

Communication stratégique via le réseau de Gray-Wyner

Rony BOU ROUPHAEL¹, Maël LE TREUST¹

¹ ETIS UMR 8051, CY Cergy-Paris Université, ENSEA, CNRS,
6, avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise CEDEX, FRANCE
rony.bou-rouphael@ensea.fr, mael.le-treust@ensea.fr

Résumé – Nous considérons un jeu de communication stratégique décentralisé dans lequel un encodeur communique à travers le réseau de Gray-Wyner en direction de deux décodeurs. Les trois appareils poursuivent des objectifs distincts, capturés par des fonctions de coût différentes. L’encodeur sélectionne et annonce au préalable le schéma de compression qu’il met en œuvre. Trois messages sont transmis: un message public et un message privé à chaque décodeur. Les décodeurs réactualisent leurs croyances Bayésiennes et sélectionnent les suites d’action optimales pour leurs propres fonctions de coût. Nous déterminons des bornes inférieure et supérieure au coût minimal de long terme de l’encodeur qui tient compte des contraintes d’incitation des deux décodeurs. Ces bornes coïncident lorsque la fonction de coût de l’encodeur est séparable.

Abstract – We consider a decentralized strategic communication game in which an encoder communicates through the Gray-Wyner network towards two decoders. The three devices pursue distinct objectives, captured by different cost functions. The encoder selects and announces in advance the compression scheme it is implementing. Three messages are transmitted: a public message and a private message to each decoder. The decoders update their Bayesian beliefs and select the optimal action sequences for their own cost functions. We determine lower and upper bounds on the minimum long-term cost of the encoder which takes into account the incentive constraints of the two decoders. These bounds coincide when the cost function of the encoder is separable.

1 Introduction

Nous étudions un problème de prise de décision décentralisée avec une communication restreinte entre plusieurs agents aux objectifs non alignés. Nous sommes intéressés par la conception d’un schéma de codage réalisable qui minimise la fonction de coût à long terme de l’encodeur face aux contraintes imposées par le réseau Gray-Wyner.

Cet article étend les résultats de [1], dans le cas où chaque décodeur observe un message privé et un message public. À l’origine jeu émetteur-récepteur, le problème a été formulé sans aucune restriction quant à la quantité d’informations transmises. La solution d’équilibre de Nash du jeu de communication cheap-talk a été étudiée par Crawford et Sobel dans leur article fondateur [2]. Dans [3], Kamenica et Gentzkow formulent la version Stackelberg du jeu de communication stratégique, dans lequel l’encodeur est le leader du jeu de Stackelberg, i.e. l’encodeur s’engage sur sa stratégie avant le déroulement du jeu et le décodeur implante une meilleure réponse. La région des taux atteignables du réseau Gray-Wyner a été caractérisée dans [4].

La conception du mécanisme de révélation d’information avec plusieurs émetteurs et plusieurs récepteurs est étudiée dans [5]. Les aspects calculatoires du jeu de persuasion sont considérés dans [6]. Le problème de communication stratégique avec un canal bruité est étudié dans [7]

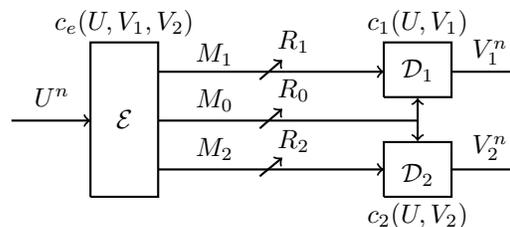


FIGURE 1 – Réseau de Gray-Wyner.

et [8]. Vora et Kulkarni étudient les taux réalisables pour le problème de communication stratégique dans [9], [10] où le décodeur est le leader du jeu de Stackelberg, i.e. la règle de décodage est fixée avant le déroulement du jeu et l’émetteur implante une meilleure réponse.

