravitationnelle avec un facteur d'amplification de 3. Les paramètres estimés sans bruit sont superposés en noir. Le spectrogramme de gauche est le spectrogramme après filtrage. Le spectrogramme de droite est le spectrogramme avant filtrage superposé avec la "vraie" fréquence instantanée, telle qu'estimée sans bruit. $\sigma_b = 0.1$, $\delta = 0.9$, $\sigma_a = 0.01$, $\sigma_\psi = 0.02$, $\sigma_\theta = 0.01$, $\sigma_\varphi = 0.01$

5 Discussion

Ce travail rend compte d'une première tentative d'estimation en ligne de tous les paramètres caractérisant un signal oscillant bivarié. Plusieurs descriptions (équivalentes) des signaux bivariés polarisés sont possibles : Formalisme de Jones ([4]), ellipses modulées ou composantes rotatives ([12] ou [8]), quaternions [7]. Dans le cas bivarié, la polarisation peut être résumée en un vecteur unitaire dans \mathbb{R}^3 , appartenant à la sphère de Poincaré. Dans une description cartésienne, trois paramètres sont donc nécessaires : Les paramètres dits de Stokes [4]. La paramétrisation sphérique (formalisme de Jones) adoptée ici ne nécessite que deux paramètres θ et φ , les coordonnées sphériques de l'état de polarisation.

La fréquence instantanée de la porteuse peut être bien estimée même dans des situations de bruit élevé, ce qui est principalement dû à la 'dilution' du bruit dans le plan temps-fréquence, et au fait que le signal (chirp) recherché vit sur un support de faible dimension dans

ce même plan. L'algorithme d'estimation proposé a l'avantage d'être robuste aux filtres à encoches, grâce à l'hypothèse de lissage *a priori* contenue dans le modèle de diffusion utilisé pour l'équation d'état. Cependant, l'amplitude instantanée et les paramètres de polarisation sont plus difficiles à estimer, en particulier si l'une des composantes présente un mauvais RSB localement.

D'autre part, des difficultés liées au verrouillage et au glissement du cycle subsistent, et dépendent fortement du niveau de bruit. Ces deux problèmes restent à étudier. Une première approche pourrait s'appuyer sur l'étude d'une solution lissée de l'équation de Riccati suivie par la matrice de covariance *a posteriori* $\Gamma_{t|t}$, sous l'hypothèse de stationnarité locale. L'approche développée ici est également très proche des boucles à verrouillage de phase (pour les paramètres de phase), et l'intégration utilisée dans l'équation d'état de chaque paramètre (espace d'état bidimensionnel) rappelle les algorithmes adaptatifs multi-pas. Une autre approche pourrait donc s'inspirer des nombreux travaux existant dans la théorie des boucles à verrouillage de phase [10], et sur la théorie des algorithmes multi-pas [3].

Différentes pistes peuvent être envisagées pour améliorer l'algorithme. Le lissage à l'aide de la stratégie de lissage classique de la théorie de Kalman [2] améliorera la variance *posterior*, au prix d'une complexité accrue et d'un retard à l'estimation. Une plus grande régularité peut être introduite en utilisant un processus d'Orstein-Uhlenbeck pour l'équation d'état, ajoutant ainsi un paramètre pour contrôler la régularité des paramètres. Enfin, il sera nécessaire de prendre en compte que l'évolution des paramètres de polarisation dans le formalisme de Jones doit s'exprimer comme un processus dynamique sur la sphère S^2 , et développer l'EKF sur cette variété.

Références

- [1] R. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Open data from the first and second observing runs of Advanced LIGO and Advanced Virgo SoftwareX 13 (2021) 100658
- [2] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal filtering*. Prentice Hall, 1979.
- [3] A. Benveniste, R. Priouret, and M. Métivier. *Adaptive algorithms and stochastic approximations*. Springer Verlag, 1990.
- [4] C. Brosseau. *Fundamentals of polarized light : a statistical optics approach*. Wiley, 1998.
- [5] J. D. E. Creighton and W. G. Anderson. *Gravitational-Wave Physics and Astronomy. An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis*. Wiley, 2011.
- [6] J. Flamant, P. Chainais, E. Chassande-Mottin, F. Feng, and N. Le Bihan. Non-parametric characterization of gravitational-wave polarizations. In *26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, 2018.
- [7] J. Flamant, N. Le Bihan, and P. Chainais, Time-frequency analysis of bivariate signals, *App. and Comp. Harm. Ana. (ACHA)*, vol. 46, no. 2, 2019. , pp. 351-383
- [8] J. Gonella, A rotary-component method for analysing meteorological and oceanographic vector time series. *Deep Sea Research And Oceanographic Abstracts*. **19**, 1972, pp. 833-846
- [9] P. Flandrin. *Time-frequency/Time-scale analysis*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [10] F. Gardner. *Phase lock techniques, 3rd Ed.*. John Wiley, 2005.
- [11] A. Jazwinsky *Stochastic Processes Optimal filtering* Dover Books on Electrical Engineering, 2008
- [12] J. M. Lilly and S. C. Olhede. Bivariate instantaneous frequency and bandwidth. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 58(2), 2010.
- [13] J. M. Lilly. Modulated oscillations in three dimensions. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 59(12) :5930–5943, 2011.