

Décompositon de Tucker basée sur un Train de Tenseurs avec des cœurs CP contraints couplés

Maxence GIRAUD¹ Vincent ITIER^{2,3} Rémy BOYER¹ Yassine ZNIYED⁴ André L.F. DE ALMEIDA⁵

¹Univ. Lille, UMR 9189 CRIStAL, F-59000 Lille, France

²IMT Nord Europe, Institut Mines-Télécom, Centre for Digital Systems, F-59000 Lille, France

³Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, Institut Mines-Télécom, UMR 9189 CRIStAL, F-59000 Lille, France

⁴Univ. Toulon, Aix Marseille Université, CNRS, LIS, UMR 7020, France

⁵Département d'ingénierie téléinformatique, Université Fédérale du Ceará, Brésil

Résumé – Nous proposons une nouvelle méthodologie d'estimation de la décomposition de Tucker (DT) avec une précision d'estimation similaire à celle de la HOSVD et des coûts de calcul et de stockage qui n'explorent pas. Si les données non bruitées suivent une DT, la décomposition en train de tenseurs (DTT) correspondante prend une structure algébrique remarquable. Plus précisément, nous prouvons que pour un tenseur de Tucker d'ordre Q , la DTT correspondante est constituée de $Q - 3$ tenseurs cœurs d'ordre 3 qui suivent une décomposition polyadique canonique contrainte (DPCC). En utilisant cette nouvelle formulation et la propriété de couplage entre les TT-cœurs voisins, nous proposons un schéma de type JIRAFE pour la DT, appelé TRIDENT.

Abstract – We propose a new methodology for the Tucker decomposition with a similar estimation accuracy as the HOSVD with non-exploding computational and storage costs. If the noise-free data follows a TD, the corresponding Tensor Train Decomposition (TTD) takes a remarkable specific structure. More precisely, we prove that for a Q -order Tucker tensor, the corresponding TTD is constituted by $Q - 3$ 3-order TT-core tensors that follow a Constrained Canonical Polyadic Decomposition (CCPD). Using this new formulation and the coupling property between neighboring TT-cores, we propose a JIRAFE-type scheme for the TD, called TRIDENT.

1 Introduction

Les décompositions tensorielles de rang faible sont de plus en plus utilisées pour résoudre différents types de problèmes avec des données multilinéaires, et ce dans divers domaines [2, 8, 5]. Une généralisation populaire de la décomposition en valeurs singulières (SVD) aux tenseurs est la décomposition de Tucker (DT) [9]. Pour des tenseurs massifs, la DT souffre de la "malédiction de la dimensionnalité" car la complexité et les coûts de stockage augmentent de façon exponentielle avec l'ordre du tenseur. Récemment, des décompositions en réseaux de tenseurs tels que la décomposition en Train de Tenseur (DTT) [7] ont été introduites et visent à atténuer la malédiction de la dimensionnalité. Dans cet article, nous proposons d'utiliser la formulation en DTT de la DT [11] pour estimer les matrices facteurs de la DT, de la même manière que l'algorithme JIRAFE [11] utilise la DTT pour estimer la décomposition Canonique Polyadique (CPD) [6]. Nous étendons la méthode [11] en prouvant que les cœurs du TT suivent une décomposition polyadique canonique contrainte (DPCC). Ce résultat théorique suggère un nouvel algorithme appelé TRIDENT (**T**ucker **D**ecomposition based on a **T**ensor **T**rain of **C**oupled and **C**onstrained **CP** cores). *Notations* : Les scalaires, vecteurs, matrices et tenseurs sont respectivement notés par une lettre minuscule (a), une lettre minuscule en gras (\mathbf{a}), une lettre majuscule en gras (\mathbf{A}) et une lettre majuscule calligra-

phique (\mathcal{A}). L'entrée d'un tenseur, s'écrit x_{i_1, \dots, i_n} . Le n ème dépliement d'un tenseur \mathcal{X} s'écrit $\mathcal{X}^{(n)}$. Le tenseur identité s'écrit $\mathcal{I}_{f,d}$ où d est l'ordre et f la taille des dimensions. Les symboles \circ et \otimes désignent respectivement le produit dyadique entre les vecteurs et le produit de Kronecker entre les matrices. Le produit de Khatri-Rao est noté \odot . Enfin, la multiplication mode- n et multiplication mode- $\binom{m}{n}$ s'écrivent respectivement comme \times_n et \times_n^m .