Nous étudions la communication stratégique à deux récepteurs via un réseau Gray-Wyner, comme dans la Fig. 1. L’encodeur \mathcal{E} s’engage à implanter une stratégie d’encodage avant que le jeu ne se déroule. Les symboles de sources et les messages sont tirés de manière aléatoire. Les décodeurs \mathcal{D}_i , $i \in \{1, 2\}$ observent les messages et mettent à jour leurs croyances Bayésiennes. Ils sélectionnent la suite d’actions qui minimise leur fonction de coût, étant donné leur croyance. De manière anticipée, l’encodeur s’engage sur une stratégie d’encodage qui minimise sa propre fonction de coût. Nous caractérisons le coût optimal de l’encodeur pour le réseau de Gray-Wyner de sorte que les

contraintes d'incitation des décodeurs soient satisfaites.

1.1 Notations

Les notations U^n et V_i^n désignent les suites de variables aléatoires de source $u^n = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}^n$, et des actions $v_i^n \in \mathcal{V}_i^n$ des décodeurs \mathcal{D}_i , $i \in \{1, 2\}$. Les polices calligraphiques \mathcal{U} et \mathcal{V}_i désignent les alphabets finis et les minuscules u et v_i désignent les réalisations. La source d'information U est tirée selon la distribution de probabilité indépendante et identiquement distribuée (i.i.d) $\mathcal{P}_U \in \Delta(\mathcal{U})$.

2 Modèle

Définition 1. Soit $(R_0, R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+^3 = [0, +\infty[^3$, et $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Les fonctions d'encodage σ et de décodage τ_i de l'encodeur \mathcal{E} et des décodeurs \mathcal{D}_i pour $i \in \{1, 2\}$ respectivement sont données par

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{U}^n &\mapsto \Delta(\{1, \dots, 2^{\lfloor nR_0 \rfloor}\} \times \{1, \dots, 2^{\lfloor nR_1 \rfloor}\} \times \{1, \dots, 2^{\lfloor nR_2 \rfloor}\}), \\ \tau_i : (\{1, 2, \dots, 2^{\lfloor nR_0 \rfloor}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{\lfloor nR_i \rfloor}\}) &\mapsto \Delta(\mathcal{V}_i^n), \\ \text{où } \lfloor x \rfloor &= \max\{m \in \mathbb{Z}, m \leq x\} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Les fonctions (σ, τ_1, τ_2) induisent une distribution de probabilité jointe $\mathcal{P}_{U^n M_0 M_1 M_2 V_1^n V_2^n}^{\sigma, \tau_1, \tau_2}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{U^n M_0 M_1 M_2 V_1^n V_2^n}^{\sigma, \tau_1, \tau_2} = \\ \left(\prod_{t=1}^n \mathcal{P}_{U_t} \right) \mathcal{P}_{M_0 M_1 M_2 | U^n}^{\sigma} \mathcal{P}_{V_1^n | M_0 M_1}^{\tau_1} \mathcal{P}_{V_2^n | M_0 M_2}^{\tau_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Cette distribution est notée $\mathcal{P}^{\sigma, \tau_1, \tau_2}$.

Définition 2. Nous considérons des fonctions de coût $c_e : \mathcal{U} \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ de l'encodeur \mathcal{E} , $c_i : \mathcal{U} \times \mathcal{V}_i \rightarrow \mathbb{R}$ du décodeur \mathcal{D}_i , $i \in \{1, 2\}$. Les fonctions de coût de long terme sont définies par

$$\begin{aligned} c_e^n(\sigma, \tau_1, \tau_2) &= \mathbb{E}_{\sigma, \tau_1, \tau_2} \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n c_e(U_t, V_{1,t}, V_{2,t}) \right], \\ c_i^n(\sigma, \tau_i) &= \mathbb{E}_{\sigma, \tau_i} \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n c_i(U_t, V_{i,t}) \right], \end{aligned}$$

où l'espérance est évaluée par rapport aux distributions $\mathcal{P}_{U^n V_1^n V_2^n}^{\sigma, \tau_1, \tau_2}$, $\mathcal{P}_{U^n V_1^n}^{\sigma, \tau_1}$, $\mathcal{P}_{U^n V_2^n}^{\sigma, \tau_2}$ qui sont les marginales de $\mathcal{P}^{\sigma, \tau_1, \tau_2}$. Pour chaque $\mathcal{Q}_{W_0 W_1 | U}$ et $\mathcal{Q}_{W_0 W_2 | U}$, nous définissons

Définition 3. Pour tout σ , l'ensemble des stratégies de meilleures réponses du décodeur \mathcal{D}_i , $i \in \{1, 2\}$ s'écrit

$$BR_i(\sigma) = \left\{ \tau_i, \quad c_i^n(\sigma, \tau_i) \leq c_i^n(\sigma, \tilde{\tau}_i), \quad \forall \tilde{\tau}_i \right\}. \quad (2)$$

Si plusieurs paires de stratégies sont meilleures réponses $(\tau_1, \tau_2) \in BR_1(\sigma) \times BR_2(\sigma)$ sont disponibles, nous supposons que la paire (τ_1, τ_2) qui maximise le coût de l'encodeur est sélectionnée. Pour $(R_0, R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le problème de codage à l'étude est

$$\Gamma_e^n(R_0, R_1, R_2) = \inf_{\sigma} \max_{\substack{\tau_1 \in BR_1(\sigma), \\ \tau_2 \in BR_2(\sigma)}} c_e^n(\sigma, \tau_1, \tau_2). \quad (3)$$

La signification opérationnelle de (3) correspond au jeu de persuasion qui se joue selon les étapes suivantes :

- L'encodeur \mathcal{E} choisit et annonce la stratégie σ .
- La suite U^n est tirée i.i.d selon \mathcal{P}_U .
- Les messages (M_0, M_1, M_2) sont encodés selon $\mathcal{P}_{M_0 M_1 M_2 | U^n}^{\sigma}$.
- Le décodeur \mathcal{D}_1 implante $\tau_1 \in BR_1(\sigma)$: il connaît σ , il observe (M_0, M_1) , il réactualise sa croyance Bayésienne $\mathcal{P}_{U^n | M_0 M_1}^{\sigma}$ et il sélectionne la suite d'actions V_1^n qui minimise l'espérance de sa fonction de coût $\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n c_1(U_t, V_{1,t}) \middle| M_0, M_1 \right]$ évaluée par rapport à sa croyance $\mathcal{P}_{U^n | M_0 M_1}^{\sigma}$.
- De manière similaire, \mathcal{D}_2 implante $\tau_2 \in BR_2(\sigma)$.
- Les joueurs obtiennent $c_e^n(\sigma, \tau_1, \tau_2)$, $c_1^n(\sigma, \tau_1)$, $c_2^n(\sigma, \tau_2)$.

Lemme 1. La suite $(n\Gamma_e^n(R_0, R_1, R_2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sous-additive.

La démonstration est donnée dans [1] en annexe.

3 Résultat principal

Etudions le comportement asymptotique de $\Gamma_e^n(R_0, R_1, R_2)$.

Définition 4. Nous considérons trois variables aléatoires auxiliaires $W_0 \in \mathcal{W}_0$, $W_1 \in \mathcal{W}_1$ et $W_2 \in \mathcal{W}_2$ avec $|\mathcal{W}_0| = |\mathcal{V}_1| \times |\mathcal{V}_2| + 1$ et $|\mathcal{W}_i| = |\mathcal{V}_i|$, pour $i \in \{1, 2\}$. Pour $(R_0, R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+^3$, nous définissons

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(R_0, R_1, R_2) = \\ \left\{ \mathcal{Q}_{W_0 | U} \mathcal{Q}_{W_1 | W_0 U} \mathcal{Q}_{W_2 | W_0 U}, R_0 \geq I(U; W_0), \right. \\ \left. R_0 + R_1 \geq I(U; W_1, W_0), R_0 + R_2 \geq I(U; W_2, W_0) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Q}}_0(R_0, R_1, R_2) = \\ \left\{ \mathcal{Q}_{W_0 W_1 W_2 | U}, R_0 \geq I(U; W_0), \right. \\ \left. R_0 + R_1 \geq I(U; W_1, W_0), R_0 + R_2 \geq I(U; W_2, W_0) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathcal{Q}_1(\mathcal{Q}_{W_0 W_1 | U}) = \arg \min_{\substack{\mathcal{Q}_{V_1 | W_0 W_1} \\ \mathcal{Q}_{V_1 | W_0 W_1}}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}_{W_0 W_1 | U}} [c_1(U, V_1)], \quad (6)$$