2 Tenseurs, rang et décomposition

Définition 2.1 (Décompositon Tucker et CP)

La décomposition Tucker d'un tenseur \mathcal{X} d'ordre Q et de dimensions $I_1 \times \dots \times I_Q$ avec $\{T_1, \dots, T_Q\}$ comme rangs multilinéaires, est définie comme [9]

$$\mathcal{X} = \mathcal{C} \times_1 \mathbf{F}_1 \times_2 \mathbf{F}_2 \times_3 \dots \times_Q \mathbf{F}_Q, \quad (1)$$

Avec \mathcal{C} un tenseur d'ordre Q de dimensions $T_1 \times \dots \times T_Q$, et \mathbf{F}_q les matrices facteurs de dimensions $I_q \times T_q$, for $1 \leq q \leq Q$. La décomposition CP [6] peut être définie comme une DT dont le tenseur cœur est le tenseur identité et dont les rangs multilinéaires sont tous égaux à une valeur unique appelée rang canonique.

Notons que dans le cas où le tenseur cœur d'une DT peut se factoriser sous le format CP, la DT peut être réécrite comme une CPD. Cette observation ainsi que les définitions suivantes, vont nous permettre de mettre en évidence un nouveau lien entre la DT et la DTT.

Ces travaux ont été partiellement financés par le programme ANR THIA "AI_PhD@Lille" de l'Agence Nationale de Recherche, ANR-20-THIA-0013 ainsi que le projet the Cornelia (CO-construction RespoNsable Et durable d'une Intelligence Artificielle).

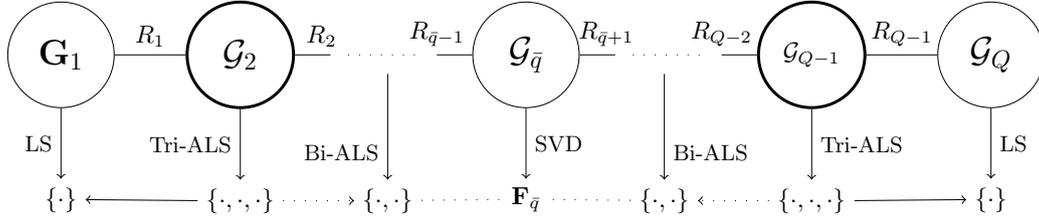


FIGURE 1 : Schéma de l’algorithme TRIDENT. En commençant de \mathcal{G}_2 et \mathcal{G}_{Q-1} on estime itérativement les facteurs Tucker et leurs variables latentes associées grâce au couplage entre les TT-cœurs.

Propriété 1 (Réorganisation de la matrice identité en CP)

Si $\mathcal{Y} = \text{reshape}(\mathbf{I}_c; (a, b, c))$ with $ab = c$, est un réarrangement d’une matrice identité, nous avons [3]

$$\mathcal{Y} = \mathcal{I}_{3,ab} \times_1 \Phi_{a,b} \times_2 \Psi_{a,b} \quad (2)$$

avec $\Psi_{a,b} = \mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_b^T \in \mathbb{R}^{a \times ab}$ et $\Phi_{a,b} = \mathbf{1}_a^T \otimes \mathbf{I}_b \in \mathbb{R}^{b \times ab}$.

Définition 2.2 (Train de Tenseur)

La décomposition en train de tenseurs d’un tensor \mathcal{X} avec des TT-rangs $\{R_1, \dots, R_{Q-1}\}$ est défini comme [7]

$$\mathcal{X} = \mathbf{G}_1 \times_2 \mathcal{G}_2 \times_3 \mathcal{G}_3 \times_4 \dots \times_Q \mathbf{G}_Q \quad (3)$$

avec \mathcal{G}_j de dimensions $R_{j-1} \times I_{j-1} \times R_j$, pour $1 \leq j \leq Q$, et sont appelés TT-cœurs, et $R_0 = R_Q = 1$.