$$\mathcal{Q}_2(\mathcal{Q}_{W_0 W_2 | U}) = \arg \min_{\substack{\mathcal{Q}_{V_2 | W_0 W_2} \\ \mathcal{Q}_{V_2 | W_0 W_2}}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}_{W_0 W_2 | U}} [c_2(U, V_2)]. \quad (7)$$

Le coût optimal de l'encodeur est défini par

$$\begin{aligned} \Gamma_e^*(R_0, R_1, R_2) = \\ \inf_{\substack{\mathcal{Q}_{W_0 | U} \mathcal{Q}_{W_1 | W_0 U} \mathcal{Q}_{W_2 | W_0 U} \\ \in \mathcal{Q}_0(R_0, R_1, R_2)}} \max_{\substack{\mathcal{Q}_{V_1 | W_0 W_1} \in \mathcal{Q}_1(\mathcal{Q}_{W_0 W_1 | U}) \\ \mathcal{Q}_{V_2 | W_0 W_2} \in \mathcal{Q}_2(\mathcal{Q}_{W_0 W_2 | U})}} \mathbb{E} [c_e(U, V_1, V_2)], \end{aligned} \quad (8)$$

où l'espérance dans (8) est évalué par rapport à $\mathcal{P}_U \mathcal{Q}_{W_0|U} \times \mathcal{Q}_{W_1|W_0U} \mathcal{Q}_{W_2|W_0U} \mathcal{Q}_{V_1|W_0W_1} \mathcal{Q}_{V_2|W_0W_2}$.

On note $\tilde{\Gamma}_e(R_0, R_1, R_2)$ le coût optimal donné par (8) lorsque l'infimum est évalué par rapport à $\mathcal{Q}_{W_0W_1W_2|U} \in \tilde{\mathcal{Q}}_0(R_0, R_1, R_2)$, i.e. lorsque la propriété de chaîne de Markov $W_1 \dashv\vdash (U, W_0) \dashv\vdash W_2$ n'est pas requise.

Remarque 1. Les variables aléatoires U, W_0, W_1, W_2, V_1 et V_2 satisfont les chaînes de Markov suivantes

$$\begin{aligned} (U, W_2, V_2) &\dashv\vdash (W_0, W_1) \dashv\vdash V_1, \\ (U, W_1, V_1) &\dashv\vdash (W_0, W_2) \dashv\vdash V_2. \end{aligned}$$

Pour chaque distribution de $\mathcal{Q}_0(R_0, R_1, R_2)$, la chaîne de Markov suivante est satisfaite

$$W_1 \dashv\vdash (U, W_0) \dashv\vdash W_2.$$

Lemme 2. Si la fonction de coût de l'encodeur est séparable, i.e.

$$c_e(u, v_1, v_2) = c_{e1}(u, v_1) + c_{e2}(u, v_2), \quad \forall (u, v_1, v_2), \quad (9)$$

avec $c_{e1} : \mathcal{U} \times \mathcal{V}_1 \mapsto \mathbb{R}$ et $c_{e2} : \mathcal{U} \times \mathcal{V}_2 \mapsto \mathbb{R}$, alors

$$\Gamma_e^*(R_0, R_1, R_2) = \tilde{\Gamma}_e(R_0, R_1, R_2), \quad (10)$$

pour tout $(R_0, R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+^3$.

Théorème 1. Soit $(R_0, R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+^3$, nous avons

- a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{n} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \hat{n}$,

$$\Gamma_e^n(R_0, R_1, R_2) \leq \Gamma_e^*(R_0, R_1, R_2) + \varepsilon.$$
- b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_e^n(R_0, R_1, R_2) \geq \tilde{\Gamma}_e(R_0, R_1, R_2).$$

Corollaire 1. Pour tout $(R_0, R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+^3$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_e(R_0, R_1, R_2) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_e^n(R_0, R_1, R_2) \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \Gamma_e^n(R_0, R_1, R_2) \leq \Gamma_e^*(R_0, R_1, R_2). \end{aligned}$$

Ce corollaire repose sur le Théorème 1 et Lemme de Fekete pour la suite sous-additive $(n\Gamma_e^n(R_0, R_1, R_2))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4 Démonstration réciproque

Soit $(R_0, R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère (σ, τ_1, τ_2) et une variable aléatoire T uniformément répartie sur $\{1, 2, \dots, n\}$ et indépendante de $(U^n, M_0, M_1, M_2, V_1^n, V_2^n)$. On introduit les variables aléatoires auxiliaires $W_0 = (M_0, T)$, $W_1 = M_1$, $W_2 = M_2$, $(U, V_1, V_2) = (U_T, V_{1,T}, V_{2,T})$, distribué pour $(u, w_0, w_1, w_2, v_1, v_2) = (u_t, m_0, m_1, m_2, t, v_{1,t}, v_{2,t})$ selon $\mathcal{P}_{UW_0W_1W_2V_1V_2}^{\sigma\tau_1\tau_2}$ défini par

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{UW_0W_1W_2V_1V_2}^{\sigma\tau_1\tau_2}(u, w_0, w_1, w_2, v_1, v_2) \\ &= \mathcal{P}_{UTM_0M_1M_2TV_{1T}V_{2T}}^{\sigma\tau_1\tau_2}(u_t, m_0, m_1, m_2, t, v_{1,t}, v_{2,t}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{u^{t-1} \\ u^{t+1}}} \sum_{\substack{v_1^{t-1}, v_{1,t+1} \\ v_2^{t-1}, v_{2,t+1}}} \left(\prod_{t=1}^n \mathcal{P}_U(u_t) \right) \sigma(m_0, m_1, m_2 | u^n) \\ &\quad \times \tau_1(v_1^n | m_0, m_1) \tau_2(v_2^n | m_0, m_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Lemme 3. La distribution $\mathcal{P}_{UW_0W_1W_2V_1V_2}^{\sigma\tau_1\tau_2}$ est marginale sur $\Delta(\mathcal{U})$ donnée par \mathcal{P}_U et satisfait les propriétés des chaînes de Markov

$$\begin{aligned} (U, W_2, V_2) &\dashv\vdash (W_0, W_1) \dashv\vdash V_1, \\ (U, W_1, V_1) &\dashv\vdash (W_0, W_2) \dashv\vdash V_2. \end{aligned}$$

Lemme 4. Pour tout σ , la distribution $\mathcal{P}_{W_0W_1W_2|U}^\sigma \in \tilde{\mathcal{Q}}_0$.

La démonstration du Lemme 4 est dans [4].

Lemme 5. Pour tout (σ, τ_1, τ_2) et $i \in \{1, 2\}$, on a $c_e^n(\sigma, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}[c_e(U, V_1, V_2)]$ et $c_i^n(\sigma, \tau_i) = \mathbb{E}[c_i(U, V_i)]$ évalué par rapport à $\mathcal{P}_U \mathcal{P}_{W_0W_1W_2|U}^\sigma \mathcal{P}_{V_1|W_0W_1}^{\tau_1} \mathcal{P}_{V_2|W_0W_2}^{\tau_2}$. De plus, pour tout σ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1(\mathcal{P}_{W_0W_1|U}^\sigma) &= \left\{ \mathcal{Q}_{V_1|W_0W_1}, \right. \\ &\quad \left. \exists \tau_1 \in BR_1(\sigma), \mathcal{Q}_{V_1|W_0W_1} = \mathcal{P}_{V_1|W_0W_1}^{\tau_1} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2(\mathcal{P}_{W_0W_2|U}^\sigma) &= \left\{ \mathcal{Q}_{V_2|W_0W_2}, \right. \\ &\quad \left. \exists \tau_2 \in BR_2(\sigma), \mathcal{Q}_{V_2|W_0W_2} = \mathcal{P}_{V_2|W_0W_2}^{\tau_2} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Les démonstrations des lemmes 3 et 5 sont dans [1].