3 Un nouveau lien entre Tucker et Train de Tenseur

3.1 Etat de l’art

La méthode proposée repose sur la relation entre la DT et la DTT établie récemment dans [11]. Les auteurs appliquent la TT-SVD à une DT d’un tenseur et montre comment écrire la DTT qui en découle en incorporant les matrices facteurs et le tenseur cœur de la DT.

Théorème 1

Considérons un tenseur \mathcal{X} de dimensions $I_1 \times \dots \times I_Q$ exprimé dans un format Tucker avec des rangs multilinéaires $\{T_1, \dots, T_Q\}$. L’ensemble des TT-cœurs $\{\mathcal{G}_q\}$ associé à la DTT de \mathcal{X} est donné par[11]

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{F}_1 \mathbf{M}_1^{-1}, \\ \mathcal{G}_q &= \mathcal{T}_q \times_1 \mathbf{M}_{q-1} \times_2 \mathbf{F}_q \times_3 \mathbf{M}_q^{-T} \quad (1 < q < \bar{q}), \\ \mathcal{G}_{\bar{q}} &= \mathcal{C}_{\bar{q}} \times_1 \mathbf{M}_{\bar{q}-1} \times_2 \mathbf{F}_{\bar{q}} \times_3 \mathbf{M}_{\bar{q}}^{-T}, \\ \mathcal{G}_q &= \bar{\mathcal{T}}_q \times_1 \mathbf{M}_{q-1} \times_2 \mathbf{F}_q \times_3 \mathbf{M}_q^{-T} \quad (\bar{q} < q < Q), \\ \mathbf{G}_Q &= \mathbf{M}_{Q-1} \mathbf{F}_Q^{-T}, \end{aligned} \quad (4)$$

avec \bar{q} le plus petit q qui vérifie $\prod_{i=1}^q T_i < \prod_{i=q+1}^Q T_i$, les rangs TT définis comme $R_q = \min \left(\prod_{i=1}^q T_i, \prod_{i=q+1}^Q T_i \right)$. Les matrices facteurs sont notées \mathbf{F}_q et ont des pour dimensions $R_q \times R_q$. Les matrices \mathbf{M}_q sont des matrices de changement de base de dimensions $R_q \times R_q$ qui sont des variables latentes partagées entre les TT-cœurs voisins. Le tenseur $\mathcal{C}_{\bar{q}}$ est un réarrangement du tenseur cœur \mathcal{C} de la DT. Enfin, \mathcal{T}_q et $\bar{\mathcal{T}}_q$ sont des réarrangements de la matrice d’identité pour correspondre aux dimensions des facteurs de l’équation (5).

Cette relation conduit à l’algorithme FMP [11], qui permet d’estimer les facteurs de la DT à l’aide de la DTT.

3.2 La formulation en CP contraints couplés

Afin d’estimer tous les facteurs de la DT en utilisant l’équivalence entre la DT et la DTT, nous reformulons cette équivalence à l’aide de la propriété 1. Les tenseurs \mathcal{T}_q et $\bar{\mathcal{T}}_q$ de l’équation (4) sont des remodelages de la matrice d’identité définie selon

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_q &= \text{reshape}(\mathbf{I}_{R_q}; (R_{q-1}, T_q, R_q)) \quad (1 < q < \bar{q}), \\ \bar{\mathcal{T}}_q &= \text{reshape}(\mathbf{I}_{R_q}; (R_{q-1}, T_q, R_q)) \quad (\bar{q} < q < Q). \end{aligned} \quad (5)$$

En utilisant le théorème 1 et l’équation (5), nous pouvons décomposer les TT-cœurs dans l’équation (4) en DPCC, dont la structure est définie par le lemme suivant.