Pour toute stratégie σ , nous avons

$$\begin{aligned} &\max_{\substack{\tau_1 \in BR_1(\sigma), \\ \tau_2 \in BR_2(\sigma)}} c_e^n(\sigma, \tau_1, \tau_2) \\ &= \max_{\substack{\tau_1 \in BR_1(\sigma), \\ \tau_2 \in BR_2(\sigma)}} \mathbb{E}_{\mathcal{P}_{W_0W_1W_2|U}^\sigma \mathcal{P}_{V_1|W_0W_1}^{\tau_1} \mathcal{P}_{V_2|W_0W_2}^{\tau_2}} [c_e(U, V_1, V_2)] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &= \max_{\substack{\mathcal{Q}_{V_1|W_0W_1} \in \mathcal{Q}_1(\mathcal{P}_{W_0W_1|U}^\sigma), \\ \mathcal{Q}_{V_2|W_0W_2} \in \mathcal{Q}_2(\mathcal{P}_{W_0W_2|U}^\sigma)}} \mathbb{E}_{\mathcal{P}_{W_0W_1W_2|U}^\sigma \mathcal{Q}_{V_1|W_0W_1} \mathcal{Q}_{V_2|W_0W_2}} [c_e(U, V_1, V_2)] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\geq \inf_{\substack{\mathcal{Q}_{W_0W_1W_2|U} \in \mathcal{Q}_0(R_0, R_1, R_2), \\ \mathcal{Q}_{V_1|W_0W_1} \in \mathcal{Q}_1(\mathcal{Q}_{W_0W_1|U}^\sigma), \\ \mathcal{Q}_{V_2|W_0W_2} \in \mathcal{Q}_2(\mathcal{Q}_{W_0W_2|U}^\sigma)}} \max_{\mathcal{Q}_{V_1|W_0W_1} \mathcal{Q}_{V_2|W_0W_2}} \mathbb{E} [c_e(U, V_1, V_2)] \quad (16)$$

$$= \tilde{\Gamma}_e(R_0, R_1, R_2). \quad (17)$$

Les équations (14) et (15) proviennent du lemme 5, alors que (16) vient du lemme 4 et (17) découle de (8). Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{\Gamma}_e(R_0, R_1, R_2) \leq \inf_{\sigma} \max_{\substack{\tau_1 \in BR_1(\sigma), \\ \tau_2 \in BR_2(\sigma)}} c_e^n(\sigma, \tau_1, \tau_2) = \Gamma_e^n(R_0, R_1, R_2).$$

5 Esquisse d'atteignabilité

Pour $(w_0, w_1, w_2) \in \mathcal{W}_0 \times \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$, nous introduisons les notations $\mathcal{Q}_U^{w_0w_1} = \mathcal{Q}_{U|W_0W_1}(\cdot | w_0, w_1) \in \Delta(\mathcal{U})$ et $\mathcal{Q}_U^{w_0w_2} = \mathcal{Q}_{U|W_0W_2}(\cdot | w_0, w_2) \in \Delta(\mathcal{U})$.

5.1 Schéma d'atteignabilité

Fixons $\eta > 0$ et une distribution de probabilité conditionnelle $\mathcal{Q}_{W_0|U} \mathcal{Q}_{W_1|UW_0} \mathcal{Q}_{W_2|UW_0}$ telle que

$$R_0 = I(U; W_0) + \eta, \quad (18)$$

$$R_1 = I(U; W_1 | W_0) + \eta, \quad (19)$$

$$R_2 = I(U; W_2 | W_0) + \eta. \quad (20)$$

Génération du livre de code. Pour chaque pour $m_0 \in [1 : 2^{\lfloor nR_0 \rfloor}]$, une suite $W_0^n(m_0)$ est tirée selon la distribution i.i.d. \mathcal{Q}_{W_0} . Pour chaque $(m_1, m_0) \in [1 : 2^{\lfloor nR_1 \rfloor}] \times [1 : 2^{\lfloor nR_0 \rfloor}]$, tirons une suite $W_1^n(m_1, m_0)$ selon la distribution conditionnelle i.i.d. $\mathcal{Q}_{W_1|W_0}$. Pour chaque $(m_2, m_0) \in [1 : 2^{\lfloor nR_2 \rfloor}] \times [1 : 2^{\lfloor nR_0 \rfloor}]$, tirons une suite $W_2^n(m_2, m_0)$ selon la distribution conditionnelle i.i.d $\mathcal{Q}_{W_2|W_0}$.

Algorithme de codage. L'encodeur \mathcal{E} observe U^n et détermine m_0 tel que $(U^n, W_0^n(m_0)) \in \mathcal{T}_\delta^n(\mathcal{P}_U \mathcal{Q}_{W_0|U})$. L'encodeur détermine m_1 tel que $(U^n, W_0^n(m_0), W_1^n(m_1, m_0)) \in \mathcal{T}_\delta^n(\mathcal{P}_U \mathcal{Q}_{W_0 W_1|U})$ et m_2 tel que $(U^n, W_0^n(m_0), W_2^n(m_2, m_0)) \in \mathcal{T}_\delta^n(\mathcal{P}_U \mathcal{Q}_{W_0 W_2|U})$. Si aucune suite n'est conjointement typique, alors (m_0, m_1, m_2) sur $(1, 1, 1)$.

Algorithme de décodage. Le décodeur \mathcal{D}_1 renvoie V_1^n et le décodeur \mathcal{D}_2 renvoie V_2^n selon les fonctions de décodage $\tau_1 \in BR_1(\sigma)$ et $\tau_2 \in BR_2(\sigma)$, respectivement.

Événement d'erreur. Définissons les événements

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \{(U^n, W_0^n(m_0)) \notin \mathcal{T}_\delta^n \forall m_0\}, \\ \mathcal{E}_1(m_0) &= \{(U^n, W_0^n(m_0), W_1^n(m_1, m_0)) \notin \mathcal{T}_\delta^n \forall m_1\}, \\ \mathcal{E}_2(m_0) &= \{(U^n, W_0^n(m_0), W_2^n(m_2, m_0)) \notin \mathcal{T}_\delta^n \forall m_2\}. \end{aligned}$$

Par le lemme de recouvrement [11, pp. 62], $\mathcal{P}(\mathcal{E}_0)$ tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$ si $R_0 \geq I(U; W_0) + \eta$, $\mathcal{P}(\mathcal{E}_1^c \cap \mathcal{E}_0(M_0))$ tend vers zéro si $R_1 \geq I(U; W_1|W_0) + \eta$, $\mathcal{P}(\mathcal{E}_2^c \cap \mathcal{E}_0(M_0))$ tend vers zéro si $R_2 \geq I(U; W_2|W_0) + \eta$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \bar{n}$, il existe un livre de code tel que

$$\mathcal{P}((U^n, W_0^n(m_0), W_1^n(m_1, m_0), W_2^n(m_2, m_0)) \notin \mathcal{T}_\delta^n) \leq \varepsilon.$$

5.2 Contrôle des croyances

A l'étape $t \in \{1, \dots, n\}$, les décodeurs choisissent les actions $V_{1,t}$ et $V_{2,t}$ qui sont optimales pour $\mathbb{E}[c_1(U_t, V_{1,t})|M_0, M_1]$ et $\mathbb{E}[c_2(U_t, V_{2,t})|M_0, M_2]$, étant données les croyances Bayésiennes $\mathcal{P}_{U_t|M_0 M_1}^\sigma(\cdot|m_0, m_1)$ et $\mathcal{P}_{U_t|M_0 M_2}^\sigma(\cdot|m_0, m_2)$ que l'on notera $\mathcal{P}_t^{m_1, m_0}$ et $\mathcal{P}_t^{m_2, m_0}$, respectivement. Nous introduisons l'indicateur d'événements d'erreur $E_\delta^1 \in \{0, 1\}$ comme suit