Lemme 1

En utilisant la formulation CP contrainte de la propriété 1, nous pouvons réécrire les deuxième et quatrième équations (pour $1 < q < \bar{q}$ et $\bar{q} < q < Q$, respectivement) des TT-cœurs définis dans le théorème 1 comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_q &= \mathcal{I}_{3,R_q} \times_1 \mathbf{M}_{q-1} \Psi_{R_{q-1},T_q} \times_2 \mathbf{F}_q \Phi_{R_{q-1},T_q} \times_3 \mathbf{M}_q^{-T} \\ \mathcal{G}_q &= \mathcal{I}_{3,R_q} \times_1 \mathbf{M}_{q-1} \times_2 \mathbf{F}_q \Phi_{R_q,T_q} \times_3 \mathbf{M}_q^{-T} \Psi_{R_q,T_q}. \end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant la propriété 1, nous pouvons réécrire \mathcal{T}_q et $\bar{\mathcal{T}}_q$ comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_q &= \mathcal{I}_{3,R_q} \times_1 \Phi_{R_{q-1},T_q} \times_2 \Psi_{R_{q-1},T_q}, \\ \bar{\mathcal{T}}_q &= \mathcal{I}_{3,R_q} \times_2 \Phi_{R_q,T_q} \times_3 \Psi_{R_q,T_q}. \end{aligned} \quad (6)$$

Nous dérivons les deux expressions ci-dessus pour \mathcal{G}_q (pour $1 < q < \bar{q}$ et $\bar{q} < q < Q$, respectivement) en substituant l’équation (6) dans l’équation (4) et en utilisant le fait que l’ordre de la multiplication mode- n n’a pas d’importance. \square

4 Estimation

4.1 Algorithme TRIDENT

Dans cette section, nous présentons un nouvel algorithme qui permet d’estimer les matrices facteurs d’un DT d’un tenseur. Il convient de résoudre le problème d’optimisation suivant

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_Q, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_{Q-1}} \|\mathbf{G}_1 - \mathbf{F}_1 \mathbf{M}_1^{-1}\|_F^2 \\ & + \sum_{q=2}^{\bar{q}-1} \|\mathcal{G}_q - \mathcal{I}_{3,R_q} \times_1 \mathbf{M}_{q-1} \Psi_{R_{q-1},T_q} \times_2 \mathbf{F}_q \Phi_{R_{q-1},T_q} \times_3 \mathbf{M}_q^{-T}\|_F^2 \\ & + \|\mathcal{G}_{\bar{q}} - \mathcal{C}_{\bar{q}} \times_1 \mathbf{M}_{\bar{q}-1} \times_2 \mathbf{F}_{\bar{q}} \times_3 \mathbf{M}_{\bar{q}}^{-T}\|_F^2 \\ & + \sum_{q=\bar{q}+1}^{Q-1} \|\mathcal{G}_q - \mathcal{I}_{3,R_q} \times_1 \mathbf{M}_{q-1} \times_2 \mathbf{F}_q \Phi_{R_q,T_q} \times_3 \mathbf{M}_q^{-T} \Psi_{R_q,T_q}\|_F^2 \\ & + \|\mathbf{G}_Q - \mathbf{M}_{Q-1} \mathbf{F}_Q^{-T}\|_F^2. \end{aligned}$$

En utilisant la formulation de l'équivalence entre la DT et la DTT et en exploitant le lemme précédent, les matrices facteurs de la DT sont estimées par des ALS après avoir calculé la TT-SVD, comme illustré figure 1. Nous estimons d'abord \mathbf{F}_2 et \mathbf{F}_{Q-1} ainsi que les variables latentes associées à ces facteurs à l'aide d'une méthode des moindres carrés alternés (ALS) appliquée sur les TT-cœurs décomposés selon la DPCC correspondantes. Pour $1 < q < \bar{q}$, les matrices facteurs des TT-cœurs estimés via un Tri-ALS contraint, chaque itération étant composée des étapes d'estimation suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{q-1} &= \frac{1}{T_q} \mathbf{G}_q^{(1)} \left((\mathbf{M}_q^{-T} \odot \mathbf{F}_q \Phi_{R_{q-1}, T_q})^T \right)^\dagger \Psi_{R_{q-1}, T_q}^T, \\ \mathbf{F}_q &= \frac{1}{R_{q-1}} \mathbf{G}_q^{(2)} \left((\mathbf{M}_q^{-T} \odot \mathbf{M}_{q-1} \Psi_{R_{q-1}, T_q})^T \right)^\dagger \Phi_{R_{q-1}, T_q}^T, \\ \mathbf{M}_q^{-T} &= \mathbf{G}_q^{(3)} \left((\mathbf{F}_q \Phi_{R_{q-1}, T_q} \odot \mathbf{M}_{q-1} \Psi_{R_{q-1}, T_q})^T \right)^\dagger, \end{aligned} \quad (7)$$