$$E_\delta^1 = \begin{cases} 1, & \text{if } (u^n, w_1^n, w_2^n, w_0^n) \notin \mathcal{T}_\delta^n(\mathcal{P}_U \mathcal{Q}_{W_0 W_1 W_2|U}). \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n D(\mathcal{P}_t^{m_1, m_0} || \mathcal{Q}_{U|W_1 W_0}(\cdot|W_{1t}, W_{0t})) \Big| E_\delta^1 = 0\right] \\ &= \sum_{m_1, m_0, w_1^n, w_0^n} \mathcal{P}^{\sigma, \tau_1}(m_1, m_0, w_1^n, w_0^n \Big| E_\delta^1 = 0) \times \\ & \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_u \mathcal{P}_t^{m_1 m_0}(u) \log_2 \frac{1}{\mathcal{Q}_{U|W_1 W_0}(u|w_{1t}, w_{0t})} \\ & \quad - \sum_{m_1, m_0, w_1^n, w_0^n} \mathcal{P}^{\sigma, \tau_1}(m_1, m_0, w_1^n, w_0^n \Big| E_\delta^1 = 0) \times \\ & \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_u \mathcal{P}_t^{m_1 m_0}(u) \log_2 \frac{1}{\mathcal{P}_t^{m_1 m_0}(u)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{n} \sum_{u^n, w_1^n, w_0^n \in \mathcal{T}_\delta^n} \mathcal{P}^{\sigma, \tau_1}(u^n, w_1^n, w_0^n \Big| E_\delta^1 = 0) \cdot n \times \\ & \quad (H(U|W_1, W_0) + \delta) - \frac{1}{n} H(U^n | M_1, M_0, E_\delta^1 = 0) \\ & \leq \frac{1}{n} I(U^n; M_1, M_0 \Big| E_\delta^1 = 0) - I(U; W_1, W_0) + \delta + \frac{1}{n} + \times \\ & \quad \log_2 |\mathcal{U}| \cdot \mathcal{P}^{\sigma, \tau_1}(E_\delta^1 = 1) \\ & \leq \eta + \delta + \frac{1}{n} + \log_2 |\mathcal{U}| \cdot \mathcal{P}^{\sigma, \tau_1}(E_\delta^1 = 1). \end{aligned}$$

Références

- [1] R. Bou Rouchael and M. Le Treust, "Strategic successive refinement coding for bayesian persuasion with two decoders," *IEEE Information Theory Workshop, Kanazawa Japan (online)*, Oct. 2021.
- [2] V. Crawford and J. Sobel, "Strategic information transmission," *Econometrica*, vol. 50, no. 6, pp. 1431–51, 1982.
- [3] E. Kamenica and M. Gentzkow, "Bayesian persuasion," *American Economic Review*, vol. 101, pp. 2590–2615, 2011.
- [4] R. M. Gray and A. D. Wyner, "Source coding for a simple network," *The Bell System Technical Journal*, vol. 53, no. 9, pp. 1681–1721, 1974.
- [5] F. Koessler, M. Laclau, and T. Tomala, "Interactive information design," *Mathematics of Operations Research*, 06 2021.
- [6] S. Dughmi, D. Kempe, and R. Qiang, "Persuasion with limited communication," in *Proceedings of the 2016 ACM Conference on Economics and Computation*, ser. EC '16. New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, 2016, p. 663–680.
- [7] M. Le Treust and T. Tomala, "Information design for strategic coordination of autonomous devices with non-aligned utilities," *IEEE Proc. of the 54th Allerton conference, Monticello, Illinois*, pp. 233–242, 2016.
- [8] —, "Persuasion with limited communication capacity," *Journal of Economic Theory*, vol. 184, p. 104940, 2019.
- [9] A. S. Vora and A. A. Kulkarni, "Achievable rates for strategic communication," in *2020 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 2020, pp. 1379–1384.
- [10] —, "Information extraction from a strategic sender : The zero error case," 2020. [Online]. Available : <https://arxiv.org/abs/2006.10641>
- [11] A. El Gamal and Y.-H. Kim, *Network information theory*. Cambridge university press, 2011.