où nous avons utilisé le fait que $\Psi_{a,b} \Psi_{a,b}^T = b \mathbf{I}_a$ et $\Phi_{a,b} \Phi_{a,b}^T = a \mathbf{I}_b$. De même nous pouvons faire le même raisonnement pour $\bar{q} < q < Q$.

Nous appliquons d'abord ces Tri-ALS aux TT-cœurs \mathcal{G}_2 et \mathcal{G}_{Q-1} . Nous propageons ensuite les matrices latentes associées en utilisant le critère LS couplé pour effectuer une estimation Bi-ALS sur les autres cœurs (en suivant le schéma Tri-ALS décrit Eq. 7 mais en ignorant la matrice de changement de base propagée). Comme nous n'avons pas de garantie théorique de convergence pour l'ALS, nous utilisons le critère $\lambda = \frac{\|\langle \widehat{\mathbf{F}}^i \rangle - \langle \widehat{\mathbf{F}}^{i-1} \rangle\|_F}{\|\langle \widehat{\mathbf{F}}^{i-1} \rangle\|_F}$ ou $\langle \cdot \rangle$ denote le sous-espace engendré. La valeur de λ est fixée expérimentalement pour avoir le meilleur compromis entre le nombre d'itérations et l'erreur de reconstruction. Enfin, une SVD est appliquée au deuxième dépliage de $\mathcal{G}_{\bar{q}} \times_1 \widehat{\mathbf{M}}_{\bar{q}-1}^{-1} \times_3 \widehat{\mathbf{M}}_{\bar{q}}$, en on considère la base singulière gauche en tant que facteur de Tucker $\widehat{\mathbf{F}}_{\bar{q}}$. Un résumé du schéma d'estimation complet est fourni dans l'algorithme 1.

4.2 Complexité algorithmique

La complexité de notre algorithme est directement liée à celle de la TT-SVD, qui est d'ordre $\mathcal{O}(TI^Q)$ [11] avec T le plus grand rang multilinéaire, I et Q représentant respectivement la plus grande dimension et l'ordre du tenseur d'origine. Lorsque l'ordre du tenseur augmente, la complexité de l'ALS devient insignifiante par rapport à celle de la TT-SVD et, par conséquent, le FMP et TRIDENT ont des complexités de calcul similaires. D'autre part, la complexité de la HOSVD augmente linéairement d'un facteur supplémentaire Q , ce qui donne $\mathcal{O}(QTI^Q)$. L'algorithme pourrait être modifié pour être encore plus rapide par exemple en remplaçant le TT-SVD par le TT-HSVD [10] et en recourant à des améliorations sur les itérations ALS comme dans [1].

4.3 Remarques sur l'unicité

Pour $1 < q < \bar{q}$, le modèle considéré dans le Lemme 1 ne jouit pas de la propriété d'unicité essentielle de la CPD. En adoptant l'analyse faite dans [3], nous pouvons estimer les facteurs de la CPD avec une ambiguïté telle que $\mathbf{T}_{M_q}^T = (\mathbf{T}_{M_{q-1}} \otimes \mathbf{T}_{F_q})^{-1}$, de sorte

Algorithme 1 : TRIDENT

input : Tenseur \mathcal{X} d'ordre Q et de rangs multilinéaires $\{T_1, \dots, T_Q\}$
output : Matrices facteurs \mathbf{F}_i et tenseur cœur \mathcal{C} de la décomposition Tucker

Calcul de \bar{q} et des TT-rangs en utilisant les rangs multilinéaires.

Calcul de la DTT :

$\{\mathbf{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{Q-1}, \mathbf{G}_Q\} = \text{TT-SVD}(\mathcal{X})$

Estimation des matrices facteurs en utilisant les ALS décrit dans l'équation (7) :

$\{\widehat{\mathbf{M}}_1, \widehat{\mathbf{F}}_2, \widehat{\mathbf{M}}_2\} = \text{Tri-ALS}(\mathcal{G}_2)$

$\{\widehat{\mathbf{M}}_{Q-2}, \widehat{\mathbf{F}}_{Q-1}, \widehat{\mathbf{M}}_{Q-1}\} = \text{Tri-ALS}(\mathcal{G}_{Q-1})$

for $3 \leq q \leq \bar{q} - 1$ **do**

 | $\{\widehat{\mathbf{F}}_q, \widehat{\mathbf{M}}_q\} = \text{Bi-ALS}(\mathcal{G}_q, \widehat{\mathbf{M}}_{q-1})$

end

for $Q - 1 \geq q \geq \bar{q} + 1$ **do**

 | $\{\widehat{\mathbf{F}}_q, \widehat{\mathbf{M}}_q\} = \text{Bi-ALS}(\mathcal{G}_q, \widehat{\mathbf{M}}_{q-1})$

end

$\widehat{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{G}_1 \widehat{\mathbf{M}}_1$

$\widehat{\mathbf{F}}_Q = \mathbf{G}_Q^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{Q-1}$

Estimation de $\mathbf{F}_{\bar{q}}$ comme les bases singulières gauches

du deuxième dépliement de $\mathcal{G}_{\bar{q}} \times_1 \widehat{\mathbf{M}}_{\bar{q}-1}^{-1} \times_3 \widehat{\mathbf{M}}_{\bar{q}}$.

(Optional) Calcul du tenseur cœur

$\mathcal{C} = \mathcal{X} \times_1 \mathbf{F}_1^\dagger \times_2 \dots \times_{\bar{q}} \mathbf{F}_{\bar{q}}^T \times_{\bar{q}+1} \dots \times_Q \mathbf{F}_Q^\dagger$;

que $\widehat{\mathbf{F}}_q = \mathbf{F}_q \mathbf{T}_{F_q}$, $\widehat{\mathbf{M}}_q = \mathbf{M}_q \mathbf{T}_{M_q}$, $\widehat{\mathbf{M}}_{q-1} = \mathbf{M}_{q-1} \mathbf{T}_{M_{q-1}}$. En effet, le modèle de Tucker n'a pas d'unicité essentielle mais seulement une unicité avec une matrice de changement de base, ce qui est le cas dans le modèle considéré. Si nous désignons génériquement \mathbf{F} tout facteur de Tucker et Φ sa matrice de contrainte associée, nous définissons $\widetilde{\mathbf{F}} = \widehat{\mathbf{F}} \Phi^T$. On a $\widetilde{\mathbf{F}} \Phi = R \mathbf{F} \mathbf{T}_F$. On a alors

$$\widetilde{\mathbf{F}} \Phi (\widetilde{\mathbf{F}} \Phi)^\dagger = R (\mathbf{F} \mathbf{T}_F) \frac{1}{R} (\mathbf{F} \mathbf{T}_F)^\dagger = \mathbf{F} \mathbf{T}_F \mathbf{T}_F^{-1} \mathbf{F}^\dagger = \mathbf{F} \mathbf{F}^\dagger.$$

5 Simulations numériques

Afin d'évaluer les performances de l'algorithme TRIDENT proposé, nous le comparons au HOSVD [4] et au FMP [11] pour trois expériences différentes. Ces expériences sont réalisées pour des tenseurs d'ordre Q , où Q est compris entre 4 et 9. Nous examinons dans quelle mesure l'algorithme est capable de reconstruire le tenseur original. Dans nos expériences, nous générons un tenseur bruité sous la forme $\mathcal{X} = \mathcal{T} / \|\mathcal{T}\| + \sigma \mathcal{B} / \|\mathcal{B}\|$, où \mathcal{T} est une réalisation unique d'une distribution gaussienne centrée réduite \mathcal{B} est un bruit blanc gaussien additif. Nous considérons des tenseurs cubiques avec des dimensions égales à 10 et des rangs multilinéaires tous égaux à 3. Les résultats sont moyennés sur 300 exécutions de Monte Carlo indépendantes. Nous soulignons que des expériences similaires ont été réalisées pour plusieurs dimensions (allant de 6 à 11) et rangs (allant de 2 à 4) et nous avons observé les mêmes conclusions (les résultats ne sont pas affichés dans cet article en raison de l'espace limité).

Expérience de reconstruction : Dans la première expérience, nous comparons l'erreur de reconstruction pour différents RSB,

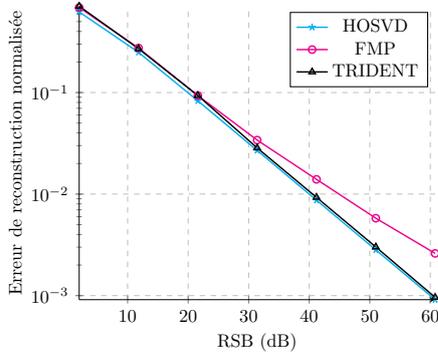


FIGURE 2 : Erreur de reconstruction normalisée des différentes méthodes.

Ordre du tenseur	HOSVD	FMP	Trident		
			10dB	30dB	∞
6	0.073	0.031	0.049	0.037	0.029
7	0.9	0.216	0.239	0.224	0.225
8	10.2	1.95	1.95	1.96	1.95
9	106	18.2	18.3	18.3	18.4

TABLE 1 : Temps de calcul (en secondes) des méthodes (RSB fixé à 30dB lorsque ce n'est pas précisé).

définis selon $RSB = -10 \log_{10}(\sigma^2)$. Pour mesurer l'erreur de reconstruction, nous considérons l'erreur de reconstruction normalisée qui est égale à $\|\mathcal{X} - \hat{\mathcal{X}}\|_F / \|\mathcal{X}\|_F$. Les résultats sont présentés dans la figure 2 pour un tenseur d'ordre 8. Nous pouvons observer que la méthode proposée permet d'obtenir des résultats similaires à ceux de la méthode HOSVD et qu'elle est plus performante à des RSB élevés (plus de 30 dB) que la méthode FMP concurrente.

Complexité temporelle : Dans notre deuxième expérience, nous vérifions notre analyse de la complexité algorithmique en observant le temps de calcul et en faisant varier l'ordre du tenseur. Comme le montre le tableau 1, la méthode proposée converge asymptotiquement vers les résultats de l'algorithme FMP, tandis que le HOSVD croît beaucoup plus rapidement. Nous observons, pour un tenseur d'ordre 9, un facteur 6 entre la méthode HOSVD et la méthode proposée, ce qui est cohérent avec notre analyse considérant les termes non dominants.

Convergence de l'ALS : Nous étudions enfin la convergence de l'étape ALS de notre algorithme. Plus précisément, le nombre d'étapes jusqu'à la convergence dépend du RSB pour les Tri-ALS et tous les Bi-ALS. Pour ces expériences, nous avons utilisé les mêmes conditions qu'au début de la section 5, ainsi qu'un tenseur d'ordre 8 pour le tenseur original. Le critère d'arrêt de l'ALS est fixé à $\lambda = 10^{-6}$, qui était la meilleure valeur expérimentale que nous avons trouvée afin d'avoir le meilleur compromis entre l'erreur de reconstruction et le temps d'exécution. Les résultats sont présentés dans la figure 3. Nous pouvons voir que la convergence est atteinte en quelques dizaines d'itérations, voire moins, tout en présentant une faible variance. Nous observons que pour un RSB supérieur à 20dB, nous sommes toujours en dessous de 20 itérations, et pour un RSB supérieur à 5dB, nous sommes en dessous de 40 itérations. Sur nos expériences, le nombre d'itérations nécessaire à la convergence des ALS varie peu. Une analyse plus fine de ce comportement pourrait étayer ces premières analyses.

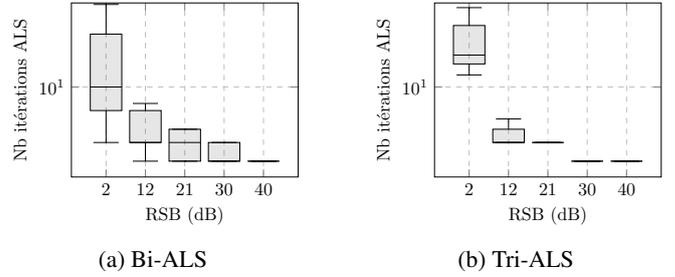


FIGURE 3 : Boîtes à moustaches du nombre d'itérations des ALS jusqu'à convergence pour différent RSB.

6 Conclusion

Dans cet article, nous proposons un nouvel algorithme de type JIRAFE, appelé TRIDENT, pour calculer la DT avec des coûts de stockage et de calcul réduits. La malédiction de la dimensionnalité peut être atténuée par l'estimateur TRIDENT. Plus précisément, l'estimateur proposé est basé sur une nouvelle équivalence algébrique entre le modèle de Tucker et une DTT structurée. En particulier, nous prouvons que pour un tenseur d'ordre Q , $Q - 3$ TT-cores suivent un modèle CP contraint. Nos simulations numériques montrent que l'estimateur TRIDENT et le HOSVD ont une précision d'estimation similaire pour la majeure partie de la gamme RSB la complexité du schéma TRIDENT étant considérablement inférieure.

Références

- [1] Casey BATTAGLINO, Grey BALLARD et Tamara G KOLDA : A practical randomized cp tensor decomposition. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 39(2):876–901, 2018.
- [2] Andrzej CICHOCKI, Danilo MANDIC, Lieven DE LATHAUWER, Guoxu ZHOU, Qibin ZHAO, Cesar CAIAFA et HUY ANH PHAN : Tensor decompositions for signal processing applications : From two-way to multiway component analysis. *IEEE Signal Processing Magazine*, 32(2): 145–163, 2015.
- [3] André L.F. de ALMEIDA, Gérard FAVIER et João Cesar M. MOTA : PARAFAC-based unified tensor modeling for wireless communication systems with application to blind multiuser equalization. *Signal Processing*, 87(2):337–351, février 2007.
- [4] Lieven DE LATHAUWER, Bart DE MOOR et Joos VANDEWALLE : A multilinear singular value decomposition. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21(4):1253–1278, 2000.
- [5] Philippe FORSTER, Guillaume GINOLHAC et Maxime BOIZARD : Derivation of the theoretical performance of a Tensor MUSIC algorithm. *Signal Processing*, 129(12):97–105, décembre 2016.
- [6] Frank L HITCHCOCK : The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products. *Journal of Mathematics and Physics*, 6(1-4):164–189, 1927.
- [7] Ivan V OSELEDETS : Tensor-train decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5):2295–2317, 2011.
- [8] Clémence PRÉVOST, Konstantin USEVICH, Pierre COMON et David BRIE : Hyperspectral super-resolution with coupled Tucker approximation : Recoverability and SVD-based algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 68:931–946, janvier 2020.
- [9] Ledyard R TUCKER : Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, 31(3):279–311, 1966.
- [10] Yassine ZNIYED, Rémy BOYER, André L. F. de ALMEIDA et Gérard FAVIER : A tt-based hierarchical framework for decomposing high-order tensors. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 42(2):A822–A848, 2020.
- [11] Yassine ZNIYED, Rémy BOYER, André L.F. de ALMEIDA et Gérard FAVIER : High-order tensor estimation via trains of coupled third-order CP and Tucker decompositions. *Linear Algebra and its Applications*, 588:304–337, mars 2020.